

**CEDERJ – CENTRO DE EDUCAÇÃO SUPERIOR A DISTÂNCIA
DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO**

CURSO: Engenharia de Produção DISCIPLINA: Mecânica Geral

CONTEUDISTA: Jorge Alberto Rodriguez Duran

Aula 10 – Atrito

Meta

Capacitar o aluno a solucionar problemas de equilíbrio estático e iminência do deslizamento envolvendo atrito seco entre duas superfícies.

Objetivos

Esperamos que, ao final desta aula, você seja capaz de:

- 1 Resolver problemas de equilíbrio estático, iminência do movimento ou movimento envolvendo forças de atrito em corpos rígidos.

Introdução

O Atrito é definido como a força que se opõe ao movimento relativo entre duas superfícies. Na aula 4 classificamos as reações nos apoios em três grupos. As superfícies sem ou com atrito foram alocadas nos grupos 1 e 2 respectivamente. Se o atrito entre as superfícies de contato no apoio for desprezado (grupo 1), surge uma única força de reação de direção conhecida. No outro extremo, a consideração do atrito (grupo 2) não permite identificar a direção da reação e a mesma é decomposta em suas duas (plano) ou três (espaço) componentes.

Em situações reais os esforços solicitantes podem ser tais que as reações devidas ao atrito entre as superfícies não sejam capazes de manter o equilíbrio. Nestas condições ocorre o deslizamento relativo entre as partes. Tanto na iminência do deslizamento quanto no deslizamento em si, forças de atrito são desenvolvidas entre as superfícies. Estas forças e a aplicação das equações de equilíbrio estático para analisá-las constituem o foco da presente aula.

Equações de equilíbrio

Considere o caso simples de um bloco de peso W apoiado em uma superfície plana com atrito (Figura 1). A força H empurra o bloco para a direita (na direção do semi-eixo positivo de x_1) mas o movimento é impedido totalmente (ou ao menos dificultado) pela existência da força de atrito F . Esta força é o resultado da ação da superfície de apoio sobre o bloco. Uma força normal N surge também pelo efeito do peso próprio do bloco W e da componente vertical de H . As duas forças (F e N) mostradas na figura constituem a resultante das infinitas forças dF ou dN atuando entre as superfícies. Como sabemos da aula 6 (Forças distribuídas) a resultante N do carregamento normal está aplicada no centroide da figura geométrica que descreve a variação de dN na interface do bloco com a superfície. Esta figura geométrica é desconhecida e variável pois depende do equilíbrio de momentos das diferentes forças envolvidas na análise. Aplicando as equações de equilíbrio obtemos as seguintes relações:

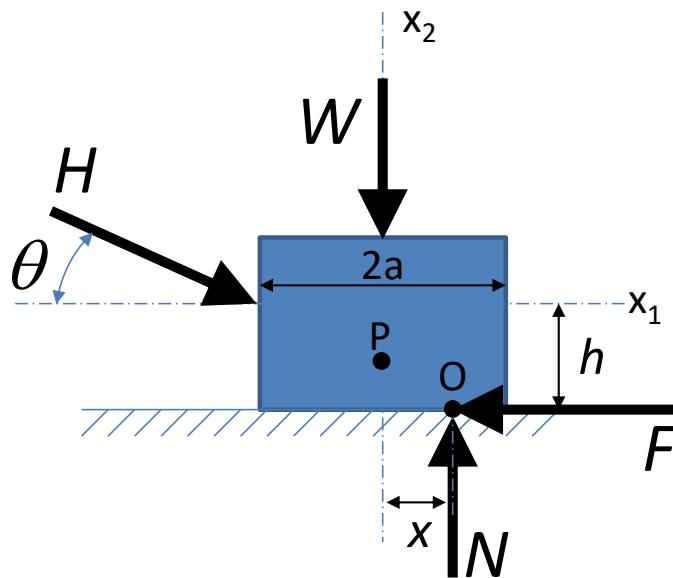


Figura 1 – Um bloco apoiado no plano sob a ação do próprio peso W e de uma força inclinada H . As componentes da resultante das forças de reação N e F também aparecem na figura.

$$\begin{aligned}
\sum F_{x1} = 0 & \quad H \cos\theta - F = 0 & \quad F = H \cos\theta \\
\sum F_{x2} = 0 & \quad N - W - H \operatorname{sen}\theta = 0 & \quad N = W + H \operatorname{sen}\theta \\
\sum M_o = 0 & \quad xW - hH \cos\theta + (a + x)H \operatorname{sen}\theta = 0 \\
& \quad x = \frac{H(h \cos\theta - a \operatorname{sen}\theta)}{W + H \operatorname{sen}\theta}
\end{aligned}
\tag{Eq. 1}$$

É claro que se a distância x calculada pela Eq. 1 estiver fora do bloco este irá girar em torno do seu canto inferior direito e perderá o equilíbrio. Os parâmetros que controlam esta distância são o peso W do bloco, a força H aplicada, o ângulo θ de inclinação desta força com relação ao eixo x_1 e a altura h . A influência relativa de cada um deles pode ser analisada definindo as seguintes variáveis adimensionais e substituindo na expressão de x :

$$\begin{aligned}
h' = \frac{h}{a} \quad x' = \frac{x}{a} \quad H' = \frac{H}{W} \\
x' = \frac{H'(h' \cos\theta - \operatorname{sen}\theta)}{1 + H' \operatorname{sen}\theta}
\end{aligned}
\tag{Eq. 2}$$

Uma combinação de alta carga relativa H' com um pequeno ângulo θ pode fazer com que o x' atinja o valor de 1 ([Figura 2](#)) e o bloco gire em lugar de ficar parado ou deslizar.

Equações do atrito seco

Se os esforços aplicados ao bloco e os ângulos de aplicação dos mesmos são conhecidos, a Eq. 1 é suficiente para calcular as forças F , N e a distância x . Caso contrário, equações adicionais serão necessárias. Note que o aumento de H e a diminuição de θ provocam um aumento da força de atrito F . A continuar esta tendência o bloco poderá começar a deslizar. Na iminência do deslizamento a máxima força de atrito se calcula como $F_m = \mu_e N = H \cdot \cos\theta$ onde μ_e é o coeficiente de atrito estático. O subscrito m indica força máxima. Este é um resultado empírico, como o são também os coeficientes μ_e mostrados na tabela 1 [2] para diferentes pares de superfícies em contato.

Uma vez que o bloco começa a deslizar sobre a superfície a força de atrito atuante cai para $F_c = \mu_c \cdot N < H \cdot \cos\theta$, onde $\mu_c < \mu_e$ é o coeficiente de atrito dinâmico. O subscrito c representa a palavra cinética, relacionada com a condição de movimento. A relação entre os

coeficientes de atrito dinâmico e estático normalmente está próxima de 0,7 ou seja $\mu_c \cong 0.7 \mu_e$. Nestas circunstâncias as forças $H \cdot \cos \theta$ e F_c da Figura 1 não se anulam mutuamente, como acontece durante o equilíbrio estático, e o bloco começa a se movimentar para a direita na Figura 1. É importante destacar que os coeficientes de atrito estático μ_e e dinâmico μ_c independem das áreas em contato.

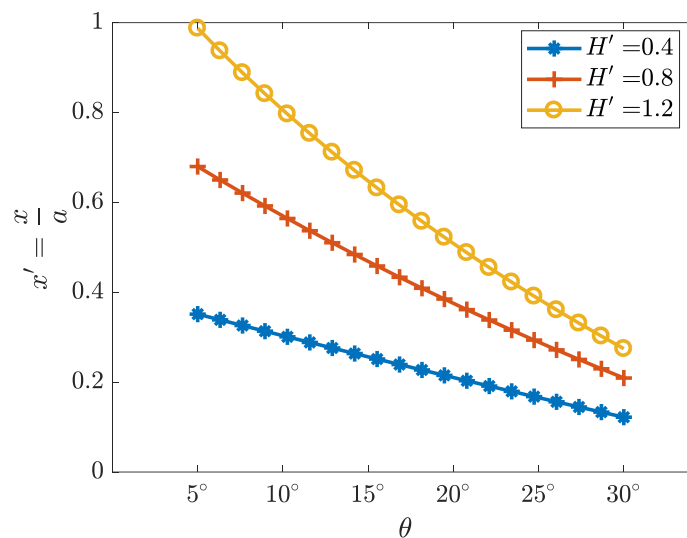


Figura 2 – Variação da distância de equilíbrio adimensional x' (Eq. 2) dos diferentes binários que atuam no bloco da Figura 1, para três valores da relação entre a carga aplicada H e o peso do bloco W , em função do ângulo θ de inclinação da força H e para $h/a = 1$.

Observe que o equilíbrio de momentos em relação ao ponto O na Figura 1 inclui as forças W e H . Isto acontece porque a linha de ação destas forças não passa por O e sim por P . Dependendo do tipo de problema esta estratégia pode gerar um sistema com mais incógnitas do que equações e dificultar a solução.

Tabela 1 – Coeficientes de atrito estático para algumas combinações de superfícies em contato [2].

Materiais em contato	Coeficiente de atrito estático μ_e
Metal com gelo	0,03–0,05
Madeira com madeira	0,3–0,7
Couro com madeira	0,2–0,5
Couro com metal	0,3–0,6
Alumínio com alumínio	1,1–1,75

Para dispor de equações adicionais observamos que a linha de ação da resultante R das forças N e F têm necessariamente que passar também pelo ponto P . De outra forma o equilíbrio de momentos em torno deste ponto não seria satisfeito. Assim o nosso bloco é um membro de três forças e poderemos representar o equilíbrio fazendo uso do triângulo de forças (Figura 3).

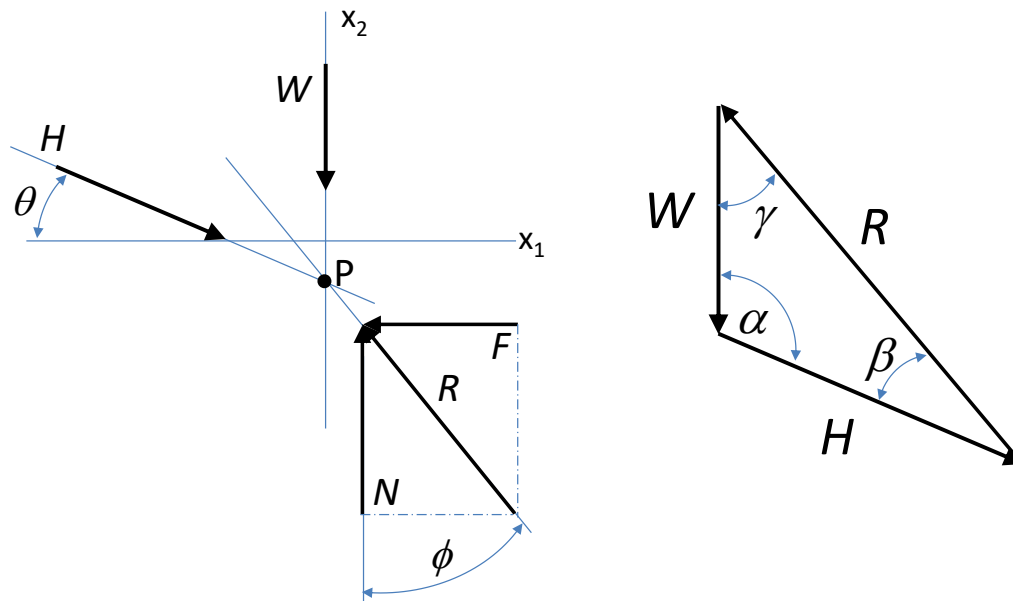


Figura 3 – A consideração da resultante R da força de atrito F e da normal N permite analisar o bloco como um membro de três forças.

A direção de R é geralmente conhecida pois:

$$\tan(\phi) = \frac{F}{N} = \frac{\mu \cdot N}{N} = \mu \quad \text{Eq. 3}$$

Onde F poderá ser F_m (na iminência do deslizamento) ou F_c (durante o deslizamento). A aplicação da lei dos senos e da lei dos cossenos ao triângulo de forças da Figura 3 fornece as seguintes equações:

$$\frac{R}{\cos \alpha} = \frac{W}{\sin \beta} = \frac{H}{\sin \gamma} \quad \text{Eq. 4}$$

$$R^2 = H^2 + W^2 - 2HW \cos \alpha$$

Para a utilização da Eq. 4 devemos estabelecer uma relação entre os ângulos internos do triângulo de forças (α , β e γ) e os ângulos (θ e ϕ) que as linhas de ação das forças H e R fazem com o nosso referencial cartesiano x_1x_2 . Da Figura 3 temos:

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{\pi}{2} + \theta \\ \beta &= \frac{\pi}{2} - (\theta + \phi) \\ \gamma &= \phi\end{aligned}\tag{Eq. 5}$$

A substituição da Eq. 5 na Eq. 4 fornece um conjunto adicional de equações que relaciona os esforços aplicados no bloco da Figura 1 e os seus ângulos. Em resumo, além das equações de equilíbrio (Eq. 1) contamos com a Eq. 4 e com as relações $F_m = \mu_e \cdot N$ e $F_c = \mu_c \cdot N$.

Exemplo 1 – Verifique se o bloco da Figura 4 está em equilíbrio sob a ação das forças mostradas. Dependendo do resultado, calcule a força de atrito atuante. Os dados do problema são: $H = 1 \text{ KN}$, $W = 3 \text{ KN}$, $\alpha = 25^\circ$, $\beta = 12^\circ$, $\mu_e = 0.3$ e $\mu_c = 0.2$.

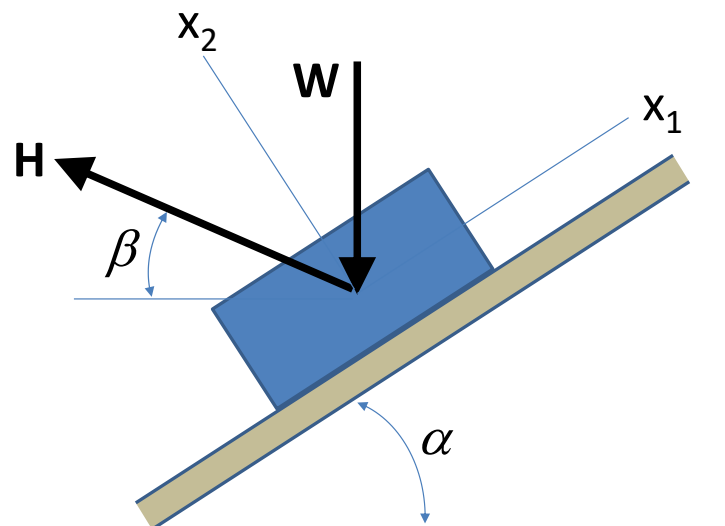


Figura 4 – Bloco sob a ação das forças W e H em um plano inclinado. Corresponde ao exemplo 1.

Solução: A estratégia de solução deste problema é simples: calcular a força de atrito F necessária para manter o equilíbrio do bloco e compará-la com a estimativa de $F_m = \mu_e N$.

Se $F > F_m$ significa que o bloco está em movimento e a força de atrito presente na interface será $F_c = \mu c N$. Se este for o caso o somatório de forças na direção x_1 terá um valor diferente de zero.

O diagrama de corpo livre do bloco se mostra na [Figura 5](#). Projetando as forças na direção dos eixos cartesianos e aplicando as equações de equilíbrio Eq. 1 temos:

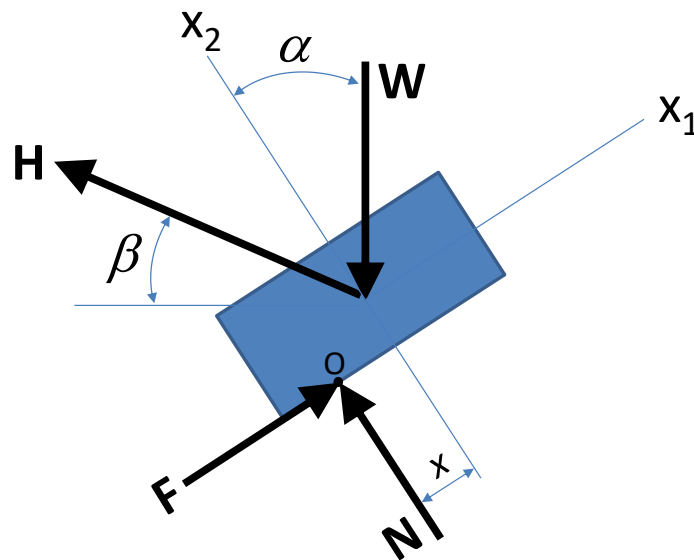


Figura 5 – Diagrama de corpo livre DCL do bloco do exemplo 1.

$$\sum F_{x_2} = 0 \Rightarrow N = W \cdot \cos(\alpha) - H \cdot \text{sen}(\alpha + \beta) = 2,11 \text{ KN}$$

$$\sum F_{x_1} = 0 \Rightarrow F = W \cdot \text{sen}(\alpha) + H \cdot \cos(\alpha + \beta) = 2 \text{ KN}$$

Eq. 6

Observe que como não temos a altura do bloco não poderemos efetuar o somatório de momentos em torno do ponto O para calcular a distância x. De qualquer forma isto não interfere no resultado procurado. A força de atrito necessária para manter o bloco em equilíbrio estático é $F = 2 \text{ KN}$ (Eq. 6). Por outro lado, a combinação de coeficiente de atrito estático μe e componente de força normal à superfície N do bloco fornecem um valor de $F_m = \mu e \cdot N = 0,3 \cdot 2,11 = 0,63 \text{ KN}$. Como este valor é inferior ao necessário haverá deslizamento. A força de atrito realmente atuando entre as duas superfícies será então

$F_c = \mu_c \cdot N = 0,2 \cdot 2,11 = 0,42 \text{ KN}$. Substituindo este valor na Eq. 6 (b) verificamos que o desequilíbrio de forças na direção x_1 é igual à diferença $F - F_c$:

$$W \cdot \text{sen}(\alpha) + H \cdot \cos(\alpha + \beta) - F_c = 1,58 \text{ KN} \quad \text{Eq. 7}$$

Exemplo 2 – O bloco da [Figura 1](#) encontra-se sob a ação do próprio peso W e de uma força H que faz um ângulo θ com a horizontal. Calcule o maior valor de θ para o qual o deslizamento do bloco é iminente. O coeficiente de atrito estático entre as superfícies é $\mu_e = 0,25$ e as forças $W = 750 \text{ N}$ e $H = 300 \text{ N}$. Verifique também se nestas condições (iminência do deslizamento) não ocorre o tombamento do bloco para $h = 40 \text{ mm}$ e $2a = 60 \text{ mm}$.

Solução: O sistema obtido como resultado da aplicação das equações de equilíbrio a este problema (o mesmo da Eq. 1) é o seguinte:

$$\begin{aligned} F &= H \cos \theta \\ N &= W + H \text{sen} \theta \\ x &= \frac{H(h \cos \theta - a \text{sen} \theta)}{W + H \text{sen} \theta} \end{aligned} \quad \text{Eq. 8}$$

O sistema consta de apenas três equações que não são suficientes para obter as cinco incógnitas (F_m , N , $\text{sen} \theta$, $\cos \theta$, x). Na iminência do deslizamento podemos aplicar a relação $F_m = \mu_e \cdot N$ o que reduz o número de incógnitas de cinco para quatro, mas o sistema permanece insolúvel. A melhor forma de contornar o problema consiste em utilizar o triângulo de forças da [Figura 3](#) e a lei dos senos (Eq. 4).

$$\frac{W}{\text{sen} \beta} = \frac{H}{\text{sen} \gamma} \quad \text{Eq. 9}$$

Os ângulos β e γ são funções de θ e ϕ (Eq. 5). Se utilizamos a Eq. 3 com $\mu = \mu_e$ a única incógnita da Eq. 9 passa a ser o ângulo θ .

$$\frac{W}{\text{sen}\left[\frac{\pi}{2} - (\theta + \phi)\right]} = \frac{H}{\text{sen}\phi}$$

$$\frac{W}{\text{sen}\left[\frac{\pi}{2} - (\theta + \tan^{-1} \mu e)\right]} = \frac{H}{\text{sen}(\tan^{-1} \mu e)}$$
Eq. 10

Resolvendo a Eq. 10 para θ temos:

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \mu e - \text{sen}^{-1}\left[\frac{W}{H} \text{sen}(\tan^{-1} \mu e)\right] = 38,6^\circ$$
Eq. 11

Este valor deve ser interpretado da seguinte forma: Para a combinação de esforços dados no problema (H e W) se o ângulo $\theta \geq 38,6^\circ$ as forças de reação, especificamente a força de atrito F , evitam o deslizamento do bloco sobre a superfície. Quando $\theta = 38,6^\circ$ o deslizamento é iminente e a força $F_m = \mu e \cdot N$. Para ângulos menores a componente horizontal de H é suficiente para vencer a resistência do atrito e o bloco desliza. As condições de equilíbrio estático deixam de ser válidas pois $H \cos \theta$ passa a ser maior do que $F_c = \mu c \cdot N$.

Para verificar o tombamento calculamos a distância x pela Eq. 8, ou seja, a distância à qual encontra-se o centroide da distribuição de N (Figura 1).

$$x = \frac{H(h \cos \theta - a \text{sen} \theta)}{W + H \text{sen} \theta} = 4 \text{ mm}$$
Eq. 12

Como $x = 4 \text{ mm} < a = 30 \text{ mm}$ não ocorre o tombamento do bloco.

Exemplo 3 – O freio mostrado consiste em uma alavanca conectada por um pino em A e uma sapata de atrito em B. Aplica-se um torque de 5 N.m à roda e o coeficiente de atrito estático entre esta e o bloco (em B) é $\mu e = 0.3$. Determine se o freio consegue parar completamente a roda para dos valores de P: a) P = 30 N e b) P = 70 N.

Solução: Como sempre o primeiro passo consiste na elaboração do diagrama de corpo livre da alavanca. Este diagrama se mostra na Figura 7. A rigor deveríamos ter isolado

completamente a alavanca substituindo a articulação em A pelas duas componentes da reação que ali atua. Mas como só precisamos de uma equação de equilíbrio e esta será precisamente o somatório de momentos em A, as componentes nesse ponto não serão necessárias. Considerando os momentos anti-horários positivos temos:

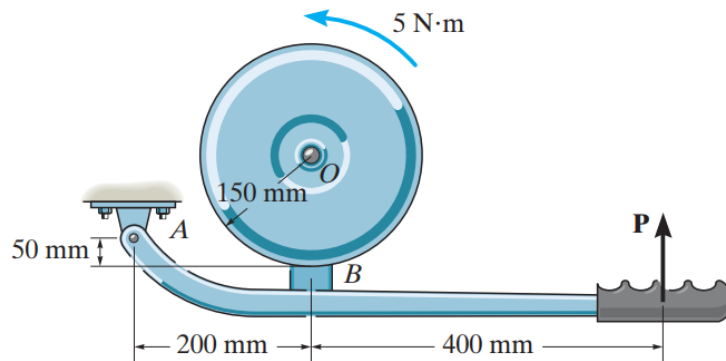


Figura 6 – Um freio de sapata utilizado em uma roda sob torque constante (Exemplo 3) [2].

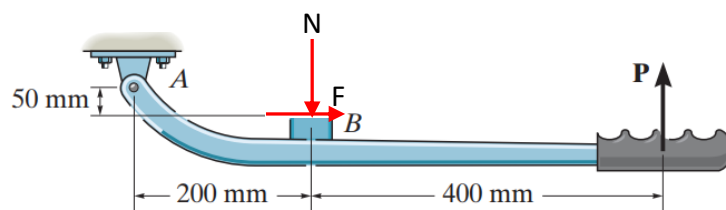


Figura 7 – Diagrama de corpo livre do exemplo 3.

$$\sum M_A = 0,6 \cdot P - 0,2 \cdot N + 0,05 \cdot F = 0 \quad \text{Eq. 13}$$

A menor força de atrito que consegue parar a roda será $F_{min} = T/r$, onde T e r são o torque e o raio da roda respectivamente. Para o problema em questão $F_{min} = \frac{5}{0,150} = 33,33$ N. O valor de F que satisfaz a Eq. 13 para cada valor de P e utilizando a condição de deslizamento iminente $N = F / \mu_e$ deve ser comparado então com F_{min} para determinar se o freio consegue parar a roda ou não. Substituindo valores temos:

$$\text{Para } P = 30 \text{ N, } \sum M_A = 0,6 \cdot 30 - 0,2 \cdot \frac{F}{0,3} + 0,05 \cdot F = 0, \rightarrow F = 29,2 \text{ N} < 33,33 \text{ N}$$

$$\text{Para } P = 70 \text{ N, } \sum M_A = 0,6 \cdot 70 - 0,2 \cdot \frac{F}{0,3} + 0,05 \cdot F = 0, \rightarrow F = 68,1 \text{ N} > 33,33 \text{ N}$$

Por tanto, apenas a força $P = 70 \text{ N}$ consegue parar a roda.

INÍCIO DA ATIVIDADE

Atividade 1 – Calcule a força P necessária para que o carretel de $W = 350 \text{ kg}$ esteja na iminência do movimento (Figura 8). Nos pontos de contato A e B os coeficientes de atrito estático são $\mu_A = 0.4$ e $\mu_B = 0.5$. Os dados geométricos do problema são: $b = 2 \cdot a$, $c = 3/4 \cdot a$ e $a = 400 \text{ mm}$.

Resposta comentada:

Isolamos o carretel da superfície de contato e substituímos o efeito da mesma por forças normais N_A e N_B cuja linha de ação passa pelo ponto O e por forças de atrito F_A e F_B , como mostrado no diagrama de corpo livre da Figura 9.

Ao aplicar as equações de equilíbrio, o somatório de momentos deverá ser feito em torno de um eixo normal ao papel e que passa pelo ponto O. Desta forma a equação resultante não incluirá as incógnitas N_A e N_B . Observe também que o ângulo de lados $b - c$ e d (Figura 9) será utilizado para projetar as forças nas direções dos eixos coordenados x_1 e x_2 .

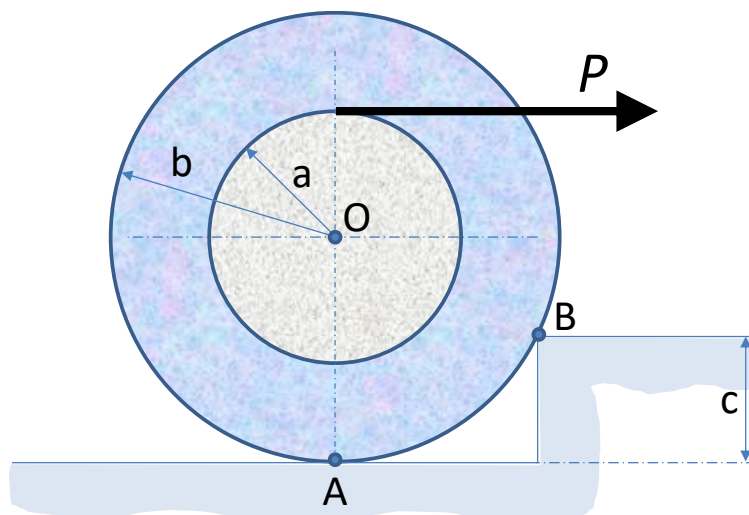


Figura 8 – Um carretel de 350 kg está na iminência do movimento sob a ação da força P .
Corresponde à atividade 1.

$$\begin{aligned}
\sum M_O = 0 & \quad -a \cdot P + b \cdot F_A + b \cdot F_B = 0 \\
\sum F_{x1} = 0 & \quad P + F_A + \frac{b-c}{b} F_B - \frac{d}{b} N_B = 0 \\
\sum F_{x2} = 0 & \quad N_A + \frac{b-c}{b} N_B + \frac{d}{b} F_B = W
\end{aligned}
\tag{Eq. 14}$$

A condição de iminência do movimento agrega as equações $F_A = \mu_A N_A$ e $F_B = \mu_B N_B$ ao nosso sistema. Isto reduz o número de incógnitas de 5 para 3. O sistema de equações lineares resultante, na sua forma matricial será:

$$\begin{bmatrix}
1 & \mu_A & \mu_B \cdot \left(1 - \frac{c}{b}\right) - \frac{d}{b} \\
0 & 1 & \frac{d}{b} \cdot \mu_B + \left(1 - \frac{c}{b}\right) \\
-a & b \cdot \mu_A & b \cdot \mu_B
\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P \\ N_A \\ N_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ W \\ 0 \end{bmatrix}
\tag{Eq. 15}$$

A solução final se obtém substituindo os dados do problema e resolvendo o sistema da Eq. 15.

$$\begin{bmatrix} P \\ N_A \\ N_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3,86 \\ -2,65 \\ 5,99 \end{bmatrix} \text{ KN}
\tag{Eq. 16}$$

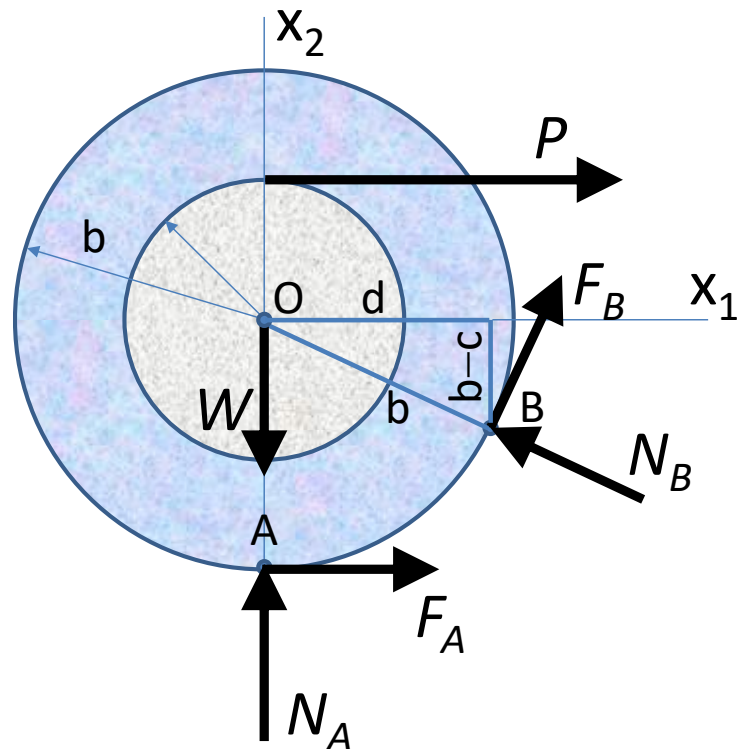


Figura 9 – Diagrama de corpo livre DCL do carretel da atividade 1.

Por último as forças de atrito serão $F_A = -1,06 \text{ KN}$ e $F_B = 2,99 \text{ KN}$.

FIM DA ATIVIDADE

Conclusões:

Esta aula foi dedicada às forças de atrito. Estas forças ocorrem no sentido tangencial às superfícies de contato de dois corpos pressionados um contra o outro. Experimentalmente verifica-se que as forças de atrito são proporcionais às forças normais entre as superfícies. As constantes de proporcionalidade são os coeficientes de atrito estático e dinâmico. Estes coeficientes são independentes das áreas em contato. O coeficiente de atrito estático é sempre superior ao dinâmico, como nossa própria intuição nos indica.

Os problemas de atrito podem envolver a determinação de várias incógnitas. Em alguns casos as equações de equilíbrio são suficientes para encontrar as incógnitas. É o caso do exemplo 1 da presente aula. As forças de atrito calculadas por equilíbrio são comparadas então com as determinadas pela relação $F = \mu N$. Como resultado desta comparação

poderemos saber se o corpo permanece em equilíbrio, está na iminência do movimento ou em movimento.

Uma outra classe de problemas envolve mais incógnitas do que equações de equilíbrio. Se o número de forças que atuam no corpo for igual a três, sabemos que o equilíbrio só será satisfeito se estas forças forem concorrentes. Assim, o triângulo de forças e as leis dos senos e cossenos permitem obter a solução. Um exemplo desta classe de problemas foi analisado no exemplo 2. Se o número de forças atuantes for maior do que três, será necessário utilizar as relações $F = \mu N$ para diminuir o número de incógnitas (ou aumentar o número de equações). O uso destas relações exige que se defina o tipo de atrito atuante no corpo, estático ou dinâmico. A atividade 1 tratou deste tipo de problemas.

Resumo

A metodologia para a solução dos problemas de atrito é a mesma utilizada em aulas anteriores e consiste em elaborar o diagrama de corpo livre e aplicar as equações de equilíbrio. As situações caracterizadas como iminência do movimento ou movimento propriamente dito adicionam, respectivamente, as equações $F_m = \mu_e N$ e $F_c = \mu_c N$ às de equilíbrio. Da mesma forma, trabalhando com a resultante da força normal e de atrito e não com as componentes nos problemas de blocos sobre superfícies ásperas, podemos obter relações adicionais entre as forças aplicadas e resolver os problemas hiperestáticos.

Referências Bibliográficas

- 1 BEER FP, Johnston ER Jr, Mazurek DF (2016), Vector Mechanics for Engineers, eleventh edition, McGraw-Hill Education, New York USA.
- 2 HIBBELER RC (2016), Statics and Dynamics, Fourteenth edition, Pearson Education Inc. New Jersey USA.