

Cálculo 2A

Departamento de Matemática Aplicada

Instituto de Matemática e Estatística

Universidade Federal Fluminense

Cristiane R. R. Argento-Freddy Hernández

Conteúdo

| | |
|---|----|
| Prefácio | ix |
| 1 Integral definida | 1 |
| 1 Conceitos básicos | 1 |
| 2 Definição formal | 3 |
| 3 Exercícios de revisão | 6 |
| 2 O Teorema Fundamental do Cálculo | 9 |
| 1 Introdução | 9 |
| 2 Exercícios de revisão | 14 |
| 3 Aplicações do Teorema Fundamental do Cálculo | 17 |
| 1 Exercícios de revisão | 26 |
| 4 Integração por substituição | 27 |
| 1 Introdução | 27 |
| 2 Integração por substituição | 27 |
| 3 O Método de Substituição para a Integral Definida | 32 |
| 4 Exercícios de revisão | 37 |
| 5 Integração por partes | 39 |

| | | |
|-----------|---|-----------|
| 1 | Conceitos básicos | 39 |
| 2 | Exemplos | 41 |
| 3 | Exercícios de revisão | 44 |
| 6 | Integrais de Funções Trigonômicas | 47 |
| 1 | Introdução | 47 |
| 2 | Exercícios de revisão | 52 |
| 7 | Substituição trigonométrica | 53 |
| 1 | Conceitos básicos | 53 |
| 2 | Exercícios de revisão | 60 |
| 8 | Integração por frações parciais | 61 |
| 1 | Integração de funções racionais próprias | 61 |
| 2 | Integração de funções racionais impróprias | 67 |
| 3 | Exercícios de revisão | 69 |
| 9 | Substituições diversas | 71 |
| 1 | Conceitos básicos | 71 |
| 2 | Exercícios de revisão | 77 |
| 10 | Volumes de sólidos de revolução usando o método dos discos | 79 |
| 1 | Rotação de região entre o gráfico de uma função e o eixo de revolução | 79 |
| 2 | Rotação de região entre dois gráficos | 86 |
| 3 | Exercícios de revisão | 90 |
| 11 | Volumes de sólidos de revolução por cascas cilíndricas | 91 |
| 1 | Rotação de região entre dois gráfico em torno de um eixo vertical | 92 |

| | | |
|-----------|---|------------|
| 2 | Exercícios de revisão | 98 |
| 12 | Comprimento de arco | 99 |
| 1 | Conceitos básicos | 99 |
| 2 | Exemplos | 101 |
| 3 | Exercícios de revisão | 104 |
| 13 | Integral imprópria em intervalos não limitados | 105 |
| 1 | Conceitos básicos | 105 |
| 2 | Exemplos | 107 |
| 3 | Exercícios de revisão | 110 |
| 14 | Integral imprópria de funções não limitadas | 111 |
| 1 | Conceitos básicos | 111 |
| 2 | Exemplos | 112 |
| 3 | Exercícios de revisão | 118 |
| 15 | Critério de comparação para integrais impróprias | 119 |
| 1 | Conceitos básicos | 119 |
| 2 | Exemplos | 122 |
| 3 | Exercícios de revisão | 125 |
| 16 | Introdução às equações diferenciais ordinárias | 127 |
| 1 | Equações Diferenciais Ordinárias | 127 |
| 2 | Exercícios de revisão | 133 |
| 17 | EDO de primeira ordem | 135 |
| 1 | Conceitos básicos | 135 |
| 2 | Exemplos | 137 |

| | | |
|-----------|--|------------|
| 3 | Exercícios de revisão | 140 |
| 18 | Teorema de Existência e Unicidade | 143 |
| 1 | Conceitos básicos | 143 |
| 2 | Exemplos | 145 |
| 3 | Exercícios de revisão | 149 |
| 19 | Equações Diferenciais Homôneas | 151 |
| 1 | Equações Homôneas na forma normal | 151 |
| 2 | Equações Homôneas na forma diferencial | 155 |
| 3 | Exercícios de revisão | 158 |
| 20 | Equações lineares de primeira ordem | 159 |
| 1 | Conceitos básicos | 159 |
| 2 | Exercícios de revisão | 166 |
| 21 | Equações exatas e equações redutíveis às exatas | 167 |
| 1 | Equações exatas | 167 |
| 2 | Exemplos | 169 |
| 3 | Equações redutíveis às exatas | 173 |
| 4 | Exercícios de revisão | 178 |
| 22 | Equações de Bernoulli, Ricatti e Clairaut | 179 |
| 1 | Equação de Bernoulli | 179 |
| 2 | Equação de Ricatti | 182 |
| 3 | Equação de Clairaut | 186 |
| 4 | Exercícios de revisão | 189 |
| 23 | Aplicações das EDOs de 1^a ordem | 191 |

| | | |
|-----------|---|------------|
| 1 | Trajетórias ortogonais | 191 |
| 2 | Modelagem Matemática | 196 |
| 3 | Exercícios de revisão | 201 |
| 24 | EDOs homogêneas lineares de ordem $n \geq 2$ | 203 |
| 1 | Conceitos básicos | 203 |
| 2 | Exemplos | 207 |
| 3 | Exercícios de revisão | 211 |
| 25 | Método da redução de ordem | 213 |
| 1 | Descrição do método | 213 |
| 2 | Exercícios de revisão | 217 |
| 26 | EDO lineares homogêneas de grau n com coeficientes constantes | 219 |
| 1 | Conceitos básicos | 219 |
| 2 | Grau $n=2$ | 219 |
| 3 | Grau $n \geq 3$ | 223 |
| 4 | Exemplos | 224 |
| 5 | Exercícios de revisão | 227 |
| 27 | Método dos coeficientes a determinar | 229 |
| 1 | Descrição do método dos coeficientes a determinar | 229 |
| 2 | Exemplos | 230 |
| 3 | Exercícios de revisão | 235 |
| 28 | Método da variação dos parâmetros | 237 |
| 1 | Conceitos básicos | 237 |
| 2 | Grau $n=2$ | 238 |

| | | |
|-----------|---|------------|
| 3 | Grau $n \geq 3$ | 240 |
| 4 | Exemplos | 243 |
| 5 | Exercícios de revisão | 246 |
| 29 | Equações de Euler-Cauchy | 249 |
| 1 | Equações de Euler-Cauchy de segunda ordem | 249 |
| 2 | Exemplos | 252 |
| 3 | Equações de Euler-Cauchy de ordem $n \geq 3$ | 254 |
| 4 | Exercícios de revisão | 258 |
| 30 | Aplicações das Equações de Segunda Ordem | 259 |
| 1 | Sistema Massa-Mola | 259 |
| 2 | Exercícios de revisão | 273 |
| | Bibliografia | 277 |

Prefácio

O presente texto foi elaborado para os alunos da disciplina Cálculo IIA, oferecida pelo Departamento de Matemática Aplicada da UFF, na modalidade à distância ou semipresencial. Como pré-requisito, o aluno precisa dominar o conteúdo da disciplina Cálculo IA: Cálculo Diferencial de uma Variável Real.

Niterói - RJ, outubro de 2011.

Cristiane R. R. Argento-Freddy Hernández
Departamento de Matemática Aplicada
IME-UFF

Aula 1

Integral definida

Há dois problemas fundamentais em cálculo: o primeiro é encontrar a inclinação de uma curva “qualquer” em um ponto dado e o segundo é determinar a área de uma região plana “qualquer”. Estes dois problemas, sem nenhuma relação aparente entre eles, correspondem aos conceitos de *derivada* e *integral*, respectivamente. Alguns matemáticos, como Barrow, Newton, Leibniz, observaram que estes dois conceitos matemáticos, e, portanto, os problemas da inclinação e da área, estão intimamente relacionados entre si. Esta célebre observação, conhecida como *Teorema Fundamental do Cálculo*, será objeto de estudo da próxima aula.

Nesta aula apresentaremos o conceito de *integral definida* como solução ao problema da área sob uma curva.

1 Conceitos básicos

Consideremos o problema de calcular a área entre o eixo x e o gráfico de uma função positiva e limitada f , definida no intervalo $[a, b]$ (Figura 1).

Uma ideia natural para calcular a área de uma região é aproximá-la por uma nova região cuja área possa ser facilmente calculada (por exemplo, uma união de retângulos). Fazendo isso, não obtemos a área desejada, mas sim uma aproximação dela. No entanto, esperamos que quanto melhor a

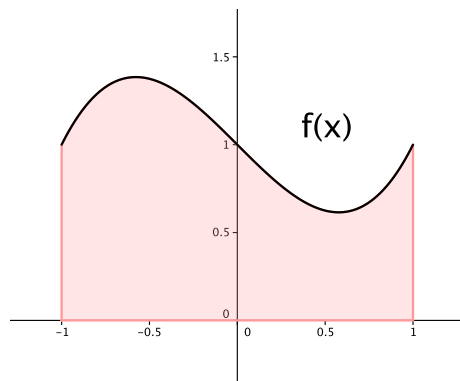


Figura 1: Região sob a função f

aproximação da região, melhor a aproximação da área.

As Figuras de 2 a 5 mostram aproximações por regiões maiores e menores que a região da Figura 1, compostas de 3, 7, 15 e 30 retângulos. As áreas destas regiões são chamadas de *Soma de Riemann Superior* (SS) e *Soma de Riemann Inferior* (SI), respectivamente.

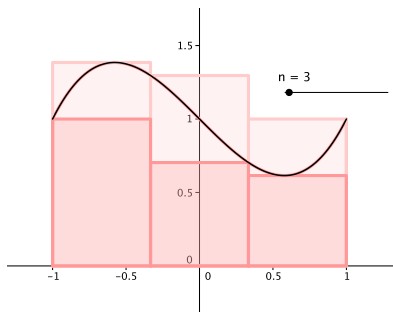


Figura 2: SS = 2.45, SI = 1.55

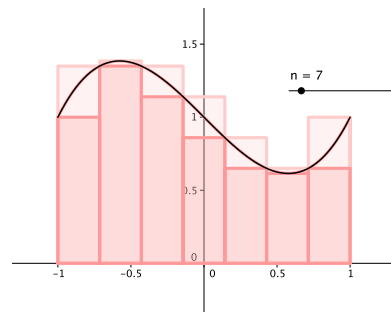


Figura 3: SS = 2.21, SI = 1.79

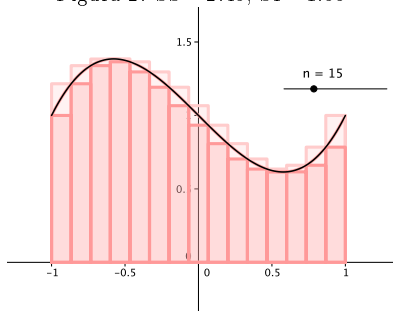


Figura 4: SS = 2.1, SI = 1.9

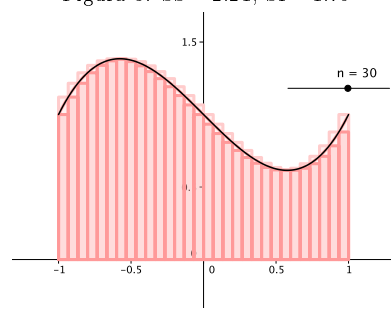


Figura 5: SS = 2.05, SI = 1.95

Dados os valores de SS e SI obtidos nestas aproximações, não é difícil intuir que o valor da área que procuramos é *exatamente* 2.

2 Definição formal

Vamos formalizar as ideias expostas na seção anterior para que possamos calcular a área entre o gráfico de uma função positiva f , definida no intervalo $[a, b]$, e o eixo x .

Começamos aproximando a região desejada por uma união finita de retângulos e depois calculamos a área desta união. Para isso, é preciso conhecer a base e a altura de cada um desses retângulos.

Consideremos a união de n retângulos cujas bases e alturas são dadas pelos intervalos $[t_0, t_1], [t_1, t_2], \dots, [t_{n-1}, b]$ e pelos valores $\{f(t_1^*), f(t_2^*), \dots, f(t_n^*)\}$, respectivamente, onde $\{a = t_0 < t_1^* < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n^* < t_n = b\}$.

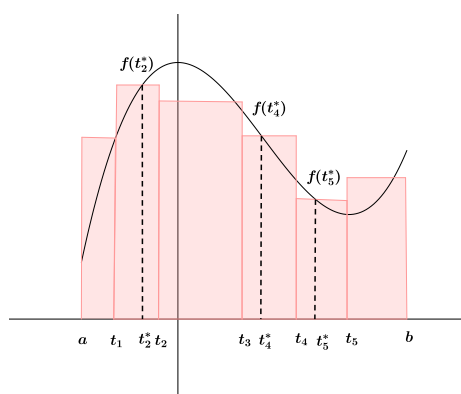


Figura 6: Exemplo com $n = 6$

Finalmente, associamos a partição pontilhada

$$\mathcal{P} = (\{t_0, t_1, \dots, t_{n-1}, t_n\}, \{t_1^*, \dots, t_{n-1}^*, t_n^*\})$$

a essa união de retângulos e definimos $||\mathcal{P}||$ como sendo o maior dos comprimentos dos intervalos $[t_i, t_{i+1}]$.

Agora estamos prontos para dar uma definição formal de área.

Definição 1

A área entre o gráfico de uma função positiva e limitada $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e o

eixo x é definida como

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(t_i^*)(t_i - t_{i-1}), \quad (1)$$

quando o limite acima, que é calculado sobre todas as possíveis partições pontilhadas, existir. Nesse caso, diremos que f é *Riemann integrável* no intervalo $[a, b]$.

Observação 1

- Note que a soma que aparece no limite (1) faz sentido mesmo que a função f não seja positiva. Caso o limite exista, seguiremos chamando este limite de integral de Riemann, embora a interpretação agora seja a de área com sinal. Isto é, a área acima do eixo x conta como positiva, e aquela que fica embaixo do eixo x conta como negativa.
- O conceito de integral será estendido para funções definidas em intervalos não limitados e para funções não limitadas (integrais impróprias) nas Aulas 13 e 14, respectivamente.

Uma vez dada a definição de função integrável, surge uma pergunta natural. Quais funções limitadas são integráveis? Lamentavelmente, nem todas elas são (ver exercício 2). No entanto, o seguinte teorema fornece um critério para determinar quando uma função limitada é integrável.

Teorema 1

Uma função limitada $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ com uma quantidade finita de descontinuidades é Riemann integrável. Em particular, toda função contínua é integrável.

Vamos agora calcular uma integral explicitamente.

Exemplo 1

Calcule $\int_0^1 x^2 dx$.

Solução

Pelo Teorema 1, sabemos que a função $f(x) = x^2$ é integrável no intervalo $[0, 1]$. Logo, para calcular o valor da integral, é suficiente considerar uma sequência de partições $\{\mathcal{P}_n\}_{n \geq 1}$, tal que $\|\mathcal{P}_n\| \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Por exemplo,

$$\mathcal{P}_n = \left(\left\{ 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1 \right\}, \left\{ \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1 \right\} \right).$$

Neste caso $\|\mathcal{P}_n\| = \frac{1}{n}$. A soma que aparece na expressão (1) (soma de Riemann) associada a \mathcal{P}_n é: $\sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n}\right)^2 \left(\frac{1}{n}\right)$. Finalmente, usando a fórmula da soma dos primeiros n quadrados,

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

obtemos

$$\int_0^1 f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{1}{3}.$$

□

Como você deve ter percebido, mesmo para o caso de funções muito simples, é bastante dispendioso o cálculo da integral usando a mera definição. O teorema fundamental do cálculo, que estudaremos na próxima aula, fornece outra maneira de calcular uma integral.

Para concluir esta aula, vamos enunciar algumas propriedades da integral definida.

Sejam $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funções limitadas e integráveis. Então,

$$1. \int_a^b f(x) + g(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx .$$

$$2. \int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx \text{ para todo } k \in \mathbb{R}.$$

3. Se $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$, então $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$.
4. $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$ para toda constante c tal que $a < c < b$.
5. Dados $m, M \in \mathbb{R}$, tais que $m \leq f(x) \leq M$ para todo $x \in [a, b]$, temos $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$. Em particular, $\int_a^a f(x) dx = 0$.

3 Exercícios de revisão

1. Calcule $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx$.

Dica: Lembre que a integral é a área sob a curva.

2. Prove que a função f , definida no intervalo $[0, 1]$ como

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \text{ racional,} \\ 1 & x \text{ irracional,} \end{cases}$$

NÃO é Riemann integrável.

Dica: Considere partições pontilhadas tais que $\{t_i^*\}_{i=1}^n$ sejam todos racionais ou todos irracionais.

3. Verifique que $\int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}$, usando os mesmos argumentos do Exemplo 1.

Dica: Use a seguinte identidade:

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2.$$

4. Ache o valor $\int_0^3 [5f(x) + 4g(x)] dx$ supondo que $\int_{-2}^3 f(x) dx = 7$,

$$\int_{-2}^0 f(x) dx = 15 \text{ e } \int_0^3 g(x) dx = 10.$$

5. Verifique as seguintes desigualdades sem calcular as integrais.

$$(a) \quad 2\sqrt{3} \leq \int_{-1}^1 \sqrt{3+x^2} \, dx \leq 4 ;$$

$$(b) \quad \frac{\pi}{24} \leq \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen}(x) \, dx \leq \frac{\sqrt{2}\pi}{24} .$$

Aula 2

O Teorema Fundamental do Cálculo

1 Introdução

O *Teorema Fundamental do Cálculo (TFC)* estabelece uma conexão entre os conceitos de derivada e integral. Essa íntima relação entre o *Cálculo Diferencial* e o *Cálculo Integral* simplifica muito a solução de problemas em que o conceito de integral definida é usado. Esse teorema é o grande resultado do Cálculo e foi descoberto por Isaac Barrow (1630-1677), que foi o mentor de Newton, na Universidade de Cambridge. Barrow percebeu que a derivada e a integral são problemas inversos, porém, foram Newton e Leibniz que aplicaram as ideias e desenvolveram o Cálculo, utilizando-o na resolução de diferentes problemas.

Antes de abordarmos o Teorema, precisamos desenvolver algumas ideias preliminares. Começemos definindo novas funções a partir de antigas.

Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua em $[a, b]$, definimos uma nova função $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, como a função que a cada x em $[a, b]$ associa o número real $g(x) = \int_a^x f(t) dt$.

Quando $f \geq 0$ interpretamos $g(x)$ como a função área, já que, nesse caso,

$g(x)$ representa a área da região entre o gráfico da $f(t)$ e o eixo t , para $t \in [a, x]$, conforme a Figura 1 a seguir. Observe que $g(a) = \int_a^a f(t) dt = 0$.

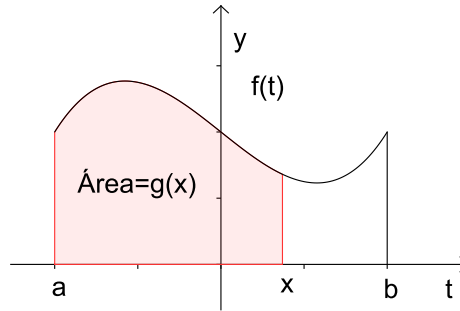


Figura 1: Área da região sob a função $f(t)$, $t \in [a, x]$

Exemplo 1

Calcule $g(0)$, $g(1)$, $g(3/2)$, $g(2)$ e $g(3)$, em que $g(x) = \int_0^x f(t) dt$ e

$$f(t) = \begin{cases} t^2, & \text{se } 0 \leq t \leq 1; \\ 1, & \text{se } 1 < t < 2; \\ 3 - t, & \text{se } 2 \leq t \leq 3. \end{cases}$$

Solução

Temos $g(0) = \int_0^0 f(t) dt = 0$; $g(1) = \int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 t^2 dt = 1/3$, pelo exemplo 1 visto na Aula 1. Observando o gráfico da Figura 2 a seguir, temos que

$$\begin{aligned} g(3/2) &= \int_0^{3/2} f(t) dt = \int_0^1 f(t) dt + \int_1^{3/2} f(t) dt \\ &= \int_0^1 t^2 dt + \int_1^{3/2} 1 dt = 1/3 + 1/2 = 5/6, \end{aligned}$$

onde a última integral definida representa a área do retângulo de altura 1 e

base $1/2$;

$$g(2) = \int_0^2 f(t) dt = \int_0^1 f(t) dt + \int_1^2 f(t) dt = \int_0^1 t^2 dt + \int_1^2 1 dt = 1/3 + 1 = 4/3,$$

em que a última integral definida representa a área do quadrado de lado 1;

$$g(3) = \int_0^2 f(t) dt + \int_2^3 f(t) dt = 4/3 + \int_2^3 3 - t dt = 4/3 + 1/2 = 11/6,$$

onde a última integral definida representa a área do triângulo retângulo de altura 1 e base 1. \square

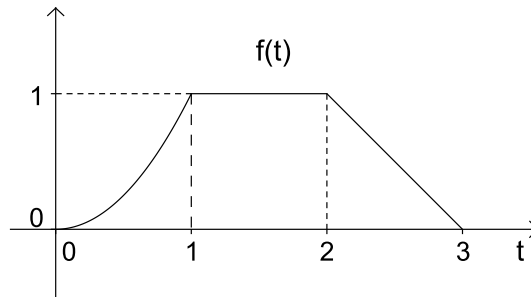


Figura 2: Gráfico da função $f(t)$ do exemplo 1.

Exemplo 2

Mostre que $\frac{d}{dx} \int_0^x t dt = x, \forall x \geq 0$

Solução

Interpretando como a área do triângulo entre o gráfico de $y = t$ e o eixo

t , para $t \in [0, x]$, temos que $\int_0^x t dt = \frac{x \cdot x}{2} = \frac{x^2}{2}$, já que a base e a altura são

iguais a x . Logo, $\frac{d}{dx} \int_0^x t dt = \frac{d}{dx} \left(\frac{x^2}{2} \right) = x. \square$

Lembremos que uma *primitiva ou antiderivada* de uma função f , num intervalo I , é qualquer função F definida em I , cuja derivada coincide com a f , isto é, $F'(x) = f(x), \forall x \in I$. Além disso, como consequência do Teorema

do Valor Médio, segue que duas primitivas quaisquer, digamos F e G de uma f , num intervalo I , diferem por uma constante, isto é, $F(x) = G(x) + C$, $\forall x \in I$, onde C é uma constante real. Portanto, o Exemplo 2 revela que nesse caso $\int_0^x t dt$ é uma primitiva para o integrando $f(x) = x$. O TFC nos mostrará que esse resultado é geral, ele valerá sempre que o integrando for uma função contínua. Antes, porém, vejamos um argumento intuitivo que aponta para a veracidade desse resultado, ao menos para $f \geq 0$.

Nesse caso, $g(x)$ é a área pintada da Figura 1 e sabemos que

$$g'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} .$$

Assim, supondo inicialmente $h > 0$, temos

$$\begin{aligned} g(x+h) - g(x) &= \int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \\ &= \int_a^x f(t) dt + \int_x^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \\ &= \int_x^{x+h} f(t) dt . \end{aligned}$$

Nesse caso, a última integral representa a área da faixa entre o gráfico da f e o eixo t , para $t \in [x, x+h]$. Note que, na última igualdade, usamos a propriedade 4 das integrais definidas, vista na Aula 1.

Como estamos interessados no limite para $h \rightarrow 0$, supomos a faixa bem fininha, isto é, $h \approx 0$, portanto, a área da faixa é aproximadamente a área do retângulo de base h e altura $f(x)$, conforme a Figura 3. Logo,

$$g'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \approx \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) \cdot h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} f(x) = f(x) .$$

Analogamente temos o mesmo resultado para $h < 0$.

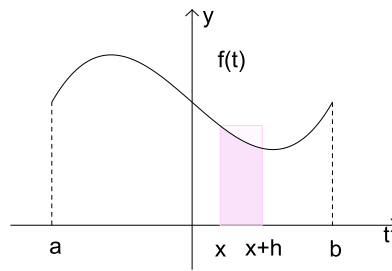


Figura 3: A área do retângulo aproxima a área da faixa.

Agora, podemos perceber que o resultado é razoável, o que torna natural o conteúdo do TFC, que se divide em duas partes, sendo que a segunda é consequência da primeira.

Teorema Fundamental do Cálculo

Se a função f for contínua em $[a, b]$, então

- i) a função $g(x) = \int_a^x f(t) dt$ é contínua em $[a, b]$, derivável em (a, b) e $g'(x) = f(x), \forall x \in (a, b)$.
- ii) $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$, onde F é qualquer primitiva da função f .

Observação 1

- A primeira parte do TFC nos diz que podemos construir primitivas para uma função contínua usando integração. Além disso, a demonstração feita vale em a e b como derivadas laterais e podemos escrever $g'(x) = f(x), \forall x \in [a, b]$, entendendo que $g'(a)$ é a derivada à direita da g em $x = a$ e $g'(b)$ é a derivada à esquerda.
- A segunda parte do TFC facilita muito o cálculo de integrais definidas, se conhecermos uma primitiva F para o integrando. Nesse caso, calculamos a variação total dessa função, isto é, $F(b) - F(a)$. Essa variação total recebe uma notação bastante útil, a saber $F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b$.

• A partir da Aula 4 até a Aula 9 vamos desenvolver técnicas que nos permitem calcular primitivas de algumas funções. Porém, essas técnicas têm alcance limitado, na verdade, para a maioria das funções integráveis, não podemos determinar uma primitiva. Nesse caso, o uso das somas de Riemann é necessário e as mesmas podem ser utilizadas com algum método numérico para aproximar o valor da integral definida.

• A primeira parte do TFC nos diz que $\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$, ou seja que a derivada desfaz o que é realizado pela integral e obtemos de volta a função f original. Aplicando a segunda parte do TFC à derivada de f temos $\int_a^x \frac{d}{dt} f(t) dt = f(x) - f(a)$. Assim, a integral desfaz o que é realizado pela derivada e obtemos de volta a função f , a menos da constante $f(a)$. Neste sentido, entendemos que a derivação e a integração são processos inversos.

• Nesse ponto, justificamos o uso da nomenclatura integral indefinida para o conjunto das primitivas de uma função. À primeira vista esse uso parece inadequado, por se tratar de uma ideia que não envolve o mesmo princípio da integral definida. A estreita ligação que envolve os dois conceitos só fica evidente com o TFC.

2 Exercícios de revisão

1. Calcule as integrais indefinidas:

$$\begin{array}{lll} \text{a.} & \int_1^4 \frac{1}{x} dx; & \text{b.} & \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx; & \text{c.} & \int_{-1}^2 3x^4 + 1 dx; \\ \text{d.} & \int_0^\pi \text{sen } x dx; & \text{e.} & \int_1^4 \frac{-1}{\sqrt{t}} dt; & \text{f.} & \int_0^1 e^s ds. \end{array}$$

2. Esboce a região R compreendida entre os gráficos dados e calcule sua área.

- $y = x^4$ e o eixo Ox para $x \in [0, 2]$;
- $y = \cos x$ e o eixo Ox para $x \in [0, \pi/2]$;
- Reta $y = 1$ e $y = \cos x$ para $x \in [0, \pi/2]$.

3. Derive as funções abaixo em relação a x .

a. $\int_1^x \frac{2}{t} dt$; **b.** $\int_0^x e^{s^2} ds$; **c.** $\int_x^1 \frac{u^2}{u^4 + 2u^2 + 3} du$.

Aula 3

Aplicações do Teorema Fundamental do Cálculo

Iniciamos a aula relembrando algumas das primitivas imediatas que foram vistas no curso de Cálculo Diferencial.

$$\begin{aligned} \int x^a dx &= \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad \forall a \in \mathbb{R}, a \neq -1, & \int e^x dx &= e^x + C, \\ \int \cos x dx &= \operatorname{sen} x + C, & \int \operatorname{sen} x dx &= -\cos x + C, \\ \int \sec^2 x dx &= \operatorname{tg} x + C, & \int \frac{1}{x} dx &= \ln|x| + C, \\ \int \frac{1}{1+x^2} dx &= \operatorname{arctg} x + C, & \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \operatorname{arcsen} x + C. \end{aligned}$$

Revisemos ainda, duas propriedades da integral indefinida, a saber:

- $\int cf(x) dx = c \int f(x) dx$, para c constante real ;
- $\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$.

Combinando as primitivas acima e as propriedades formamos novas integrais indefinidas. Observe, por exemplo:

$$\int \sec^2 x + 3x^4 dx = \operatorname{tg} x + \frac{3}{5}x^5 + C.$$

Observe, através dos exercícios a seguir como o cálculo de áreas ficou bem menos trabalhoso com a aplicação do Teorema Fundamental do Cálculo, estudado na Aula 2.

Exemplo 1

Calcule a área da região R entre o gráfico de $f(x) = \sqrt{x}$ e o eixo x para $x \in [1, 2]$. Esboce a região.

Solução

Observe o esboço da região R na Figura 1. Pelo item ii) do TFC segue que a área da região R é dada por

$$\int_1^2 \sqrt{x} \, dx = \int_1^2 x^{\frac{1}{2}} \, dx = \frac{x^{3/2}}{3/2} \Big|_1^2 = \frac{2}{3} [2^{3/2} - 1^{3/2}] = \frac{2}{3} [2\sqrt{2} - 1] \text{ unidades de área.}$$

□

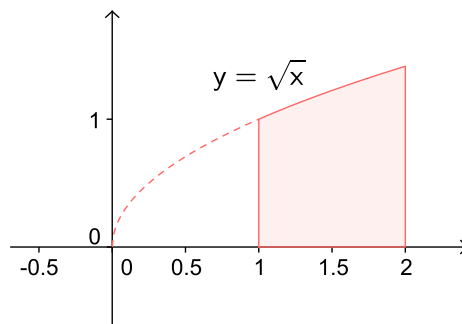


Figura 1: Esboço da região R do exemplo 1

Observação 1

• Se $f(x) \leq 0, \forall x \in [a, b]$, então a área da região R entre o gráfico da função f e o eixo x em $[a, b]$ é dada por $A(R) = A(R^*) = \int_a^b -f(x) \, dx = - \int_a^b f(x) \, dx$, veja a Figura 2 a seguir.

- Se a função f trocar de sinal em $[a, b]$ usamos suas raízes e dividimos $[a, b]$ em subintervalos nos quais a função f não troca de sinal. Assim, escrevemos a área da região R entre o gráfico de f e o intervalo $[a, b]$, como uma soma de integrais nesses subintervalos, onde o integrando será f ou $-f$, dependendo se no subintervalo correspondente à função f for não negativa ou não positiva, respectivamente. Observe a Figura 3 a seguir.

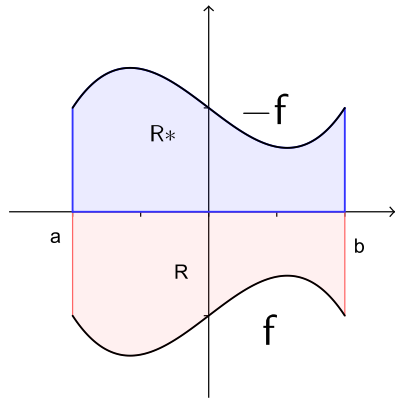


Figura 2: $A(R) = A(R^*) = -\int_a^b f(x) dx$

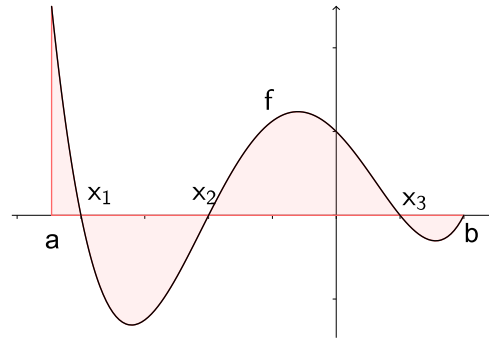


Figura 3: $A(R) = \int_a^{x_1} f(x) dx - \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx + \int_{x_2}^{x_3} f(x) dx - \int_{x_3}^b f(x) dx$

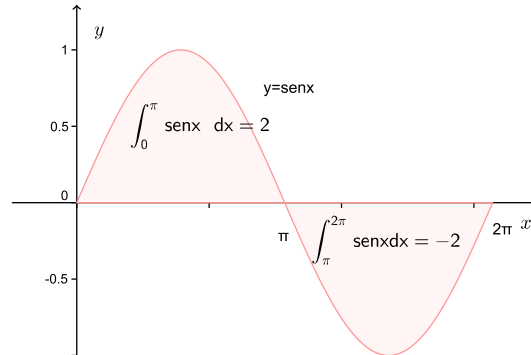
Exemplo 2

A Figura 4 mostra o gráfico de $y = \sin x$ entre $x = 0$ e $x = 2\pi$.

- Calcule $\int_0^{2\pi} \sin x dx$;
- Calcule a área entre o gráfico de $y = \sin x$ e o eixo x em $[0, 2\pi]$.
- Compare os dois itens anteriores.

Solução

- Pelo TFC, $\int_0^{2\pi} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{2\pi} = -\cos 2\pi + \cos 0 = -1 + 1 = 0$.

Figura 4: Esboço da região R do exemplo 2

- b) Primeiro, note que $\text{sen } x$ é negativo em $[\pi, 2\pi]$, então para calcularmos a área da região correspondente a esse intervalo, vamos considerar $y = -\text{sen } x$ em $[\pi, 2\pi]$, que é não negativa e cuja área entre o gráfico e o eixo x coincide com a área que queremos determinar. Assim, a área da região dada é igual a

$$\int_0^{\pi} \text{sen } x \, dx + \int_{\pi}^{2\pi} -\text{sen } x \, dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} - (-\cos x) \Big|_{\pi}^{2\pi} =$$

$$-\cos \pi + \cos 0 + \cos 2\pi - \cos \pi = -(-1) + 1 + 1 - (-1) = 4 \text{ unidades de área.}$$

- c) No item a), temos um cancelamento das áreas, pois $\int_{\pi}^{2\pi} \text{sen } x \, dx$ é menos

$$\text{a área da região que está abaixo do eixo } x \text{ e } \int_0^{2\pi} \text{sen } x \, dx = \int_0^{\pi} \text{sen } x \, dx$$

$$+ \int_{\pi}^{2\pi} \text{sen } x \, dx. \text{ Assim, devido à simetria, o resultado foi zero.}$$

No item b), dividimos o cálculo da área em duas partes, onde a função é positiva e onde é negativa. Para termos a área, refletimos o gráfico da parte com imagem negativa em torno do eixo x e assim a área desejada foi calculada pela $\int_0^{\pi} \text{sen } x \, dx - \int_{\pi}^{2\pi} \text{sen } x \, dx \neq \int_0^{2\pi} \text{sen } x \, dx$.

□

Exemplo 3

Determine a área da região fechada da Figura 5 entre o gráfico de $f(x) = x^3 - x^2 - 6x$ e o eixo x .

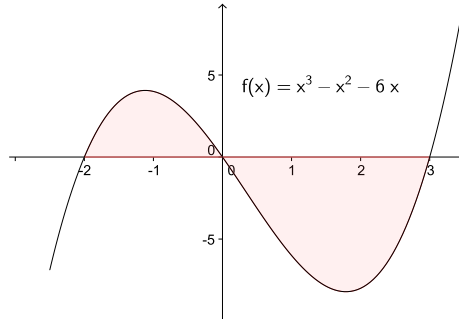


Figura 5: Região fechada entre o gráfico de $f(x) = x^3 - x^2 - 6x$ e o eixo x .

Solução

Para começar, precisamos determinar os zeros da função polinomial dada, então vamos resolver a equação $f(x) = x^3 - x^2 - 6x = 0$. Assim,

$$f(x) = x^3 - x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow x(x-3)(x+2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 3 \text{ ou } x = -2.$$

Observando o sinal de f pela Figura 5, temos

$$\begin{aligned} A(R) &= \int_{-2}^0 x^3 - x^2 - 6x \, dx - \int_0^3 x^3 - x^2 - 6x \, dx \\ &= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 6\frac{x^2}{2} \right] \Big|_{-2}^0 - \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 6\frac{x^2}{2} \right] \Big|_0^3 \\ &= -4 - 8/3 + 12 - 81/4 + 27/3 + 27 = 167/12. \end{aligned}$$

□

Exemplo 4

Calcule a área da região R entre os gráficos de $y = x^2$ e $y = x$. Esboce a região.

Solução

Observe que $x^2 = x \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 1$. A área de R é a diferença entre a área (do triângulo) entre $y = x$ e do eixo x e a área entre $y = x^2$ e o eixo x , para $x \in [0, 1]$. Portanto,

$$A(R) = \int_0^1 x \, dx - \int_0^1 x^2 \, dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 - \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = 1/2 - 1/3 = 1/6.$$

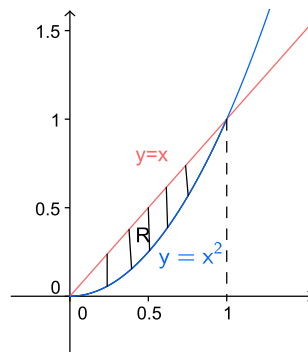


Figura 6: Esboço da região R do exemplo 4

□

No caso geral em que temos que calcular a área entre dois gráficos de funções f e g em $[a, b]$, procedemos da seguinte forma:

- Determinamos as interseções entre os dois gráficos, isto é resolvemos a equação $f(x) = g(x)$ em $[a, b]$.
- Esboçamos os gráficos, sempre que possível, para conhecermos a região, cuja área estamos calculando.
- Calculamos separadamente as integrais definidas de $f(x) - g(x)$ nos subintervalos determinados pelas interseções e por a e b . Tomamos o módulo de cada integral definida e somamos os resultados. O que equivale ao cálculo da $\int_a^b |f(x) - g(x)| \, dx$, ou seja, em cada intervalo o integrando é a diferença entre a "função maior" e a "função menor".

Exemplo 5

Calcule a área da região R entre os gráficos de $y = \sin x$ e $y = \sin 2x$, para $x \in [0, \pi]$. Esboce.

Solução

Primeiro calculamos as interseções entre os dois gráficos, observadas na Figura 7 a seguir. Então, em $[0, \pi]$, temos $\sin x = \sin 2x \Leftrightarrow \sin x = 2 \sin x \cos x \Leftrightarrow$

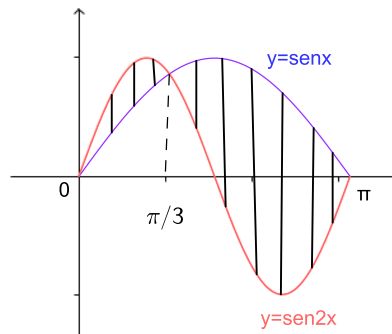


Figura 7: Usamos duas integrais definidas para o cálculo da área da região hachurada.

$\sin x = 0$ ou $\cos x = 1/2 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \pi$ ou $x = \pi/3$. Portanto,

$$\begin{aligned} A(R) &= \int_0^{\pi/3} \sin 2x - \sin x \, dx + \int_{\pi/3}^{\pi} \sin x - \sin 2x \, dx \\ &= \left[-\frac{\cos 2x}{2} + \cos x \right]_0^{\pi/3} + \left[-\cos x + \frac{\cos 2x}{2} \right]_{\pi/3}^{\pi} \\ &= 1/4 + 1/2 + 1/2 - 1 + 1 + 1/2 + 1/2 + 1/4 = 5/2. \end{aligned}$$

□

Agora, vamos derivar funções dadas usando integrais definidas. Como a derivada desfaz o que a integral produziu, não precisaremos realizar a integração.

Exemplo 6

Derive as funções : a) $\int_1^x \sin t^2 \, dt$, b) $\int_x^2 e^{t^2} \, dt$.

Solução

a) Pelo TFC-i), $\frac{d}{dx} \int_1^x \operatorname{sen} t^2 dt = \operatorname{sen} x^2$.

b) Pelo TFC-i), $\frac{d}{dx} \int_x^2 e^{t^2} dt = \frac{d}{dx} \left[- \int_2^x e^{t^2} dt \right] = -e^{x^2}$. \square

Exemplo 7

Suponha $\int_1^x f(t) dt = x^2 + 3x - 4$. Determine $f(x)$.

Solução

Pelo TFC-i), temos

$$f(x) = \frac{d}{dx} \left[\int_1^x f(t) dt \right] = \frac{d}{dx} [x^2 + 3x - 4] = 2x + 3.$$

\square

Note que se $F(x) = \int_a^x f(t) dt$, então, $\int_a^{u(x)} f(t) dt = F(u(x))$, isto é, temos uma função composta. Portanto, pela Regra da Cadeia e pelo TFC, obtemos

$$\frac{d}{dx} \int_a^{u(x)} f(t) dt = \frac{d}{dx} F(u(x)) = F'(u(x))u'(x) = f(u(x))u'(x),$$

em que supomos que a função f seja contínua e a u derivável. Analogamente, se v for derivável,

$$\frac{d}{dx} \int_{v(x)}^a f(t) dt = -\frac{d}{dx} \int_a^{v(x)} f(t) dt = -f(v(x))v'(x).$$

Mas,

$$\int_{v(x)}^{u(x)} f(t) dt = \int_{v(x)}^a f(t) dt + \int_a^{u(x)} f(t) dt,$$

onde a é qualquer número real no domínio da função f . Portanto, obtivemos a conhecida *Fórmula de Leibniz*:

$$\frac{d}{dx} \int_{v(x)}^{u(x)} f(t) dt = f(u(x))u'(x) - f(v(x))v'(x) \quad (1)$$

Exemplo 8

Calcule $\frac{d}{dx} \int_{-x}^{x^2} e^{t^3} dt$

Solução

Aplicando a fórmula de Leibniz (1), temos que

$$\frac{d}{dx} \int_{-x}^{x^2} e^{t^3} dt = e^{(x^2)^3} 2x - e^{(-x)^3} (-1) = 2xe^{x^6} + e^{-x^3}.$$

□

Exemplo 9 Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_{-x}^x \cos t^5 dt}{x}$.

Solução

Temos uma indeterminação do tipo $[0/0]$, portanto, aplicando a Regra de L'Hôpital e a Fórmula de Leibniz (1) para derivar o numerador, obtemos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_{-x}^x \cos t^5 dt}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x^5 - \cos(-x)^5(-1)}{1} = \lim_{x \rightarrow 0} \cos x^5 + \cos x^5 = 2.$$

Neste caso, usamos acima o fato de que o cosseno é uma função par.

□

1 Exercícios de revisão

1. Calcule as integrais indefinidas e dê uma interpretação geométrica.

$$\begin{array}{lll} \text{a.} & \int_0^4 e^x dx; & \text{b.} & \int_0^2 \frac{1}{x^2 + 1} dx; & \text{c.} & \int_{-\frac{1}{5}}^2 4x^2 + 1 dx; \\ \text{d.} & \int_{\pi/2}^{\pi} \text{sen } x dx; & \text{e.} & \int_0^4 \sqrt{t} dt; & \text{f.} & \int_1^5 \frac{1}{s} ds. \end{array}$$

2. Esboce a região R compreendida entre os gráficos dados e calcule sua área.

- a. $y = x^3 + 2x^2 - 3x$ e o eixo x ;
- b. $y = x^4$ e a reta $y = x$ para $x \in [0, 2]$;
- c. $y = x - 2$ e $x = y^2$;
- d. $y = -\text{sen } x$ e $y = \cos x$ para $x \in [0, 2\pi]$.

3. Derive as funções abaixo em relação a x .

$$\begin{array}{ll} \text{a.} & f(x) = \int_1^x \cos t^2 dt; & \text{b.} & f(x) = \int_0^{-x^2} e^{s^2} ds; \\ \text{c.} & x \int_{-x^3}^{2x} \cos \sqrt[3]{t} dt. \end{array}$$

4. Calcule os limites.

$$\begin{array}{ll} \text{a.} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_{-x}^x \text{sen } t^2 dt}{x^3}; & \text{b.} & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\int_x^{x^2} e^{t^2} dt}{x - 1}. \end{array}$$

Aula 4

Integração por substituição

1 Introdução

A partir desta Aula até a Aula 9 vamos desenvolver as principais *técnicas de integração*. A ideia é simplificar o cálculo das integrais, reduzindo-as a integrais mais simples, como, por exemplo, as que foram vistas nas Aulas 2 e 3. Você já deve ter percebido que o problema de determinar primitivas de uma função é mais complexo do que o cálculo de derivadas. No *Cálculo Integral* precisamos reconstruir a função a partir do conhecimento de sua derivada e, para tal, não dispomos de fórmulas tão gerais quanto àquelas vistas no *Cálculo Diferencial*.

2 Integração por substituição

O método de integração que veremos nesta aula é chamado de *Método de Substituição ou Mudança de Variável*. Esse método é baseado em uma regra de derivação bem conhecida, a chamada *Regra da Cadeia*. Suponha que temos uma integral do tipo

$$\int f(g(x))g'(x) dx, \tag{1}$$

em que a função g possui derivada contínua em algum intervalo e a função f é contínua num intervalo contendo a imagem de g . Suponha ainda, que conhecemos uma primitiva F para a função f , então pela Regra da Cadeia, usada inversamente, e pela definição de integral indefinida, obtemos

$$\begin{aligned}\int f(g(x))g'(x) dx &= \int F'(g(x))g'(x) dx \\ &= \int \frac{d}{dx}F(g(x)) dx = F(g(x)) + C.\end{aligned}$$

Assim, acabamos de calcular a integral indefinida (1).

Na prática, fazemos essas contas usando um método mecânico que descreveremos a seguir. Trocamos a variável x por u , fazendo $u = g(x)$. Então, usando a notação de diferencial, $du = g'(x)dx$, obtemos

$$\int f(g(x))g'(x) dx = \int f(u)du = F(u) + C.$$

Por fim, retornamos à variável x , substituindo $u = g(x)$ na igualdade descrita e obtemos:

$$\int f(g(x))g'(x) dx = \int f(u)du = F(u) + C = F(g(x)) + C,$$

tal como queríamos.

Precisamos enfatizar que para aplicar este método, precisamos identificar a mudança de variável que vai nos levar a uma integral mais simples na nova variável. Como veremos nos exemplos, se a variável original for x , frequentemente teremos que ajeitar o dx em função do du e, após as contas, sempre retornaremos à variável original. O retorno à variável x é fundamental no cálculo da integral indefinida, já que, nesse caso, o objetivo é encontrar todas as funções primitivas do integrando original, em função de x .

Mais adiante, com a introdução de outras técnicas de integração, será muito comum aplicarmos mais de uma técnica no mesmo problema e o

Método de Substituição vai ser bastante utilizado.

Calcule as integrais indefinidas nos exemplos a seguir.

Exemplo 1

$$\int 4\sqrt{1+4x} \, dx .$$

Solução

Seja $u = 1 + 4x$. Então, $du = 4dx$ e o Método de Substituição nos dá

$$\int 4\sqrt{1+4x} \, dx = \int \sqrt{u} \, du = \frac{u^{3/2}}{3/2} + C = \frac{2}{3}(1+4x)^{3/2} + C .$$

□

Exemplo 2

$$\int u^2 e^{u^3} \, du .$$

Solução

Seja $v = u^3$, então, $dv = 3u^2 du$ e a integral dada se escreve como

$$\int u^2 e^{u^3} \, du = \int \frac{1}{3} e^v \, dv = \frac{1}{3} e^v + C = \frac{e^{u^3}}{3} + C .$$

□

Exemplo 3

$$\int t(1+t^2)^{100} \, dt .$$

Solução

Seja $u = 1 + t^2$. Então, $du = 2tdt \Rightarrow tdt = \frac{du}{2}$. Portanto,

$$\int t(1+t^2)^{100} \, dt = \int u^{100} \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \int u^{100} \, du = \frac{1}{2} \frac{u^{101}}{101} + C = \frac{(1+t^2)^{101}}{202} + C .$$

□

Exemplo 4

$$\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx .$$

Solução

Seja $u = \sqrt{x}$. Então, $du = \frac{dx}{2\sqrt{x}} \Rightarrow 2du = \frac{dx}{\sqrt{x}}$. Logo,

$$\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = \int \cos u \, 2du = 2 \int \cos u \, du = 2 \operatorname{sen} u + C = 2 \operatorname{sen} \sqrt{x} + C .$$

□

Exemplo 5

$$\int \operatorname{tg} x \, dx .$$

Solução

Primeiro vamos reescrever a tangente como $\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$. Substituindo $u = \cos x$ temos $du = -\operatorname{sen} x \, dx \Rightarrow -du = \operatorname{sen} x \, dx$. Logo,

$$\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} dx = - \int \frac{du}{u} = -\ln |u| + C = -\ln |\cos x| + C = \ln |\sec x| + C .$$

□

Exemplo 6

$$\int \frac{x}{x^2 + 6} dx .$$

Solução

Seja $u = x^2 + 6$, então, $du = 2x \, dx$ e a integral dada se escreve como

$$\int \frac{x}{x^2 + 6} dx = \int \frac{1}{2u} du = \frac{1}{2} \ln |u| + C = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 6) + C .$$

□

Exemplo 7

$$\int \frac{1}{3x^2 + 1} dx .$$

Solução

A ideia é reescrever a integral para chegarmos à função arcotangente. Assim, considere $u = \sqrt{3}x$, então, $du = \sqrt{3}dx$ e a integral dada se escreve como

$$\int \frac{1}{(\sqrt{3}x)^2 + 1} dx = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{1}{u^2 + 1} du = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} u + C = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}(\sqrt{3}x) + C .$$

□

Exemplo 8

$$\int \frac{1}{x^2 + 2x + 5} dx .$$

Solução

A ideia é a mesma do exemplo anterior, vamos reescrever a integral para chegarmos à função arcotangente. Assim, primeiro vamos completar o quadrado do denominador e depois mudar a variável. Como

$$x^2 + 2x + 5 = (x + 1)^2 + 4 = 4 \left[\left(\frac{x + 1}{2} \right)^2 + 1 \right] ,$$

fazendo $u = \frac{x + 1}{2}$, temos $du = \frac{1}{2}dx$ e, portanto,

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2 + 2x + 5} dx &= \frac{1}{4} \int \frac{1}{\left(\frac{x + 1}{2} \right)^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{u^2 + 1} du = \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{arctg} u + C = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{x + 1}{2} \right) + C . \end{aligned}$$

□

Exemplo 9

$$\int \sec x dx .$$

Solução

Vamos calcular essa integral multiplicando e dividindo o integrando por $u = \sec x + \operatorname{tg} x$, então, $du = [\sec x \operatorname{tg} x + \sec^2 x] dx$ e

$$\int \sec x \, dx = \int \frac{\sec^2 x + \sec x \operatorname{tg} x}{\sec x + \operatorname{tg} x} \, dx = \int \frac{du}{u} = \ln |\sec x + \operatorname{tg} x| + C .$$

□

3 O Método de Substituição para a Integral Definida

Existem duas formas para o cálculo de uma integral definida usando substituição. Podemos calcular a integral indefinida e, depois, usando o *Teorema Fundamental do Cálculo*, computamos a variação total da primitiva escolhida. Observe o cálculo a seguir, em que usamos o resultado do Exemplo 1, a saber:

$$\int 4\sqrt{1+4x} \, dx = \frac{2}{3}(1+4x)^{3/2} + C ,$$

então,

$$\int_1^2 4\sqrt{1+4x} \, dx = \frac{2}{3}(1+4x)^{3/2} \Big|_1^2 = \frac{2}{3}(1+8)^{3/2} - \frac{2}{3}(1+4)^{3/2} = 18 - \frac{10\sqrt{5}}{3} .$$

A segunda forma de resolução da integral definida consiste em aplicar o teorema a seguir, em que mudamos os limites de integração ao mudarmos a variável e fazemos as contas até o final na nova variável, não tendo que retornar à variável original.

Teorema 1 (Substituição em integrais definidas)

Se g' é uma função contínua em $[a, b]$ e a função f é contínua na imagem de g , então,

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du. \quad (2)$$

Prova

Observe que de (2) e do Teorema Fundamental do Cálculo (TFC) da Aula 2 obtemos

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = F(g(x))\Big|_a^b = F(g(b)) - F(g(a)) ,$$

onde F é uma primitiva de f . Por outro lado, também pelo TFC, temos que

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du = F(g(b)) - F(g(a)). \text{ Logo,}$$

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du ,$$

tal como queríamos demonstrar.

**Exemplo 10**

Calcule $\int_1^2 4\sqrt{1+4x} dx$, usando (2) .

Solução

Tomando $u = 4x$ temos $du = 4dx$. Agora, devemos calcular os novos limites de integração, observe que

$$x = 1 \Rightarrow u = 1 + 4(1) = 5 \quad \text{e} \quad x = 2 \Rightarrow u = 1 + 4(2) = 9 .$$

Portanto,

$$\int_1^2 4\sqrt{1+4x} dx = \int_5^9 \sqrt{u} du = \frac{2u^{3/2}}{3}\Big|_5^9 = \frac{2}{3}(9^{3/2} - 5^{3/2}) = 18 - \frac{10\sqrt{5}}{3} .$$

**Observação 1**

Você deve ter notado que a vantagem de usar (2) é a de que não precisamos retornar à variável x após a integração. A variação total é calculada na variável u , com os novos limites de integração.

Exemplo 11

Calcule $\int_{-1}^0 \frac{x}{3x^2 + 2} dx$, usando (2).

Solução

Tomando $u = 3x^2 + 2$ temos $du = 6x dx$. Agora, devemos calcular os novos limites de integração, observe

$$x = -1 \Rightarrow u = 3(-1)^2 + 2 = 5 \quad \text{e} \quad x = 0 \Rightarrow u = 3(0) + 2 = 2$$

Portanto,

$$\int_{-1}^0 \frac{x}{3x^2 + 2} dx = \int_5^2 \frac{1}{6} \frac{1}{u} du = \frac{1}{6} \ln u \Big|_5^2 = \frac{1}{6} (\ln 2 - \ln 5).$$

□

Observação 2

Ressaltamos que em (2) a ordem em que aparecem $g(a)$, como limite inferior, e $g(b)$, como limite superior, deve ser respeitada, mesmo que $g(b) \leq g(a)$.

Exemplo 12

Calcule a área da região limitada pelo gráfico de $y = \frac{1}{1-2x}$, pelo eixo x e pelas retas $x = -2$ e $x = -1$

Solução

Pelo vista na Aula 1, a área da região descrita é dada por $A = \int_{-2}^{-1} \frac{1}{1-2x} dx$,

usando a mudança de variável $u = 1-2x$, obtemos $du = -2dx \Rightarrow dx = -\frac{du}{2}$.

Mudando os limites de integração, de acordo com (2), segue que

$$A = \int_{-2}^{-1} \frac{1}{1-2x} dx = -\frac{1}{2} \int_5^3 \frac{1}{u} du = -\frac{1}{2} \ln u \Big|_5^3 = -\frac{1}{2} [\ln 3 - \ln 5] = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{5}{3} \right).$$

□

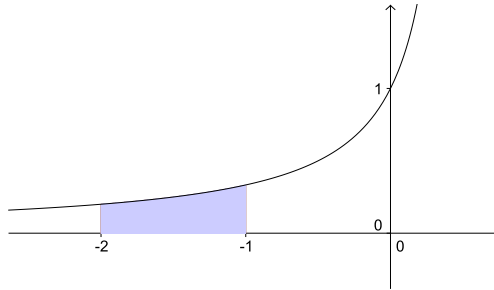


Figura 1: Região do exemplo 12.

Exemplo 13

Seja f uma função contínua em $[-a, a]$. Mostre que

1. se f for par, isto é, $f(-x) = f(x)$, então $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$.
2. Se f for ímpar, isto é, $f(-x) = -f(x)$ então $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$.

Solução

1. Vamos escrever a integral dada como a soma entre a integral de $-a$ a 0 e a integral de 0 a a , então temos

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx. \quad (3)$$

Na primeira integral vamos mudar a variável para $u = -x$, então $du = -dx$ e trocando os limites de integração, de acordo com (2), segue que

$$\int_{-a}^0 f(x) dx = - \int_a^0 f(-u) du.$$

Como a função f é par, temos

$$\int_{-a}^0 f(x) dx = - \int_a^0 f(-u) du = - \int_a^0 f(u) du = \int_0^a f(u) du, \quad (4)$$

onde na última igualdade invertemos os limites de integração, o que acarreta uma mudança de sinal da integral, conforme foi visto na Aula 1. Portanto, de (3) e (4), temos que

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_0^a f(u) du + \int_0^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx ,$$

pois na integral definida podemos usar qualquer variável para escrever o integrando.

2. A verificação segue os mesmos passos do item anterior, onde usamos em (4) que a função f é ímpar e, portanto, obtemos

$$\int_{-a}^0 f(x) dx = - \int_a^0 f(-u) du = \int_a^0 f(u) du = - \int_0^a f(u) du,$$

donde

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = - \int_0^a f(u) du + \int_0^a f(x) dx = 0 .$$

□

Exemplo 14

Calcule $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\cos^8 x + 3x^2 + 1} dx$.

Solução

O integrando $f(x) = \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\cos^8 x + 3x^2 + 1}$ é uma função ímpar, pois

$$f(-x) = \frac{\operatorname{sen}^3(-x)}{\cos^8(-x) + 3(-x)^2 + 1} = \frac{-\operatorname{sen}^3 x}{\cos^8 x + 3x^2 + 1} = -f(x) ,$$

para todo $x \in [-\pi, \pi]$. Logo, pelo exemplo anterior,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\cos^8 x + 3x^2 + 1} dx = 0 .$$

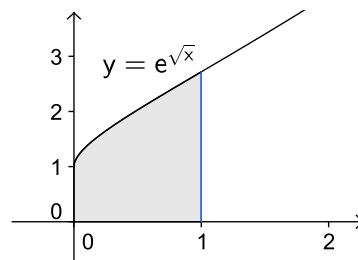
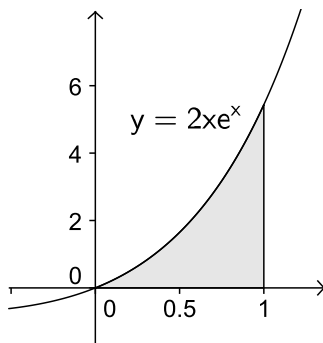
□

4 Exercícios de revisão

Calcule as seguintes integrais.

- | | |
|--|--|
| 1. $\int \frac{\ln^2 x}{x} dx;$ | 2. $\int \frac{t}{t^4 + 1} dt;$ |
| 3. $\int \frac{x}{x^4 + 2x^2 + 3} dx;$ | 4. $\int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen} \theta}{2 \cos^2 \theta + 1} d\theta;$ |
| 5. $\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{3 \cos^2 x + 1} dx;$ | 6. $\int \frac{1 + 2x}{1 + 3x^2} dx;$ |
| 7. $\int x\sqrt{x+3} dx;$ | 8. $\int_{-1}^1 \frac{s}{\sqrt{3+2s}} ds;$ |
| 9. $\int_{-1}^1 \frac{ x }{\sqrt{3+2x}} dx;$ | 10. $\int_{-3\pi}^{\frac{1}{3}\pi} x^4 \operatorname{sen}^5 x dx.$ |

11. Mostre que as áreas das regiões dadas a seguir são iguais.



Aula 5

Integração por partes

O método de *Integração por partes* permite expressar a integral de um produto de funções em termos de outra integral. O método é útil quando esta última integral é mais simples que a integral original.

1 Conceitos básicos

Dadas duas funções u e v contínuas no intervalo $[a, b]$ e diferenciáveis no intervalo (a, b) , pela regra de derivação do produto, temos

$$(uv)'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x),$$

Supondo que os três termos da igualdade acima sejam integráveis no intervalo $[a, b]$, integrando e usando a definição de integral indefinida, obtemos

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx. \quad (1)$$

A maneira mais simples de lembrar da fórmula (1) é usando a notação diferencial, isto é $du = u'(x)dx$ e $dv = v'(x)dx$. Isso nos permite reescrever (1) como

$$\int u dv = uv - \int v du. \quad (2)$$

No caso da integral definida temos

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du. \quad (3)$$

O método de *Integração por partes* se aplica da seguinte maneira: para integrar uma função h , começamos escrevendo-a como o produto de duas funções, digamos $h(x) = f(x)g(x)$. Definimos $u = f(x)$ e $dv = g(x)dx$, obtendo

$$\begin{aligned} u &= f(x) ; du = f'(x)dx, \\ v &=? ; dv = g(x)dx. \end{aligned} \quad (4)$$

A função v é simplesmente $\int g(x)dx$. Por isso, na prática, procuramos uma decomposição $h = fg$, de modo que g tenha uma integral imediata. Uma vez determinada v , usamos a fórmula (2) e obtemos

$$\int h(x)dx = uv - \int v du$$

Assim, o problema de calcular $\int h(x)dx$ é trocado pelo problema de calcular $\int v du$.

Observação 1

- Na maioria dos casos, a ideia é fazer com que $\int v du$ seja mais simples de calcular do que $\int h(x)dx$.
- Algumas vezes, mesmo que o grau de dificuldade para calcular $\int v du$ ou $\int h(x)dx$ seja o mesmo (ver o Exemplo 2), aplicando novamente o método, conseguimos calcular a integral desejada.

- Nos exercícios a seguir, usaremos o padrão (4) para descrever a decomposição considerada.

2 Exemplos

Exemplo 1

Calcule $\int_0^1 xe^x dx$.

Solução

Consideremos a decomposição

$$\begin{aligned}u &= x ; du = dx, \\v &= e^x ; dv = e^x dx.\end{aligned}$$

Usando a expressão (3) obtemos

$$\int_0^1 xe^x dx = xe^x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx.$$

Agora, o problema se reduz a calcular a integral da função e^x , que, como é sabido, é a própria função e^x . Logo,

$$\int_0^1 xe^x dx = xe^x \Big|_0^1 - e^x \Big|_0^1 = e - (e - 1) = 1 .$$

□

Exemplo 2

Calcule $\int e^x \operatorname{sen} x dx$.

Solução

Consideremos a decomposição

$$\begin{aligned}u &= \operatorname{sen} x ; du = \cos x dx, \\v &= e^x ; dv = e^x dx.\end{aligned}$$

Usando a expressão (2) obtemos

$$\int e^x \operatorname{sen} x \, dx = e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \cos x \, dx. \quad (5)$$

O problema se “reduz” a calcular $\int e^x \cos x$, que NÃO é mais simples de calcular do que a integral original. Dado que a derivada da função cosseno é a função seno, se usarmos novamente o método de integração por partes para calcular $\int e^x \cos x \, dx$, veríamos aparecer novamente a integral, o que pareceria ser um círculo vicioso. No entanto, vejamos que não é: decompondo a função $e^x \cos x$ da seguinte maneira

$$\begin{aligned} u &= \cos x ; \, du = -\operatorname{sen} x \, dx, \\ v &= e^x ; \, dv = e^x \, dx. \end{aligned}$$

temos

$$\int e^x \cos x \, dx = e^x \cos x - \int e^x (-\operatorname{sen} x) \, dx. \quad (6)$$

Aplicando a expressão (6) em (5), obtemos

$$\int e^x \operatorname{sen} x \, dx = e^x \operatorname{sen} x - e^x \cos x - \int e^x (\operatorname{sen} x) \, dx.$$

Logo, passando a integral do lado direito para o lado esquerdo e, posteriormente, dividindo por 2, temos

$$\int e^x \operatorname{sen} x \, dx = \frac{1}{2}[e^x \operatorname{sen} x - e^x \cos x] + C.$$

□

Exemplo 3

Calcule $\int \ln x \, dx$.

Solução

Em geral, se estamos querendo calcular a integral de uma função f cuja derivada parece ser mais simples de integrar do que a própria função, podemos considerar a decomposição

$$u = f(x) ; du = f'(x)dx,$$

$$v = x ; dv = dx.$$

No nosso caso particular, esta decomposição ficaria

$$u = \ln x ; du = \frac{1}{x}dx,$$

$$v = x ; dv = dx.$$

Usando a expressão (2), obtemos

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int x \frac{1}{x} dx.$$

Logo,

$$\int \ln x dx = x \ln x - x + C.$$

□

Exemplo 4

Calcule $\int \sec^3 x dx$.

Solução

Consideremos a decomposição

$$u = \sec x ; du = \sec x \operatorname{tg} x dx,$$

$$v = \operatorname{tg} x ; dv = \sec^2 dx.$$

Usando a expressão (2), obtemos

$$\int \sec^3 x dx = \sec x \operatorname{tg} x - \int \operatorname{tg}^2 x \sec x dx.$$

Usando a identidade $\operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x - 1$, temos

$$\int \sec^3 x \, dx = \sec x \operatorname{tg} x - \int \sec^3 x \, dx + \int \sec x \, dx.$$

Passando a integral de $\sec^3 x$ do lado direito para o lado esquerdo da igualdade acima, e dado que $\int \sec x \, dx = \ln |\sec x + \operatorname{tg} x|$, obtemos

$$\int \sec^3 x \, dx = \frac{1}{2}[\sec x \operatorname{tg} x + \ln |\sec x + \operatorname{tg} x|] + C.$$

□

Observação 2

No exemplo anterior, poderíamos ter considerado a seguinte decomposição:

$$\begin{aligned} u &= \sec^2 x ; \quad du = 2 \sec^2 x \operatorname{tg} x \, dx, \\ v &= \ln |\sec x + \operatorname{tg} x| ; \quad dv = \sec x \, dx. \end{aligned}$$

Esta escolha nos leva a calcular

$$\int \ln |\sec x + \operatorname{tg} x| \sec^2 x \operatorname{tg} x \, dx,$$

que é mais difícil de ser feito do que com a integral original. Logo, fazer uma escolha adequada da decomposição é indispensável para que o método seja útil.

3 Exercícios de revisão

Calcule as seguintes integrais.

1. $\int \operatorname{arctg} x \, dx;$
2. $\int (\ln x)^3 \, dx ;$
3. $\int \operatorname{cosec}^3 x \, dx;$
4. $\int \operatorname{sen}(\ln x) \, dx ;$
5. $\int x \operatorname{sec}^2 x \, dx;$
6. $\int x 3^x \, dx;$
7. $\int \operatorname{tg}^2 x \operatorname{sec}^3 x \, dx;$
8. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x} \operatorname{sen}^3 x \, dx.$

Aula 6

Integrais de Funções Trigonométricas

1 Introdução

Nesta aula vamos calcular integrais envolvendo produtos de potências de funções trigonométricas. Integrais desse tipo aparecem, com frequência, em aplicações físicas ou dentro de outra técnica chamada substituição trigonométrica, portanto, vamos abordá-las nesse capítulo. Para tal, na maioria dos casos, o uso de identidades trigonométricas será fundamental, portanto, listaremos a seguir as principais identidades trigonométricas necessárias.

$$\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1 \quad (1)$$

$$\operatorname{tg}^2 x + 1 = \sec^2 x \quad (2)$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \quad (3)$$

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \quad (4)$$

$$\operatorname{sen} mx \cos nx = \frac{\operatorname{sen}(m - n)x + \operatorname{sen}(n + m)x}{2} \quad (5)$$

Nos exemplos a seguir, calcule as integrais dadas.

Exemplo 1

$$\int \cos^3 x \, dx$$

Solução

Usando a identidade (1) anterior, escrevemos $\cos^3 x = \cos^2 x \cos x = (1 - \sin^2 x) \cos x$ e mudamos a variável $u = \sin x$, donde $du = \cos x \, dx$. Então,

$$\begin{aligned} \int \cos^3 x \, dx &= \int \cos^2 x \cos x \, dx = \int (1 - \sin^2 x) \cos x \, dx \\ &= \int (1 - u^2) \, du = u - \frac{u^3}{3} + C = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C . \end{aligned}$$

□

Exemplo 2

$$\int \cos^3 x \sin^2 x \, dx$$

Solução

Vamos separar uma potência do cosseno para formarmos o du , como no exemplo anterior. A ideia é usar a identidade (1) para escrever o integrando como $\cos^3 x \sin^2 x = \cos^2 x \sin^2 x \cos x = (1 - \sin^2 x) \sin^2 x \cos x$ e usar a mudança $u = \sin x$. Assim, obtemos

$$\begin{aligned} \int \cos^3 x \sin^2 x \, dx &= \int (1 - \sin^2 x) \sin^2 x \cos x \, dx = \int (1 - u^2) u^2 \, du \\ &= \int u^2 - u^4 \, du = \frac{u^3}{3} - \frac{u^5}{5} + C = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C . \end{aligned}$$

□

Exemplo 3

$$\int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx$$

Solução

Pela identidade (4) temos

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 x \, dx = \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2x}{2} \, dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} 1 - \cos 2x \, dx .$$

Usando o Teorema 1 da Aula 4, para $u = 2x$, obtemos

$$\frac{1}{2} \int_0^{\pi} 1 - \cos 2x \, dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} 1 - \cos u \frac{du}{2} = \frac{1}{4} (u - \operatorname{sen} u) \Big|_0^{2\pi} = \frac{\pi}{2} .$$

□

Exemplo 4

$$\int \cos^4 x \, dx$$

Solução

Usando a identidade (3) anteriormente descrita, temos

$$\begin{aligned} \int \cos^4 x \, dx &= \int \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^2 \, dx = \frac{1}{4} \int 1 + 2 \cos 2x + \cos^2 2x \, dx \\ &= \frac{x}{4} + \frac{1}{2} \int \cos 2x \, dx + \frac{1}{4} \int \cos^2 2x \, dx . \end{aligned}$$

Mudando a variável $u = 2x$, de forma análoga ao que foi feito no exemplo anterior, obtemos

$$\frac{1}{2} \int \cos 2x \, dx = \frac{1}{4} \int \cos u \, du = \frac{1}{4} \operatorname{sen} u + C = \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2x + C .$$

A terceira integral será calculada, utilizando a identidade (3) para $2x$, no lugar do x . Assim, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \int \cos^2 2x \, dx &= \frac{1}{4} \int \frac{1 + \cos 4x}{2} \, dx = \frac{x}{8} + \frac{1}{8} \int \cos 4x \, dx \\ &= \frac{x}{8} + \frac{1}{32} \int \cos u \, du = \frac{x}{8} + \frac{1}{32} \operatorname{sen} u + C = \frac{x}{8} + \frac{1}{32} \operatorname{sen} 4x + C . \end{aligned}$$

Observe que nos cálculos anteriores usamos a substituição $u = 4x$ com $du = 4dx$. Logo,

$$\int \cos^4 x \, dx = \frac{3x}{8} + \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2x + \frac{1}{32} \operatorname{sen} 4x + C .$$

□

Exemplo 5

$$\int \operatorname{sen}^6 x \, dx$$

Solução

Reescrevemos o integrando e usamos (4) para reduzir potências da seguinte forma

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sen}^6 x \, dx &= \int (\operatorname{sen}^2 x)^3 \, dx = \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^3 \, dx \\ &= \frac{1}{8} \int 1 - 3 \cos 2x + 3 \cos^2 2x - \cos^3 2x \, dx . \end{aligned}$$

Fazendo a mudança $u = 2x$ com $du = 2dx$, obtemos integrais que já foram calculadas nos exemplos 1 e 4 anteriores. Assim,

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sen}^6 x \, dx &= \frac{1}{16} \int 1 - 3 \cos u + 3 \cos^2 u - \cos^3 u \, du \\ &= \frac{u}{16} + \frac{3u}{32} + \frac{3 \operatorname{sen} u}{64} - \frac{1}{16} \operatorname{sen} u + \frac{1}{48} \operatorname{sen}^3 u + C \\ &= \frac{5x}{16} - \frac{1}{64} \operatorname{sen} 2x + \frac{1}{48} \operatorname{sen}^3 2x + C . \end{aligned}$$

□

Exemplo 6

$$\int \cos^2 x \operatorname{sen}^4 x \, dx .$$

Solução

Usando a identidade (1) reduzimos a integral dada a duas, que já sabemos

calcular,

$$\int \cos^2 x \operatorname{sen}^4 x \, dx = \int \operatorname{sen}^4 x - \operatorname{sen}^6 x \, dx .$$

A segunda integral é a do exemplo 5 e a primeira é feita de forma análoga à do exemplo 4. Assim, obtemos

$$\begin{aligned} \int \cos^2 x \operatorname{sen}^4 x \, dx &= \frac{3x}{8} - \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2x + \frac{1}{32} \operatorname{sen} 4x - \frac{5x}{16} + \frac{1}{64} \operatorname{sen} 2x - \frac{1}{48} \operatorname{sen}^3 2x + C \\ &= \frac{x}{16} - \frac{15}{64} \operatorname{sen} 2x + \frac{1}{32} \operatorname{sen} 4x - \frac{1}{48} \operatorname{sen}^3 2x + C . \end{aligned}$$

□

Exemplo 7

$$\int \operatorname{sen} 3x \cos 7x \, dx .$$

Solução

Basta usar a identidade (5) para $m = 3$ e $n = 7$. Então,

$$\int \operatorname{sen} 3x \cos 7x \, dx = \frac{1}{2} \int \operatorname{sen} -4x + \operatorname{sen} 10x \, dx = \frac{\cos 4x}{8} - \frac{\cos 10x}{20} + C .$$

□

Exemplo 8

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sec^4 x \, dx$$

Solução

Agora, a estratégia é usar (2) para depois fazer a substituição na integral definida $u = \operatorname{tg} x$, onde $du = \sec^2 x \, dx$. Então,

$$\begin{aligned} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sec^4 x \, dx &= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sec^2 x \sec^2 x \, dx = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} (1 + \operatorname{tg}^2 x) \sec^2 x \, dx \\ &= \int_{-1}^1 (1 + u^2) \, du = \left(u + \frac{u^3}{3} \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{8}{3} . \end{aligned}$$

□

Exemplo 9

$$\int \operatorname{tg}^3 x \, dx .$$

Solução

Vamos usar a identidade (2) e na primeira integral a ser obtida, a substituição $u = \operatorname{tg} x$, em que $du = \sec^2 x$. Então,

$$\begin{aligned} \int \operatorname{tg}^3 x \, dx &= \int \operatorname{tg} x (\sec^2 x - 1) \, dx = \int u \, du - \int \operatorname{tg} x \, dx \\ &= \frac{u^2}{2} + \ln |\cos x| + C = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + \ln |\cos x| + C, \end{aligned}$$

onde utilizamos o cálculo da integral da tangente, tal como vimos no exemplo 5, da Aula 4.

□

2 Exercícios de revisão

Calcule as integrais.

1. $\int \operatorname{tg}^4 x \, dx;$
2. $\int \cos^5 x \, dx;$
3. $\int \cos^6 x \, dx;$
4. $\int \operatorname{sen} x \operatorname{tg}^2 x \, dx;$
5. $\int \cos \pi x \operatorname{sen} x \, dx;$
6. $\int \sec^{2n} x \, dx, n = 3, 4;$
7. $\int \operatorname{tg} x \sec^3 x \, dx;$
8. $\int \cos^2 x \operatorname{sen}^2 x \, dx;$
9. $\int \operatorname{sen} x \cos^3 x \, dx.$

Aula 7

Substituição trigonométrica

A *substituição trigonométrica* é uma técnica utilizada para integrar funções algébricas transformando-as em funções trigonométricas, mediante o uso de identidades trigonométricas.

1 Conceitos básicos

Nesta aula, vamos usar um novo tipo de substituição, chamado *substituição inversa*, que difere do procedimento adotado na Aula 4 em que NÃO é a nova variável que será colocada em função da variável original ($u = g(x)$), mas sim o contrário. Dada $h : I \rightarrow J$ uma função $C^1(I)$ (contínua e com derivada contínua), invertível com inversa $C^1(J)$, definimos a mudança de variável $x = h(\theta)$, o que nos leva a

$$\int f(x)dx = \int f(h(\theta))h'(\theta)d\theta. \quad (1)$$

Para justificar a linha anterior, basta tomar uma antiderivada G da função $f(h(\theta))h'(\theta)$, e provar que $G(h^{-1}(x))$ é uma antiderivada da função f . Isso é verificado da seguinte maneira:

$$G'(h^{-1}(x))[h^{-1}]'(x) = f(h(h^{-1}(x)))h'(h^{-1}(x))[h^{-1}]'(x) = f(x).$$

Nesta aula, estudaremos três tipos diferentes de substituições inversas, que vão permitir transformar a integral de uma função envolvendo alguma expressão do tipo $\sqrt{a^2 - x^2}$, $\sqrt{x^2 - a^2}$ ou $\sqrt{a^2 + x^2}$, em uma integral de uma função envolvendo funções trigonométricas. A ideia é usar as identidades trigonométricas $\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$, $\operatorname{tg}^2 \theta = \sec^2 \theta - 1$ ou $\sec^2 \theta = 1 + \operatorname{tg}^2 \theta$, respectivamente. Daqui em diante vamos supor $a > 0$.

Caso ($\sqrt{a^2 - x^2}$): A função $h(\theta) = a \operatorname{sen} \theta$, definida no intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$, é invertível, com função inversa $h^{-1}(x) = \operatorname{arcsen}(x/a)$, definida para $x \in [-a, a]$. Podemos, então, introduzir a mudança de variável vista em (1), que pode ser melhor lembrada usando a notação diferencial:

$$x = a \operatorname{sen} \theta \quad ; \quad dx = a \cos \theta \, d\theta.$$

Observe que usando a identidade $\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$, e dado que no domínio de definição a função cosseno é positiva, obtemos $\cos \theta = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a}$.

De fato, todas as funções trigonométricas em θ ($\operatorname{tg} \theta$, $\operatorname{cotg} \theta$, ...) podem ser expressas em termos da variável x , com ajuda da Figura 1.

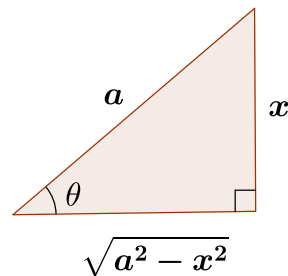


Figura 1:

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{x}{a}.$$

$x =$ Cateto Oposto (CO).

$a =$ Hipotenusa (H).

$\sqrt{a^2 - x^2} =$ Cateto Adjacente (CA).

Por exemplo, dado que $\cos \theta = \frac{CA}{H}$ e $\operatorname{tg} \theta = \frac{CO}{CA}$, temos $\cos \theta = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a}$ e $\operatorname{tg} \theta = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$. Para obter as outras funções trigonométricas, basta lembrar que $\operatorname{cotg} \theta = \frac{1}{\operatorname{tg} \theta}$, $\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$ e $\operatorname{cosec} \theta = \frac{1}{\operatorname{sen} \theta}$.

Exemplo 1

Calcule $\int \frac{dx}{x\sqrt{5-x^2}}$.

Solução

Considerando a mudança de variáveis

$$x = \sqrt{5} \operatorname{sen} \theta \quad ; \quad dx = \sqrt{5} \cos \theta \, d\theta,$$

temos

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{5-x^2}} = \int \frac{(\sqrt{5} \cos \theta) d\theta}{\sqrt{5} \operatorname{sen} \theta (\sqrt{5} \cos \theta)} = \frac{\sqrt{5}}{5} \int \operatorname{cosec} \theta \, d\theta,$$

logo,

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{5-x^2}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \ln |\operatorname{cosec} \theta - \operatorname{cotg} \theta| + C.$$

Para retornar à variável x , usamos (ver a Figura anterior)

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{x}{\sqrt{5}} \quad , \quad \operatorname{cosec} \theta = \frac{\sqrt{5}}{x} \quad , \quad \operatorname{cotg} \theta = \frac{\sqrt{5-x^2}}{x}.$$

Assim,

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{5-x^2}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \ln \left| \sqrt{5} - \sqrt{5-x^2} \right| - \frac{\sqrt{5}}{5} \ln |x| + C.$$

□

Exemplo 2

Calcule $\int \frac{x^2 \, dx}{\sqrt{25-x^2}}$.

Solução

Considerando a mudança de variáveis

$$x = 5 \operatorname{sen} \theta \quad ; \quad dx = 5 \cos \theta \, d\theta,$$

temos

$$\int \frac{x^2 \, dx}{\sqrt{25-x^2}} = \int \frac{(5 \operatorname{sen} \theta)^2 (5 \cos \theta) \, d\theta}{(5 \cos \theta)} = 25 \int \operatorname{sen}^2 \theta \, d\theta.$$

A última integral foi estudada na Aula 6. Assim,

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{25-x^2}} = 25\{\theta/2 - \text{sen}(2\theta)/4\} + C.$$

Para retornar à variável x , usamos

$$\theta = \arcsen(x/5)$$

e

$$\text{sen}(2\theta) = 2 \text{sen } \theta \cos \theta = 2(x/5)(\sqrt{1 - (x/5)^2}).$$

Assim,

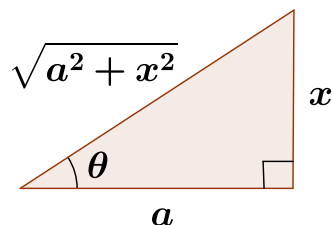
$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{25-x^2}} = \frac{25}{2} \arcsen(x/5) - \frac{x}{2} \sqrt{25-x^2} + C.$$

□

Caso $(\sqrt{a^2+x^2})$: A função $h(\theta) = a \text{tg } \theta$, definida no intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$, é invertível, com função inversa $h^{-1}(x) = \text{arctg}(x/a)$ definida para $x \in \mathbb{R}$. Podemos então introduzir a mudança de variável

$$x = a \text{tg } \theta \quad ; \quad dx = a \sec^2 \theta d\theta.$$

Observe que usando a identidade $\text{tg}^2 \theta = \sec^2 \theta - 1$, e dado que no domínio de definição a função secante é positiva, obtemos $\sec \theta = \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a}$. Analisando de forma semelhante ao procedimento adotado no primeiro caso, obtemos a Figura 2.



$$\text{tg } \theta = \frac{x}{a}.$$

$x =$ Cateto Oposto (CO).

$a =$ Cateto Adjacente (CA).

$\sqrt{a^2 + x^2} =$ Hipotenusa (H).

Figura 2:

Lembrando que $\sin \theta = \frac{CO}{H}$ e $\cos \theta = \frac{CA}{H}$, temos $\sin \theta = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$ e $\cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+x^2}}$.

Exemplo 3

Calcule $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+16}}$.

Solução

Considerando a mudança de variáveis

$$x = 4 \operatorname{tg} \theta \quad ; \quad dx = 4 \sec^2 \theta \, d\theta,$$

temos

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+16}} = \int \frac{4 \sec^2 \theta \, d\theta}{4 \sec \theta} = \int \sec \theta \, d\theta.$$

A última integral foi estudada na Aula 6. Assim,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+16}} = \ln |\sec \theta + \operatorname{tg} \theta| + C.$$

Para retornar à variável x , usamos

$$\operatorname{tg} \theta = x/4 \quad , \quad \sec \theta = \frac{\sqrt{16+x^2}}{4}$$

Assim,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+16}} = \ln |\sqrt{16+x^2} + x| + C.$$

□

Exemplo 4

Calcule $\int \frac{1}{(x^2+3)^2} dx$

Solução

Considerando a mudança de variáveis

$$x = \sqrt{3} \operatorname{tg} \theta \quad ; \quad dx = \sqrt{3} \sec^2 \theta \, d\theta,$$

temos

$$\int \frac{1}{(x^2 + 3)^2} dx = \int \frac{\sqrt{3} \sec^2 \theta}{(3 \operatorname{tg}^2 \theta + 3)^2} d\theta = \frac{\sqrt{3}}{9} \int \cos^2 \theta d\theta$$

A última integral pode ser feita usando a identidade (4) da Aula 6. Assim,

$$\int \frac{1}{(x^2 + 3)^2} dx = \frac{\sqrt{3}}{9} \left[\frac{\theta}{2} + \frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{4} \right] + C.$$

Para retornar à variável x , usamos

$$\theta = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{3}}, \quad \operatorname{sen} \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3}} \quad \text{e} \quad \operatorname{cos} \theta = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{x^2 + 3}}.$$

Assim,

$$\int \frac{1}{(x^2 + 3)^2} dx = \frac{\sqrt{3}}{18} \left[\operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}x}{x^2 + 3} \right] + C.$$

□

Caso $(\sqrt{x^2 - a^2})$: A função $h(\theta) = a \sec \theta$, definida no intervalo $[0, \pi/2)$ (*ou* $(\pi/2, \pi]$), é invertível, com função inversa $h^{-1}(x) = \operatorname{arcsec}(x/a)$ definida para $x \in [a, +\infty)$ (*ou* $x \in (-\infty, a]$). Podemos, então, introduzir a mudança de variável

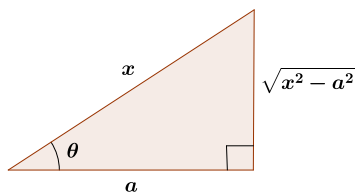
$$x = a \sec \theta \quad ; \quad dx = a \sec \theta \operatorname{tg} \theta d\theta,$$

onde $0 \leq \theta < \pi/2$ (ou $\pi/2 < \theta \leq \pi$). Observe que usando a identidade $\operatorname{tg}^2 \theta = \sec^2 \theta - 1$, e dado que no domínio de definição a função tangente é positiva (*ou negativa*), temos $\operatorname{tg} \theta = \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a}$ (*ou* $\operatorname{tg} \theta = -\frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a}$). Procedendo do mesmo modo que no primeiro caso, obtemos a Figura 3.

$$\text{Logo, } \operatorname{sen} \theta = \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x} \quad \text{e} \quad \operatorname{cos} \theta = \frac{a}{x}.$$

Exemplo 5

Calcule $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 - 9}}$ supondo $x \in (3, +\infty)$.



$$\sec \theta = \frac{x}{a}.$$

x = Hipotenusa (H).

a = Cateto Adjacente (CA).

$\sqrt{x^2 - a^2}$ = Cateto Oposto (CO).

Figura 3:

Solução

Considerando a mudança de variáveis

$$x = 3 \sec \theta \quad ; \quad dx = 3 \sec \theta \operatorname{tg} \theta \, d\theta,$$

temos

$$\int \frac{x^2 \, dx}{\sqrt{x^2 - 9}} = \int \frac{(3 \sec \theta)^2 (3 \sec \theta \operatorname{tg} \theta) \, d\theta}{(3 \operatorname{tg} \theta)} = 9 \int \sec^3 \theta \, d\theta.$$

A última integral foi feita no Exemplo 4 da Aula 5. Assim,

$$\int \sec^3 \theta \, d\theta = \frac{1}{2} \sec \theta \operatorname{tg} \theta + \frac{1}{2} \ln |\sec \theta + \operatorname{tg} \theta| + C.$$

Logo,

$$\int \frac{x^2 \, dx}{\sqrt{x^2 - 9}} = \frac{9}{2} \sec \theta \operatorname{tg} \theta + \frac{9}{2} \ln |\sec \theta + \operatorname{tg} \theta| + C.$$

Para retornar à variável x , usamos

$$\sec \theta = \frac{x}{3} \quad , \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{3}.$$

Assim,

$$\int \frac{x^2 \, dx}{\sqrt{x^2 - 9}} = \frac{x\sqrt{x^2 - 9}}{2} + \frac{9}{2} \ln |x + \sqrt{x^2 - 9}| + C.$$

□

Exemplo 6

Calcule $\int_4^8 \frac{\sqrt{x^2 - 16}}{x^2} dx$.

Solução

Primeiro calculamos a integral indefinida. Considerando a mudança de variáveis

$$x = 4 \sec \theta \quad ; \quad dx = 4 \sec \theta \operatorname{tg} \theta \, d\theta,$$

temos

$$\int_4^8 \frac{\sqrt{x^2 - 16}}{x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{(4 \operatorname{tg} \theta)(4 \sec \theta \operatorname{tg} \theta) d\theta}{(4 \sec \theta)^2} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} [\sec \theta - \cos \theta] d\theta,$$

logo,

$$\int_4^8 \frac{\sqrt{x^2 - 16}}{x^2} dx = [\ln |\sec \theta + \operatorname{tg} \theta| - \operatorname{sen} \theta] \Big|_0^{\frac{\pi}{3}}.$$

Assim,

$$\int_4^8 \frac{\sqrt{x^2 - 16}}{x^2} dx = [\ln(2 + \sqrt{3}) - \frac{\sqrt{3}}{2}] - [\ln 1 - 0] = \ln(2 + \sqrt{3}) - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

□

2 Exercícios de revisão

Calcule as seguintes integrais.

- | | |
|--|---|
| 1. $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx;$ | 2. $\int_{-2}^2 \frac{1}{4x^2+9} dx ;$ |
| 3. $\int \sqrt{8-2x-x^2} dx;$ | 4. $\int \frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}} dx;$ |
| 5. $\int \sqrt{x^2+2x} dx;$ | 6. $\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2} dx.$ |

Calcule as áreas das seguintes regiões.

- Região delimitada pela elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.
- Região delimitada pela hipérbole $9x^2 - 4y^2 = 36$ e a reta $x = 3$.

Aula 8

Integração por frações parciais

O método de *Integração por Frações Parciais* é aplicado para integrar funções racionais, isto é, funções que são quocientes de polinômios. A ideia é usar as raízes do polinômio do denominador para escrever a função como uma soma de funções racionais mais simples, as chamadas frações parciais.

1 Integração de funções racionais próprias

Sabemos que $\int \frac{1}{x^2 + 1} dx = \operatorname{arctg} x + C$, porém, trocando um sinal, a integral indefinida $\int \frac{1}{x^2 - 1} dx$ já não é tão imediata. Observe que reescrevendo o integrando, como uma soma de frações mais simples, efetuamos o cálculo da integral sem complicação:

$$\frac{1}{x^2 - 1} = \frac{1/2}{x - 1} - \frac{1/2}{x + 1},$$

então,

$$\int \frac{1}{x^2 - 1} dx = \int \frac{1/2}{x - 1} dx - \int \frac{1/2}{x + 1} dx = \frac{1}{2} \ln |x - 1| - \frac{1}{2} \ln |x + 1| + C.$$

Para o caso geral, considere a função racional *própria*

$f(x) = p(x)/q(x)$, ou seja, tal que o grau de $q(x)$ é maior do que o grau do numerador $p(x)$. Para decompor a função f em frações parciais, primeiro, fatoramos $q(x)$ como produto de potências de fatores distintos, que podem ser de dois tipos:

i) potência de termo linear do tipo $(ax + b)^m$, em que m é a multiplicidade da raiz $-b/a$, ou

ii) potência de termo quadrático irreduzível do tipo $(ax^2 + bx + c)^k$, em que o termo quadrático não possui raízes reais e k é a multiplicidade das raízes complexas conjugadas.

Em seguida, a cada fator do tipo $(ax + b)^m$, associamos uma decomposição em frações parciais da forma

$$\frac{A_1}{ax + b} + \frac{A_2}{(ax + b)^2} + \dots + \frac{A_m}{(ax + b)^m},$$

em que A_1, A_2, \dots, A_m são constantes a serem determinadas.

E a cada fator do tipo $(ax^2 + bx + c)^k$ associamos

$$\frac{B_1x + C_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{B_2x + C_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \dots + \frac{B_kx + C_k}{(ax^2 + bx + c)^k}.$$

Somamos as decomposições e calculamos as constantes introduzidas. Assim, teremos a função $p(x)/q(x)$, escrita como uma soma de frações mais simples, de modo que poderemos integrar. Para compreender melhor, acompanhe os exemplos a seguir. Por simplicidade, no lugar da notação $A_1, A_2, \dots, B_1, \dots, C_1, \dots$, vamos usar A, B, C, D, \dots

Exemplo 1

Caso em que o denominador é fatorado como um produto de fatores lineares distintos.

Calcule

$$\int \frac{x + 2}{x(x - 1)(2x + 1)} dx.$$

Solução

Observe que $q(x)$ já está fatorado e só possui raízes reais com multiplicidade 1, portanto, buscamos uma decomposição para o integrando da forma

$$\frac{x+2}{x(x-1)(2x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{2x+1}, \forall x \neq 0, 1, -1/2.$$

A fim de calcularmos os coeficientes, extraímos o mmc e cancelamos o denominador, portanto, temos

$$x+2 = A(x-1)(2x+1) + Bx(2x+1) + Cx(x-1), \forall x \neq 0, 1, -1/2.$$

Como a identidade anterior é entre polinômios, que são funções contínuas em \mathbb{R} , ela vale inclusive para os valores $x = 0, 1, -1/2$. Substituir x por esses valores facilita o cálculo dos coeficientes, já que se $x = 0$, então $2 = -A$, se $x = 1$, segue que $3 = 3B$ e se $x = -1/2$, acarreta $3/2 = \frac{3C}{4}$. Assim, $A = -2$, $B = 1$ e $C = 2$, donde

$$\frac{x+2}{x(x-1)(2x+1)} = \frac{-2}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{2}{2x+1}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \int \frac{x+2}{x(x-1)(2x+1)} dx &= \int \frac{-2}{x} dx + \int \frac{1}{x-1} dx + \int \frac{2}{2x+1} dx \\ &= -2 \ln|x| + \ln|x-1| + \ln|2x+1| + C. \end{aligned}$$

□

Exemplo 2

Caso em que o denominador é fatorado como um produto de fatores lineares repetidos.

Calcule $\int \frac{5x^2 + 20x + 6}{x^3 + 4x^2 + 4x} dx$.

Solução

Inicialmente, vamos fatorar $q(x) = x^3 + 4x^2 + 4x = x(x^2 + 4x + 4) = x(x+2)^2$,

como em i) . O integrando deve ter uma decomposição da forma

$$\frac{5x^2 + 20x + 6}{x^3 + 4x^2 + 4x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2}, \forall x \neq 0, -2 .$$

A fim de calcularmos os coeficientes, extraímos o mmc e cancelamos o denominador, portanto, temos $5x^2 + 20x + 6 = A(x+2)^2 + Bx(x+2) + Cx$. Ao substituirmos as raízes $x = 0$ e $x = -2$, encontramos os coeficientes $A = 3/2$ e $C = 7$. Porém, fica faltando o valor de B, o que pode ser obtido usando qualquer outro valor para x na identidade anterior, tendo substituído os valores de A e C já calculados. Assim, fazendo $x = 1$, temos $B = 7/2$, e assim,

$$\frac{5x^2 + 20x + 6}{x^3 + 4x^2 + 4x} = \frac{3/2}{x} + \frac{7/2}{x+2} + \frac{7}{(x+2)^2} ;$$

logo,

$$\begin{aligned} \int \frac{5x^2 + 20x + 6}{x^3 + 4x^2 + 4x} dx &= \frac{3}{2} \int \frac{1}{x} dx + \frac{7}{2} \int \frac{1}{x+2} dx + 7 \int \frac{1}{(x+2)^2} dx \\ &= \frac{3}{2} \ln |x| + \frac{7}{2} \ln |x+2| - \frac{7}{x+2} + C . \end{aligned}$$

□

Exemplo 3

Caso em que o denominador é fatorado como um produto de fatores onde aparece algum termo quadrático irredutível.

Calcule $\int \frac{1}{x(x^2 + 4)} dx$.

Solução

Observe que $q(x)$ já está fatorado, de acordo com i) e ii) anteriores, possuindo uma raiz real, $x = 0$, com multiplicidade 1 e duas complexas conjugadas, também, com multiplicidade 1. Portanto, buscamos uma decomposição para o integrando da forma

$$\frac{1}{x(x^2 + 4)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 4}, \forall x \neq 0.$$

A fim de calcularmos os coeficientes, extraímos o mmc e cancelamos o denominador, portanto, temos $1 = A(x^2 + 4) + (Bx + C)x = (A + B)x^2 + Cx + 4A$. Nesse caso, a forma mais simples de calcularmos as constantes é igualando os coeficientes dos termos de mesmo grau, pois obtemos um sistema simples. Então, $A + B = 0$, $C = 0$ e $4A = 1$, donde $A = 1/4$, $B = -1/4$ e $C = 0$. Portanto,

$$\int \frac{1}{x(x^2 + 4)} = \frac{1}{4} \int \frac{1}{x} dx - \frac{1}{4} \int \frac{x}{x^2 + 4} dx = \frac{1}{4} \ln|x| - \frac{1}{8} \ln(x^2 + 4) + C ,$$

tal que na segunda integral usamos a substituição $u = x^2 + 4$, com $du = 2x dx$.

□

Exemplo 4

Calcule $\int \frac{x - 2}{x(x^4 - 8x^2 - 9)}$.

Solução

Primeiro devemos decompor $q(x)$, de acordo com i) e ii) anteriores, para aplicarmos a decomposição em frações parciais. Assim, vamos calcular as raízes da equação biquadrada $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$, fazendo $t = x^2$, as raízes da equação do 2º grau em t , $t^2 - 8t - 9 = 0$, são $t = 9$ e $t = -1$. Portanto, $t^2 - 8t - 9 = (t - 9)(t + 1)$, em que temos a fatoração esperada $x^4 - 8x^2 - 9 = (x^2 - 9)(x^2 + 1) = (x - 3)(x + 3)(x^2 + 1)$. Logo,

$$\frac{x - 2}{x(x^4 - 8x^2 - 9)} = \frac{x - 2}{x(x - 3)(x + 3)(x^2 + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 3} + \frac{C}{x + 3} + \frac{Dx + E}{x^2 + 1} .$$

Tirando o mmc e cancelando o denominador temos:

$$\begin{aligned} x - 2 &= A(x - 3)(x + 3)(x^2 + 1) + Bx(x + 3)(x^2 + 1) + Cx(x - 3)(x^2 + 1) \\ &\quad + (Dx + E)x(x - 3)(x + 3) . \end{aligned}$$

Para facilitar o cálculo dos coeficientes vamos usar as raízes reais e depois escolher dois outros valores para x . Assim, se $x = -3$, ou $x = 0$, ou $x = 3$, obtemos, respectivamente, $C = -1/36$, $A = 2/9$ e $B = 1/180$. Utilizando

$x = 1$, temos $D + E = -3/10$; e para $x = -1$, temos $E - D = 13/30$. Resolvendo o sistema obtido, encontramos $E = 1/15$ e $D = -11/30$. Logo,

$$\begin{aligned} \int \frac{x-2}{x(x-3)(x+3)(x^2+1)} dx &= \frac{2}{9} \int \frac{1}{x} dx + \frac{1}{180} \int \frac{1}{x-3} dx - \frac{1}{36} \int \frac{1}{x+3} dx \\ &\quad - \frac{11}{30} \int \frac{x}{x^2+1} dx + \frac{1}{15} \int \frac{1}{x^2+1} dx \\ &= \frac{2}{9} \ln|x| + \frac{1}{180} \ln|x-3| - \frac{1}{36} \ln|x+3| \\ &\quad - \frac{11}{60} \ln(x^2+1) + \frac{1}{15} \operatorname{arctg} x + C. \end{aligned}$$

□

Exemplo 5

Calcule $\int \frac{e^{3x} + 1}{(e^{2x} + 4)^2} dx$.

Solução

Primeiro fazemos a substituição $u = e^x$, onde $du = e^x dx$. Nesse caso, obtemos $\int \frac{e^{3x} + 1}{(e^{2x} + 4)^2} dx = \int \frac{u^3 + 1}{u(u^2 + 4)^2} du$. Observe que $q(u)$ já está fatorado de acordo com i) e ii) descrito anteriormente, possuindo uma raiz real $u = 0$, com multiplicidade 1, e duas complexas conjugadas com multiplicidade 2. Portanto, buscamos uma decomposição para o integrando da forma

$$\frac{u^3 + 1}{u(u^2 + 4)^2} = \frac{A}{u} + \frac{Bu + C}{u^2 + 4} + \frac{Du + E}{(u^2 + 4)^2}, \forall u \neq 0.$$

Calculando o mmc e cancelando o denominador temos

$$\begin{aligned} 1 + u^3 &= A(u^2 + 4)^2 + (Bu + C)(u^2 + 4)u + (Du + E)u \\ &= A(u^4 + 8u^2 + 16) + Bu^4 + 4Bu^2 + Cu^3 + 4Cu + Du^2 + Eu. \end{aligned}$$

Igualando os coeficientes dos termos de mesmo grau obtemos

$$A + B = 0, \quad C = 1, \quad 8A + 4B + D = 0, \quad 4C + E = 0, \quad 16A = 1.$$

Assim, $A = 1/16$, $B = -1/16$, $C = 1$, $D = -1/4$, $E = -4$. Portanto,

$$\frac{1+u^3}{u(u^2+4)^2} = \frac{1}{16u} - \frac{1}{16} \frac{u}{u^2+4} + \frac{1}{u^2+4} - \frac{1}{4} \frac{u}{(u^2+4)^2} - \frac{4}{(u^2+4)^2}.$$

Integrando separadamente, de modo que na 2ª e na 4ª integrais usamos a substituição $v = u^2 + 4$, com $dv = 2udu$, na 3ª e na última usamos substituição trigonométrica $u = 2 \operatorname{tg} \theta$, com $du = 2 \sec^2 \theta d\theta$, obtemos

$$\int \frac{u^3+1}{u(u^2+4)^2} du = \frac{1}{16} \ln|u| - \frac{1}{32} \ln(u^2+4) + \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(u/2) + \frac{1}{8(u^2+4)} - \frac{1}{4} \operatorname{arctg}(u/2) - \frac{u}{2(u^2+4)} + C.$$

Voltando à variável x , segue o resultado:

$$\int \frac{e^{3x}+1}{(e^{2x}+4)^2} dx = \frac{x}{16} - \frac{1}{32} \ln(e^{2x}+4) + \frac{1}{4} \operatorname{arctg}(e^x/2) + \frac{1}{8(e^{2x}+4)} - \frac{e^x}{2(e^{2x}+4)} + C.$$

□

2 Integração de funções racionais impróprias

Quando $f(x) = p(x)/q(x)$ é uma função racional *imprópria*, ou seja, tal que o grau de $q(x)$ é menor do que ou igual ao grau do numerador $p(x)$, primeiro efetuamos a divisão dos polinômios. Assim, obtemos

$$f(x) = g(x) + r(x)/q(x),$$

onde $g(x)$ é um polinômio e $r(x)/q(x)$ é uma função racional própria, pois $r(x)$ é o resto da divisão e tem grau menor do que o de $q(x)$. Em seguida, aplicamos o que foi feito na seção anterior a $r(x)/q(x)$ e integramos.

Exemplo 6

Calcule $\int \frac{x^3 - 2x^2 + 1}{x^2 - 5x + 6} dx$.

Solução

Dividindo o polinômio do numerador pelo denominador obtemos

$$\frac{x^3 - 2x^2 + 1}{x^2 - 5x + 6} = x + 3 + \frac{9x - 17}{x^2 - 5x + 6}$$

Agora, vamos decompor a função racional própria, obtida nesta divisão, em frações parciais, então:

$$\frac{9x - 17}{x^2 - 5x + 6} = \frac{9x - 17}{(x - 2)(x - 3)} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x - 3};$$

tal que $9x - 17 = A(x - 3) + B(x - 2)$. Substituindo pelas raízes $x = 2$ e $x = 3$, encontraremos $A = -1$ e $B = 10$. Logo,

$$\frac{9x - 17}{x^2 - 5x + 6} = \frac{-1}{x - 2} + \frac{10}{x - 3}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 - 2x^2 + 1}{x^2 - 5x + 6} dx &= \int x + 3 dx + \int \frac{-1}{x - 2} dx + \int \frac{10}{x - 3} dx \\ &= \frac{x^2}{2} + 3x - \ln|x - 2| + 10 \ln|x - 3| + C. \end{aligned}$$

□

Exemplo 7

Calcule $\int \frac{x^2}{x^2 + 1} dx$.

Solução

Dividindo x^2 por $x^2 + 1$ obtemos $\frac{x^2}{x^2 + 1} = 1 - \frac{1}{x^2 + 1}$. Observe que a função racional própria obtida já é uma fração parcial. Assim,

$$\int \frac{x^2}{x^2 + 1} dx = \int 1 dx - \int \frac{1}{x^2 + 1} dx = x - \arctg x + C.$$

□

Observação 1

- Observe que podemos combinar diversas formas de cálculo dos coeficientes das frações parciais. Para tanto, usamos as raízes reais (se existirem) e atribuímos valores à variável. Ou, atribuímos valores à variável e igualamos os coeficientes dos termos de mesmo grau.
- Você vai notar que a decomposição de $q(x)$ nem sempre é fácil, pois envolve o conhecimento de suas raízes, o que pode ser um problema difícil.
- Veremos nos exercícios propostos e nas aulas seguintes que há integrais que não são de funções racionais, porém, fazendo uma substituição, somos levados a uma integral de uma função racional na nova variável.

3 Exercícios de revisão

Calcule as integrais.

1. $\int \frac{dx}{x^2 - 5x + 4};$
2. $\int \frac{x + 3}{2x^3 - 8x} dx;$
3. $\int \frac{x^3}{x^2 - 2x + 1} dx;$
4. $\int \frac{dx}{(x^2 - 1)^2};$
5. $\int \frac{s^4 + 81}{s(s^2 + 9)^2} ds;$
6. $\int \frac{y^4 + y^2 - 1}{y^3 + y} dy;$
7. $\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x + \cos x - 2} dx;$
8. $\int x^4 \operatorname{arctg} x dx;$
9. $\int \frac{x^3 + 1}{(x + 1)^3} dx;$
10. $\int \frac{dx}{x^3 + 1}.$

Aula 9

Substituições diversas

Nesta aula, concluímos o nosso estudo de técnicas de integração com três casos particulares de substituição, úteis na integração de: funções racionais de potências racionais de x , funções racionais de senos e cossenos e binômios da forma $x^m(a - bx^n)^p$, respectivamente.

1 Conceitos básicos

Função racional de potências racionais de x : A seguir veremos como transformar a integral de uma função racional de potências **racionais** de x (por exemplo $\int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{1+x^{\frac{3}{2}}} dx$) em uma integral de uma função racional.

Suponhamos que estejamos interessados em calcular a integral de uma função envolvendo as funções $x^{\frac{p_1}{q_1}}, \dots, x^{\frac{p_j}{q_j}}$. Nesse caso, consideramos a substituição

$$x = t^k \quad ; \quad dx = kt^{k-1} dt,$$

onde k é o mínimo comum múltiplo de q_1, \dots, q_j . De maneira que cada potência **racional** se transforme em uma potência inteira.

Exemplo 1

Calcule $\int \frac{x^{1/2} dx}{x^{3/4} + 1}$.

Solução

Dado que 4 é o m.c.m de $\{2, 4\}$, podemos considerar a substituição

$$x = t^4 \quad ; \quad dx = 4t^3 dt .$$

Então,

$$\int \frac{x^{1/2} dx}{x^{3/4} + 1} = \int \frac{t^2(4t^3) dt}{t^3 + 1} = 4 \int \left[t^2 - \frac{t^2}{t^3 + 1} \right] dt,$$

logo,

$$\int \frac{x^{1/2} dx}{x^{3/4} + 1} = \frac{4}{3}t^3 - \frac{4}{3} \ln |t^3 + 1| + C.$$

Para retornar à variável x , usamos $t = x^{1/4}$, assim

$$\int \frac{x^{1/2} dx}{x^{3/4} + 1} = \frac{4}{3}x^{3/4} - \frac{4}{3} \ln(x^{3/4} + 1) + C.$$

□

Exemplo 2

Calcular $\int \frac{\sqrt{x+4}}{x} dx$.

Solução

Começamos fazendo a substituição $u = x + 4$; $du = dx$, o que nos leva a

$$\int \frac{\sqrt{x+4}}{x} dx = \int \frac{\sqrt{u}}{u-4} du.$$

Considerando a substituição,

$$u = t^2 \quad ; \quad du = 2t dt$$

temos,

$$\int \frac{\sqrt{u}}{u-4} du = \int \frac{t(2t)}{t^2-4} dt = 2 \left[\int dt + \int \frac{1}{t-2} dt - \int \frac{1}{t+2} dt \right],$$

logo,

$$\int \frac{\sqrt{x+4}}{x} dx = 2t + \ln \left| \frac{t-2}{t+2} \right| + C.$$

Para retornar à variável x , usamos $t = \sqrt{x+4}$, assim

$$\int \frac{\sqrt{x+4}}{x} dx = 2\sqrt{x+4} + 2 \ln \left| \frac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+4}+2} \right| + C.$$

□

Função racional de senos e cossenos: A seguir, veremos que a substituição

$$z = \operatorname{tg}(x/2) \quad ; \quad dz = \frac{1}{2} \sec^2(x/2) dx \quad (1)$$

transforma a integral de uma função racional de $\operatorname{sen} x$ e $\operatorname{cos} x$ (por exemplo $\int \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \operatorname{cos} x} dx$) em uma integral de uma função racional em z , que podemos tentar resolver usando frações parciais.

Observe que com a substituição (1) temos

$$dx = \frac{2 dz}{1+z^2}, \quad \operatorname{sen} x = \frac{2z}{1+z^2} \quad e \quad \operatorname{cos} x = \frac{1-z^2}{1+z^2}. \quad (2)$$

A primeira igualdade decorre diretamente de (1), e para verificar as outras duas usamos as identidades trigonométricas, dadas no início da Aula 6, da seguinte maneira:

$$\operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen}(x/2) \operatorname{cos}(x/2) = \frac{2 \operatorname{tg}(x/2)}{\sec^2(x/2)} = \frac{2 \operatorname{tg}(x/2)}{1 + \operatorname{tg}^2(x/2)},$$

e

$$\operatorname{cos} x = 2 \operatorname{cos}^2(x/2) - 1 = \frac{2}{\sec^2(x/2)} - 1 = \frac{1 - \operatorname{tg}^2(x/2)}{1 + \operatorname{tg}^2(x/2)}.$$

Exemplo 3

Calcule $\int \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x} dx$.

Solução

Considerando a substituição (1) e usando (2) temos

$$\int \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x} dx = \int \frac{\frac{2z}{1+z^2}}{1 + \frac{1-z^2}{1+z^2}} \frac{2}{1+z^2} dz = \int \frac{2z}{1+z^2} dz,$$

logo,

$$\int \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x} dx = \ln(1 + z^2) + C.$$

Assim, retornando à variável x , obtemos

$$\int \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x} dx = \ln(\sec^2(x/2)) + C.$$

□

Observação 1

Para verificar o resultado anterior, basta derivar e usar as seguintes identidades:

$$\operatorname{sen}(x/2) = \frac{\sqrt{2} \operatorname{sen} x}{2\sqrt{1 + \cos x}} \quad , \quad \cos(x/2) = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}.$$

Exemplo 4

Calcule $\int \frac{dx}{4 - 5 \operatorname{sen} x}$.

Solução

Considerando a substituição (1) e usando (2), temos

$$\int \frac{dx}{4 - 5 \operatorname{sen} x} = \int \frac{1}{[4 - 5(\frac{2z}{1+z^2})]} \frac{2 dz}{1+z^2} = \int \frac{dz}{2z^2 - 5z + 2}$$

Usando frações parciais, temos

$$\int \frac{dz}{2z^2 - 5z + 2} = 1/3 \int \frac{dz}{z - 2} - 1/3 \int \frac{dz}{z - 1/2}$$

logo,

$$\int \frac{dx}{4 - 5 \operatorname{sen} x} = 1/3 \ln |z - 2| - 1/3 \ln |z - 1/2| + C.$$

Assim, retornando à variável x , obtemos

$$\int \frac{dx}{4 - 5 \operatorname{sen} x} = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{\operatorname{tg}(x/2) - 2}{\operatorname{tg}(x/2) - 1/2} \right| + C.$$

□

Binômio $x^m(a - bx^n)^p$: A seguir, estudaremos, mediante 3 exemplos, a integral indefinida do binômio $x^m(a - bx^n)^p$, onde a e b são números reais e m, n e p são números racionais.

Exemplo 5 ($p = -1$)

$$\int x^{-2/3}(1 + x^{2/3})^{-1} dx.$$

Solução

Começamos considerando a substituição $z = x^{2/3}$, obtendo

$$\frac{3}{2} \int z^{-1/2}(1 + z)^{-1} dz.$$

Assim, fazendo a substituição $z = t^2$, obtemos

$$\frac{3}{2} \int t^{-1}(1 + t^2)^{-1}(2t) dt = 3 \int (1 + t^2)^{-1} dt = 3 \operatorname{arctg} t + C.$$

Então,

$$\int x^{-2/3}(1 + x^{2/3})^{-1} dx = 3 \operatorname{arctg}(\sqrt{z}) + C = 3 \operatorname{arctg}(x^{1/3}) + C.$$

□

Exemplo 6 ($p + \frac{m+1}{n} = -2$)

$$\int \frac{1}{x^2(1+x^2)^{3/2}} dx.$$

Solução

Começamos considerando a substituição $z = x^2$, obtendo

$$\frac{1}{2} \int z^{-\frac{3}{2}}(1+z)^{-\frac{3}{2}} dz = \frac{1}{2} \int z^{-3} \left(\frac{1+z}{z}\right)^{-\frac{3}{2}} dz .$$

Assim, fazendo a substituição $t = \left(\frac{1+z}{z}\right)^{\frac{1}{2}}$, obtemos

$$- \int \frac{t^2 - 1}{t^2} = -t - \frac{1}{t} + C.$$

Então,

$$\int x^{1/3}(2+x^{2/3})^{1/4} dx = -\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C$$

□

Exemplo 7 ($\frac{m+1}{n} = 2$)

$$\int (1+x^{1/2})^{3/4} dx$$

Solução

Fazendo a substituição $t = 1 + x^{\frac{1}{2}}$, obtemos

$$\int (1+x^{1/2})^{3/4} dx = 2 \int t^{3/4}(t-1) dt.$$

Então,

$$\int (1+x^{1/2})^{3/4} dx = \frac{8}{11}(1+x^{\frac{1}{2}})^{11/4} - \frac{8}{7}(1+x^{\frac{1}{2}})^{7/4} + C .$$

□

Terminamos nosso percurso pelas técnicas de integração enunciando o Teorema 1, que nos lembra de que nem sempre uma integral indefinida pode ser expressa em termos de funções elementares. Isto é, aquelas funções que podem ser escritas envolvendo apenas operações elementares (soma, subtração, multiplicação, divisão e raiz), entre as funções polinomiais, exponenciais, trigonométricas e suas respectivas funções inversas.

Teorema 1 (P.L Chebyshev, 1853)

A integral indefinida do binômio $x^m(a - bx^n)^p$, onde a e b são números reais e m, n e p são números racionais, somente pode ser escrita em termos de funções elementares, no caso em que pelo menos um dos seguintes números for inteiro: p , $\frac{m+1}{n}$ e $p + \frac{(m+1)}{n}$.

2 Exercícios de revisão

Calcule as seguintes integrais.

1. $\int \frac{1}{1 + \operatorname{sen} x} dx;$
2. $\int \frac{1}{1 + \operatorname{cos} x} dx;$
3. $\int \frac{1}{\operatorname{cos} x + \operatorname{sen} x} dx;$
4. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3 + 1}} dx;$
5. $\int \frac{\sqrt{x^3} - \sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x}} dx;$
6. $\int \frac{1}{\sqrt[4]{x} + \sqrt{x}} dx;$
7. $\int (1 + x^2)^{-\frac{3}{2}} dx;$
8. $\int x^5(1 + x^3)^{\frac{2}{3}} dx;$
9. $\int x^{-2/3}(1 + x^{1/3})^{\frac{1}{2}} dx.$

Aula 10

Volumes de sólidos de revolução usando o método dos discos

Nesta aula e na próxima, vamos aplicar o conceito de integral definida para calcular volumes de alguns sólidos especiais, chamados de *sólidos de revolução*. Esses sólidos são obtidos quando giramos regiões do plano em torno de retas.

1 Rotação de região entre o gráfico de uma função e o eixo de revolução

Consideremos o problema de calcular o volume do sólido S gerado ao girarmos, em torno do eixo x , a região R entre o eixo x e o gráfico de uma função positiva e limitada f , no intervalo $[a, b]$, veja as Figuras abaixo .

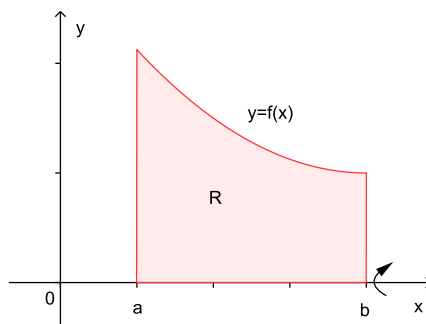


Figura 1: Região R.

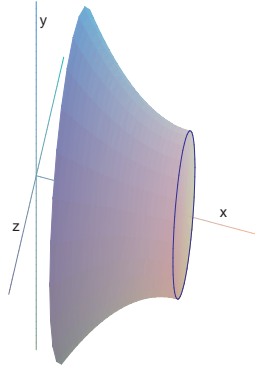


Figura 2: Sólido de revolução \mathbf{S} obtido ao girar R em torno do eixo x .

Uma ideia natural para calcular o volume do sólido \mathbf{S} é aplicar o mesmo método da Aula 1, aproximá-lo por uma novo sólido cujo volume possa ser facilmente calculado, como, por exemplo, uma união de cilindros. Assim, vamos tomar a partição pontilhada $\mathcal{P} = (\{t_0, t_1, \dots, t_{n-1}, t_n\}, \{t_1^*, \dots, t_{n-1}^*, t_n^*\})$ e a união de n retângulos associada, cujas bases e alturas são dadas pelos intervalos $[t_0, t_1], [t_1, t_2], \dots, [t_{n-1}, b]$ e os valores $\{f(t_1^*), f(t_2^*), \dots, t_n^*\}$, respectivamente, onde $\{a = t_0 < t_1^* < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n^* < t_n = b\}$. A união de retângulos, obtida dessa forma, aproxima a área da região R e portanto, quando essa união é girada em torno do eixo x nos dá uma aproximação do volume do sólido \mathbf{S} desejado, veja as Figuras 3 e 4.

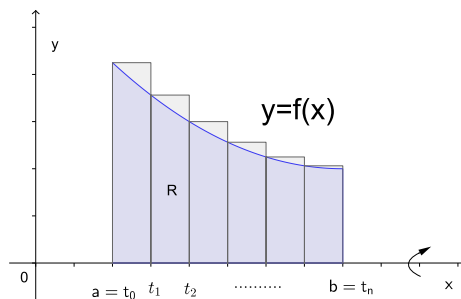


Figura 3: Região R aproximada por retângulo de altura $f(t_i)$, $i = 0, \dots, n - 1$. Por simplicidade, $t_i = (t_i)^*$.

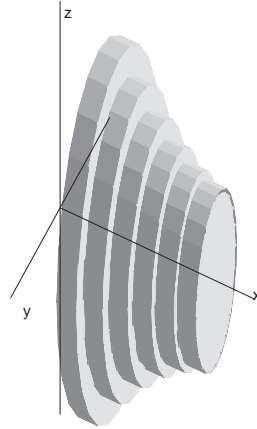


Figura 4: Sólido de revolução, cujo volume aproxima o volume de S .

No limite, quando a norma da partição tende a zero teremos exatamente o volume do sólido S obtido ao girarmos R em torno do eixo x .

Observe que quando giramos os retângulos, cada um formará um cilindro (sólido) de raio $r = f(t_i^*)$ e altura $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, cujo volume é dado por $V_i = \pi(f(t_i^*))^2 \Delta t_i$. Juntando os retângulos, estaremos aproximando o sólido por cilindros (ou "discos fininhos") postos um ao lado do outro, como nos mostra a Figura 4. Logo, o volume do sólido de revolução é dado por

$$V(S) = \lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \pi [f(t_i^*)]^2 \Delta t_i,$$

desde que esse limite exista. Observe que o limite obtido é de somas de Riemann da função πf^2 .

Desta forma, chegamos à definição a seguir.

Definição 1

O Volume do sólido de revolução S obtido girando a região R , entre o gráfico

de uma função integrável $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, e o eixo x , é definido como

$$V(S) = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx, \quad (1)$$

Observação 1

- A definição (1) anterior vale para funções f não positivas (Ver Exemplo 2 abaixo.), sem modificações.
- Tomando uma seção transversal do sólido na abscissa x , obtemos um disco de raio $r(x) = |f(x)|$, então na fórmula do volume podemos escrever

$$V(S) = \pi \int_a^b [r(x)]^2 dx.$$

Exemplo 1

Calcule o volume do sólido de revolução obtido girando a região R entre o gráfico de $y = \sqrt{x}$ e o eixo x para $x \in [0, 2]$.

Solução

Vamos girar a região R esboçada abaixo na Figura 5.

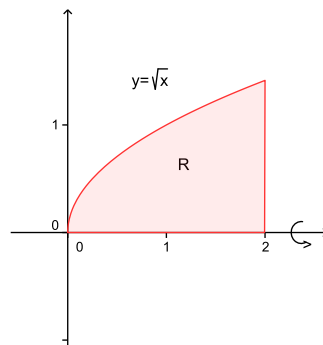


Figura 5: Região R de Exemplo 1.

Então, nesse caso $r(x) = \sqrt{x}$ e

$$V = \pi \int_0^2 (\sqrt{x})^2 dx = \pi \int_0^2 x dx = \pi \frac{x^2}{2} \Big|_0^2 = 2\pi u.v ,$$

onde $u.v$ significa unidades de volume. \square

Exemplo 2

Calcule o volume do sólido de revolução obtido girando a região R entre o gráfico de $y = \sin 2x$ e o eixo x para $x \in [0, \pi]$.

Solução

Vamos girar a região R esboçada abaixo na Figura 6. Então, temos $r(x) = |\sin 2x|$

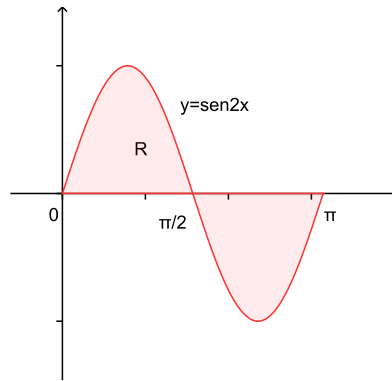


Figura 6: Região R de Exemplo 2.

$$V = \pi \int_0^{\pi} \sin^2(2x) \, dx = \pi \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 4x}{2} \, dx = \frac{\pi}{2} \left[x - \frac{\sin 4x}{4} \right] \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2} \, u.v .$$

\square

Podemos usar o raciocínio anterior para o cálculo do volume obtido ao girarmos uma região R entre o gráfico de uma função $y = f(x)$, $x \in [a, b]$, e uma reta horizontal $y = c$, em torno da mesma reta. De fato, tal volume será igual ao volume obtido ao rodarmos a região \bar{R} entre o gráfico da translação vertical da função f , a saber, $y = f(x) - c$, para $x \in [a, b]$, e o eixo x , veja as Figuras 7 e 8 abaixo. Portanto, o raio $r(x) = |f(x) - c|$ e

$$V = \pi \int_a^b (f(x) - c)^2 \, dx, \quad (2)$$

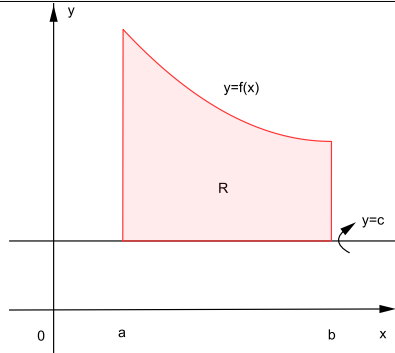


Figura 7: Região R a ser girada em torno da reta $y=c$

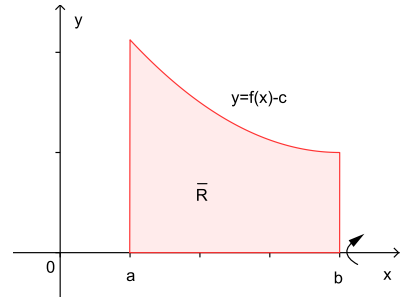


Figura 8: Região \bar{R} , translação de R, será girada em torno do eixo x .

Exemplo 3

Calcule o volume do sólido de revolução obtido girando a região R entre o gráfico de $y = e^x$, para $x \in [0, 1]$, e a reta $y = 1$, em torno da reta $y = 1$.

Solução

A Figura 9 mostra um esboço da região R que vamos girar.

Então, de (2), temos que $r(x) = e^x - 1$ e

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 (e^x - 1)^2 dx = \pi \int_0^1 e^{2x} - 2e^x + 1 dx \\ &= \pi \left[\frac{e^{2x}}{2} - 2e^x + x \right]_0^1 = \frac{\pi}{2} [e^2 - 4e + 5] u.v. \end{aligned}$$

□

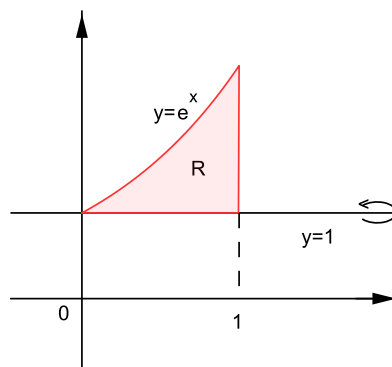


Figura 9: Região R do Exemplo 3.

Exemplo 4

Calcule o volume do sólido de revolução, obtido girando a região R entre o gráfico de $y = \operatorname{tg} x$, para $x \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$, e a reta $y = -1$, em torno da reta $y = -1$.

Solução

A Figura 10 mostra um esboço da região R que vamos girar.

Então, de (2), temos $r(x) = \operatorname{tg} x + 1$ e

$$V = \pi \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x + 1)^2 dx = \pi \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^2 x + 2 \operatorname{tg} x + 1 dx .$$

Usando a identidade $\operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x - 1$, segue que

$$V = \pi \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x + 2 \operatorname{tg} x dx = \pi [\operatorname{tg} x + 2 \ln |\sec x|] \Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = 2\pi \text{ u.v.}$$

□

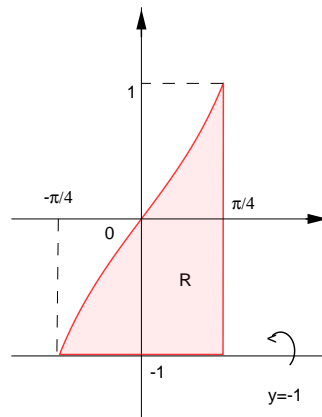


Figura 10: Região R do Exemplo 4.

2 Rotação de região entre dois gráficos

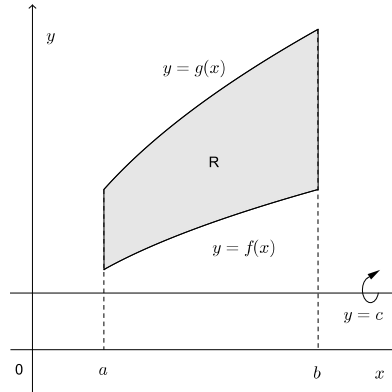


Figura 11: A região R , entre dois gráficos será girada em torno da reta $y=c$.

Considere duas funções f e g em $[a, b]$, com $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in [a, b]$ e uma reta $y = c$, conforme a Figura 11 acima. Quando giramos a região R , entre os dois gráficos, em torno da reta $y = c$, obtemos um sólido de revolução vazado ("com buraco").

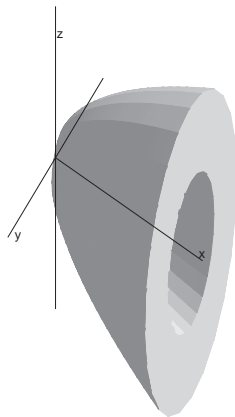


Figura 12: Sólido de revolução vazado ("com buraco").

Podemos calcular seu volume fazendo a diferença entre o volume obtido girando a região de $y = g(x)$ à reta $y = c$ (com raio $R(x) = g(x) - c$) e o volume obtido girando a região de $y = f(x)$ à mesma reta (com raio $r(x) = f(x) - c$). Isto é, do volume do sólido de fora, associado ao raio maior $R(x)$, subtraímos o volume do sólido de dentro (do buraco), associado ao raio

menor $r(x)$. Assim, obtemos a fórmula

$$V = \pi \int_a^b (g(x) - c)^2 - (f(x) - c)^2 dx = \pi \int_a^b R^2(x) - r^2(x) dx .$$

Exemplo 5

Calcule o volume do sólido de revolução, obtido girando a região R entre os gráficos de $y = 4 - x^2$ e $y = 2 - x$, em torno da reta $y = -2$.

Solução

Primeiro calculamos as interseções entre os gráficos,

$$4 - x^2 = 2 - x \Leftrightarrow x = 2 \text{ ou } x = -1 .$$

Observe que $R(x) = 4 - x^2 - (-2) = 6 - x^2$ e $r(x) = 2 - x - (-2) = 4 - x$. Logo,

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-1}^2 (6 - x^2)^2 - (4 - x)^2 dx = \pi \int_{-1}^2 36 - 12x^2 + x^4 - 16 + 8x - x^2 dx \\ &= \pi \int_{-1}^2 20 - 13x^2 + x^4 + 8x dx = \left[20x - \frac{13x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + 4x^2 \right]_{-1}^2 = \frac{198\pi}{5} \end{aligned}$$

□

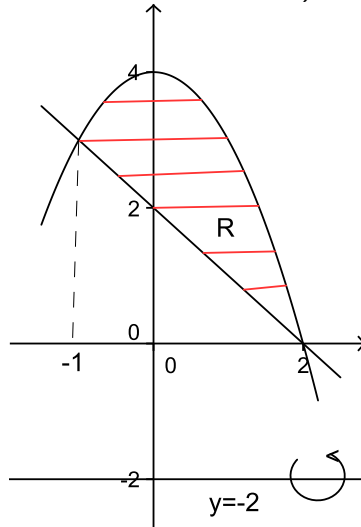


Figura 13: Região R do Exemplo 5.

Observação 2

Podemos rodar regiões em torno de retas verticais $x = c$, veja a Figura 14. O raciocínio é o mesmo do caso visto, considerando funções da variável

y . Assim, o volume do sólido gerado por uma região entre dois gráficos de $x = g(y)$ e $x = f(y)$, para $y \in [a, b]$, em torno da reta $x = c$, é escrito como

$$V = \pi \int_a^b (g(y) - c)^2 - (f(y) - c)^2 dy = \pi \int_a^b R^2(y) - r^2(y) dy$$

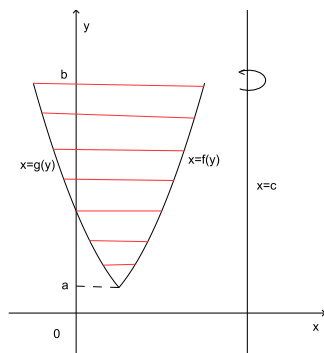


Figura 14: Região R entre dois gráficos de funções de y , girada em torno da reta $x = c$.

Exemplo 6

Calcule o volume do sólido de revolução, obtido girando a região R entre os gráficos de $y = \sqrt{x}$ e $y = x$ em torno da reta $x = 1$.

Solução

Como $y = \sqrt{x}$, então $x = y^2$. Portanto,

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 (y^2 - 1)^2 - (y - 1)^2 dy = \pi \int_0^1 y^4 - 2y^2 + 1 - y^2 + 2y - 1 dy \\ &= \pi \int_0^1 y^4 - 3y^2 + 2y dy = \pi \left[\frac{y^5}{5} - y^3 + y^2 \right]_0^1 = \frac{\pi}{5} \end{aligned}$$

□

Exemplo 7

Calcule o volume do sólido de revolução, obtido girando a região R entre os gráficos de $y = 4 - x^2$ e $y = 2 - x$, em torno da reta $x = 2$.

Solução

Precisamos dividir a região em duas, a primeira será R_1 e a segunda R_2 , conforme a Figura 16. Assim, em R_1 o raio maior é dado por $R_1 = 2 - (-\sqrt{4 - y})$,

$y \in [3, 4]$ e o menor $r_1 = 2 - \sqrt{4-y}$, $y \in [3, 4]$. Em R_2 , temos o raio maior igual a $R_2 = 2 - (2-y)$ e o menor $r_2 = r_1 = 2 - \sqrt{4-y}$, para $y \in [0, 3]$. Logo, $V = V_1 + V_2$ onde

$$\begin{aligned} V_1 &= \pi \int_3^4 [2 - (-\sqrt{4-y})^2 - (2 - \sqrt{4-y})^2] dy \\ &= \pi \int_3^4 8\sqrt{4-y} dy = \frac{16\pi}{3} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} V_2 &= \pi \int_0^3 [2 - (2-y)]^2 - (2 - \sqrt{4-y})^2 dy \\ &= \pi \int_0^3 8 + 9y + y^2 + 4\sqrt{4-y} dy = \frac{553\pi}{6} \end{aligned}$$

□

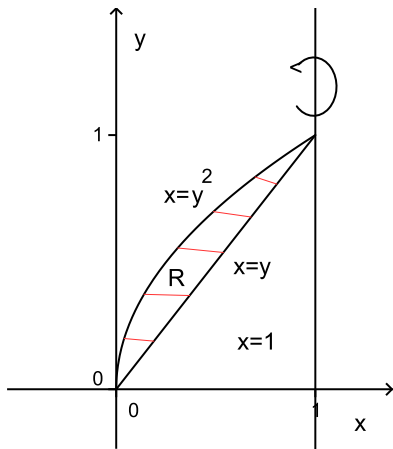


Figura 15: Região R do Exemplo 6.

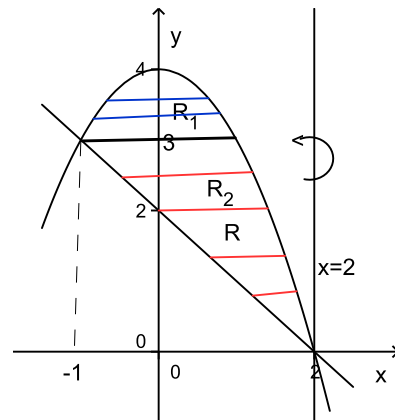


Figura 16: Região R do Exemplo 7.

Observação 3

Há volumes que não conseguimos calcular pelo método dos discos ou que são de cálculo complicado. Na próxima aula veremos outro método, baseado em volumes de cascas cilíndricas, que nos dará uma alternativa ao cálculo de volumes de sólidos de revolução.

3 Exercícios de revisão

Calcule o volume do sólido de revolução, obtido ao girar a região R dada em torno do eixo de revolução indicado.

1. Entre $y = x$ e $y = 5x - x^2$, em torno de $x = 4$;
2. Entre $y = x$ e $y = 5x - x^2$, em torno de $y = 0$;
3. Entre $x = y^2 - 4y$ e $x = 2y - y^2$, em torno de $x = -4$;
4. Entre $y = \sqrt{25 - x^2}$, $y = 0$, $x = 2$ e $x = 4$, em torno de $y = 0$;
5. Entre $y = e^{-x}$, $x = 2$ e $y = 1$, em torno de $y = 2$;
6. Entre $y = \ln x$, $y = 1$, $y = 2$ e $x = 0$, em torno do eixo y ;
7. Demonstre que o volume de uma esfera de raio $r > 0$ é dado por $V = \frac{4}{3}\pi r^3$;
8. Descreva o sólido, cujo volume é dado pela integral $V = \pi \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos x)^2 dx$.

Aula 11

Volumes de sólidos de revolução por cascas cilíndricas

Na aula anterior, usamos o método dos discos para calcular volumes de sólidos de revolução. No caso de sólidos não vazados, quando giramos uma região em torno de um eixo horizontal, esse método consistiu em aproximar o sólido por discos "fininhos" colocados um ao lado do outro perpendicularmente ao eixo de revolução. A ideia agora, para o método das cascas será aproximar o sólido usando cascas cilíndricas ("canos fininhos"), centradas no eixo de revolução, colocadas uma dentro da outra.

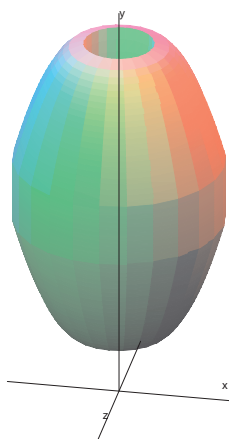


Figura 1: Sólido de revolução S , obtido girando uma região do plano xy em torno do eixo y (vertical).



Figura 2: Aproximação do sólido S usando cascas cilíndricas.

1 Rotação de região entre dois gráfico em torno de um eixo vertical

Uma casca cilíndrica é o sólido entre dois cilindros de mesmo centro e altura. Chamando de R e r , respectivamente, o raio maior e o menor da casca cilíndrica de altura h , temos que seu volume é dado por

$$V = \pi R^2 h - \pi r^2 h = \pi h(R + r)(R - r) \quad (1)$$

Considere R a região entre dois gráficos de f e g , funções integráveis em $[a, b]$, onde $g(x) \leq f(x)$, $\forall x \in [a, b]$. Vamos girá-la em torno da reta $x = c$, veja a Figura 3.

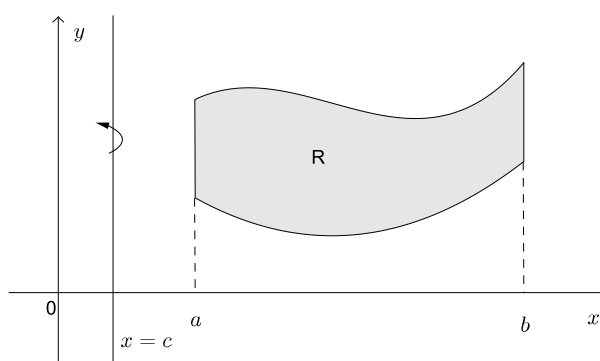


Figura 3: Região R que será girada em torno da reta $x = c$.

Para aproximar o volume do sólido obtido, construímos retângulos através de partições $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$, de $[a, b]$, escolhendo as alturas dos retângulos $h = g(c_i) - f(c_i)$, onde $c_i = x_{i-1} + \frac{\Delta x_i}{2}$ ou $c_i = x_i - \frac{\Delta x_i}{2}$. Isto é, cada c_i é o ponto médio do intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, veja a Figura 4 abaixo.

Girando cada retângulo, obtemos cascas cilíndricas uma dentro da outra. Cada casca tem raio maior $R = x_i - c = c_i + \frac{\Delta x_i}{2} - c$, raio menor $r = x_{i-1} - c = c_i - \frac{\Delta x_i}{2} - c$ e altura $h = g(c_i) - f(c_i)$. A soma dos volumes

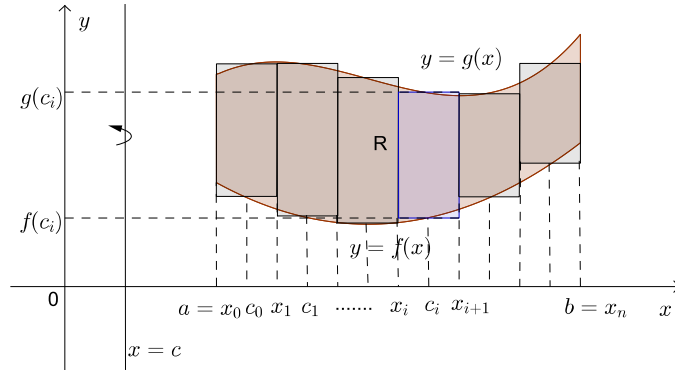


Figura 4: Região R é aproximada por retângulos. Girando os retângulos, temos uma aproximação do sólido S por cascas cilíndricas.

dessas cascas aproxima o volume do sólido desejado, portanto, usando (1), temos a aproximação

$$V(S) \simeq \sum_{i=1}^n 2\pi[g(c_i) - f(c_i)](c_i - c)\Delta x_i \quad (2)$$

No limite, quando a norma da partição tende a zero, como f e g são integráveis em $[a, b]$, sendo o somatório em (2) uma soma de Riemann, temos que

$$V(S) = \lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n 2\pi(c_i - c)[g(c_i) - f(c_i)]\Delta x_i .$$

Logo,

$$V(S) = 2\pi \int_a^b (x - c)[g(x) - f(x)] dx$$

A fórmula anterior vale quando a região se encontra à direita do eixo de revolução. Se estiver à esquerda, é só trocar $x - c$ por $c - x$ no desenvolvimento acima. Assim, em geral, temos

$$V(S) = 2\pi \int_a^b |x - c|[g(x) - f(x)] dx \quad (3)$$

Observação 1

- Podemos pensar em (3) como

$$V(S) = 2\pi \int_a^b (\text{raio da casca})(\text{altura da casca}) dx .$$

- Se girarmos uma região entre o gráfico de uma função $g \geq 0$ e o eixo x , para $x \in [a, b]$, em torno do eixo y , então

$$V = 2\pi \int_a^b |x|g(x) dx,$$

pois o eixo de revolução é a reta $x = 0$ e a f , que está abaixo, é identicamente nula.

- Também, podemos girar uma região entre dois gráficos de funções $f(y) \leq g(y)$, para $y \in [a, b]$, em torno de retas horizontais $y = c$, conforme a Figura 5. Nesse caso, o volume é dado de forma análoga a (3), trocando x por y

$$V(S) = 2\pi \int_a^b |y - c|[g(y) - f(y)] dy.$$

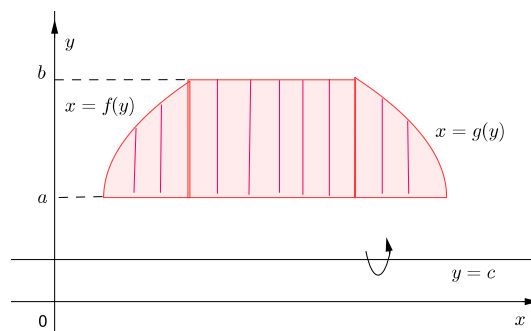


Figura 5: Região entre dois gráficos de funções de y , que será girada em torno de uma reta horizontal.

Exemplo 1

Calcule o volume do sólido de revolução, obtido girando a região R do 1º quadrante, entre os gráfico de $y = 4$ e $y = x^2$, em torno do eixo y .

Solução

Note que a altura $h = 4 - x^2$ e o raio $r = x$, portanto

$$V = 2\pi \int_0^2 x(4 - x^2) dx = 2\pi \left(\frac{4x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^2 = 8\pi.$$

□

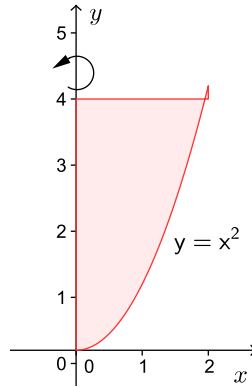


Figura 6: Região R do Exemplo 1.

Exemplo 2

Calcule o volume do sólido de revolução, obtido girando o interior círculo dado por $x^2 - 6x + y^2 = 0$, em torno da reta $x = -1$. Esse sólido é chamado de *Toro* e se parece com uma "boia" ou "rosquinha".

Solução

Observe que completando o quadrado temos a equação do círculo é $(x-3)^2 + y^2 = 9$, cujo raio é 3 e o centro é $(3,0)$. Para simplificar os cálculos, vamos dividir a região a ser girada em duas e multiplicar a expressão do volume por 2.

Assim, a altura $h = \sqrt{9 - (x-3)^2}$ e $r = x + 1$, então

$$V = 2 \times 2\pi \int_0^6 (x+1) \sqrt{9 - (x-3)^2} dx .$$

Para o cálculo dessa integral, usamos substituição trigonométrica $x-3 = 3 \operatorname{sen} \theta$, então

$$\begin{aligned} V &= 4\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (4 + 3 \operatorname{sen} \theta) 9 \cos^2 \theta \, d\theta \\ &= 144\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \theta \, d\theta + 108\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \theta \operatorname{sen} \theta \, d\theta \\ &= 144\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \, d\theta - 108\pi \int_0^0 u^2 \, du \\ &= 72\pi \left[\theta + \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{2} \right] \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} - 0 = 72\pi^2 . \end{aligned}$$

□

Exemplo 3

Esse exemplo mostra que nem sempre podemos escolher o método para o cálculo do volume. Considere a região R entre o gráfico de $f(x) = x^5 + x^2 + x + 2$ e o eixo x , para $x \in [0, 1]$. Determine o volume do sólido gerado ao rodarmos R em torno do eixo y .

Solução

Usando cascas cilíndricas, temos $h = x^5 + x^2 + x + 2$ e $r = x$, logo

$$V = 2\pi \int_0^1 x(x^5 + x^2 + x + 2) \, dx = 2\pi \left(\frac{x^7}{7} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + x^2 \right) \Big|_0^1 = \frac{1216\pi}{21} .$$

Observe que nesse exemplo não poderíamos usar o método dos discos circulares, estudado na aula anterior, pois não sabemos inverter a f para integrar em y . □

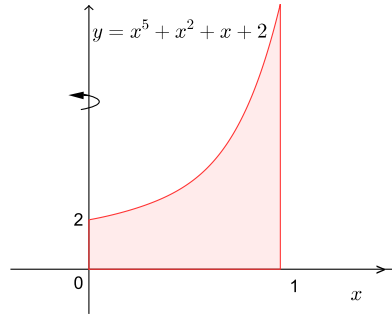


Figura 7: Região R do Exemplo 3.

Exemplo 4

Considere a região R da Figura abaixo.

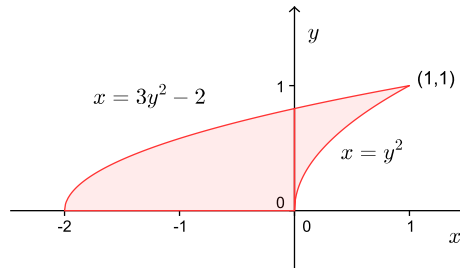


Figura 8: Região R do Exemplo 4.

Determine o volume do sólido gerado ao rodarmos R em torno do eixo x , utilizando

a) cascas cilíndricas, b) discos circulares.

Solução

a) Observe que a altura $h = y^2 - (3y^2 - 2)$ e o raio $r = y$, logo

$$V = 2\pi \int_0^1 y[y^2 - (3y^2 - 2)] dy = 2\pi \int_0^1 -2y^3 + 2y dy = \pi .$$

b) Nesse caso, será o volume do que roda por fora, com raio $R = \sqrt{\frac{x+2}{3}}$

menos o volume do buraco, com raio $r = \sqrt{x}$. Ou seja,

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-2}^1 \left(\sqrt{\frac{x+2}{3}} \right)^2 dx - \pi \int_0^1 (\sqrt{x})^2 dx \\ &= \pi \int_{-2}^1 \frac{x+2}{3} dx - \pi \int_0^1 x dx = \pi \end{aligned}$$

□

2 Exercícios de revisão

Calcule o volume do sólido de revolução, obtido ao girar a região R dada em torno do eixo de revolução indicado.

1. Entre $y = x$ e $y = 5x - x^2$, em torno de $x = 4$;
2. Entre $y = x$ e $y = 5x - x^2$, em torno de $y = 0$;
3. Entre $x = y^2 - 4y$ e $x = 2y - y^2$, em torno de $x = -4$;
4. Entre $y = \sqrt{25 - x^2}$ e $y = 0$, em torno de $y = 0$;
5. Entre $y = e^{-x}$, $x = 2$ e $y = 1$, em torno de $y = 2$;
6. Entre $y = \ln x$, $y = 1$, $y = 2$ e $x = 0$, em torno do eixo x ;
7. Entre $y = \ln x$, $y = 1$, $y = 2$ e $x = 0$, em torno do eixo y ;

Aula 12

Comprimento de arco

Nesta aula, estudaremos o conceito de comprimento de arco.

1 Conceitos básicos

Nós aprendemos na escola que o comprimento do arco de uma circunferência de raio r é $2\pi r$. Isso significa que, por exemplo, para cercar uma pista circular de raio 10 metros, precisamos de uma corda de $20\pi \approx 62,8318$ metros. A história dessa fórmula é longa e fascinante, e está muito relacionada à história do número π .

Mas, afinal, o que é exatamente o comprimento de arco de uma circunferência? Sabemos o que é o comprimento de um segmento, e para definir o comprimento da circunferência, recorremos a polígonos que de alguma maneira sejam parecidos com a circunferência. Por exemplo, na Figura ?? vemos polígonos regulares de 8, 16 e 32 lados.

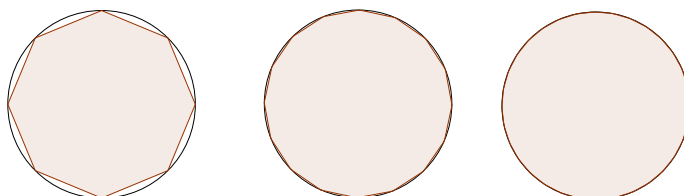


Figura 1: Aproximação de um círculo.

Quando aumentamos a quantidade de lados, os polígonos ficam cada vez mais parecidos com a circunferência. Logo, parece natural definir o comprimento da circunferência como sendo o limite dos perímetros dos polígonos regulares inscritos.

Em geral, para definir o comprimento de arco de uma curva C qualquer, podemos tentar aproximar a dita curva por meio de um caminho poligonal. Vamos nos restringir ao caso de uma curva C dada pelo gráfico de uma função contínua $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Nesse caso, toda aproximação poligonal é determinada por uma partição $\mathcal{P} = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b\}$, mediante o conjunto de pontos $\{(t, f(t))\}_{t \in \mathcal{P}}$.

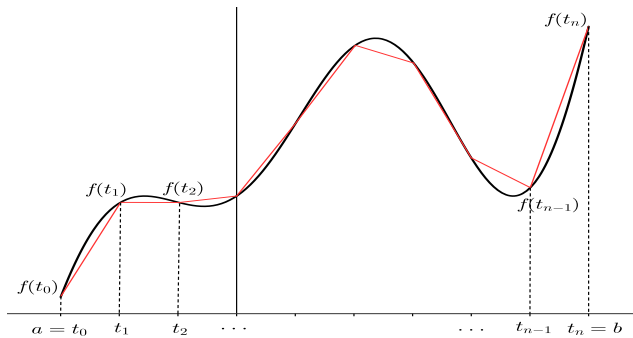


Figura 2: Aproximação do gráfico de uma função.

Agora, estamos prontos para dar uma definição formal de comprimento de arco.

Definição 1

O comprimento de arco de uma curva C , dada pelo gráfico de uma função contínua $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, é definido como

$$\mathcal{L}(f, [a, b]) = \lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sqrt{(t_i - t_{i-1})^2 + (f(t_i) - f(t_{i-1}))^2} \quad (1)$$

quando o limite acima, que é calculado sobre todas as possíveis partições do intervalo $[a, b]$, existir e for finito. Nesse caso, diremos que a curva C é *retificável*.

Observação 1

Nem todos os gráficos de funções contínuas são retificáveis. No entanto, o seguinte teorema não só oferece uma condição suficiente para que uma curva seja retificável como também fornece uma maneira de calcular o seu comprimento.

Teorema 1

Toda curva C , dada pelo gráfico de uma função contínua $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ com derivada contínua $f' : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, é retificável. Além disso, seu comprimento é dado por

$$\mathcal{L}(f, [a, b]) = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx . \quad (2)$$

2 Exemplos

Exemplo 1

Determine o comprimento da curva de $f(x) = \ln(\cos x)$ no intervalo $[0, \pi/4]$.

Solução

Dado que $f'(x) = -\operatorname{tg} x$ é uma função contínua no intervalo $[0, \pi/4]$, podemos usar a fórmula (2) para calcular o comprimento

$$\mathcal{L}(f, [0, \pi/4]) = \int_0^{\pi/4} \sqrt{1 + [-\operatorname{tg} x]^2} dx = \int_0^{\pi/4} \sec x dx.$$

Lembrando que

$$\int \sec x dx = \ln |\sec x + \operatorname{tg} x| + C,$$

obtemos

$$\mathcal{L}(f, [0, \pi/4]) = \ln(\sqrt{2} + 1).$$

□

Exemplo 2

Determine o comprimento da porção da parábola $f(x) = x^2 - 2x + 5$ entre os pontos $(1, 4)$ e $(3/2, 17/4)$.

Solução

Dado que $f'(x) = 2x - 2$ é uma função contínua no intervalo $[1, 3/2]$, podemos usar a fórmula (2) para calcular o comprimento

$$\mathcal{L}(f, [1, 3/2]) = \int_1^{3/2} \sqrt{1 + [2x - 2]^2} dx .$$

Fazendo a mudança de variáveis $u = 2x - 2$, $du = 2dx$, verificamos que a integral anterior é igual a

$$\frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{1 + u^2} du .$$

Fazendo a mudança de variáveis $u = \operatorname{tg} \theta$, $du = \sec^2 \theta d\theta$, verificamos que a integral anterior é igual a

$$\int_0^{\pi/4} \sec^3 \theta d\theta .$$

Lembrando que

$$\int \sec^3 x dx = \frac{1}{2} \{ \sec x \operatorname{tg} x + \ln |\sec x + \operatorname{tg} x| \} + C ,$$

obtemos

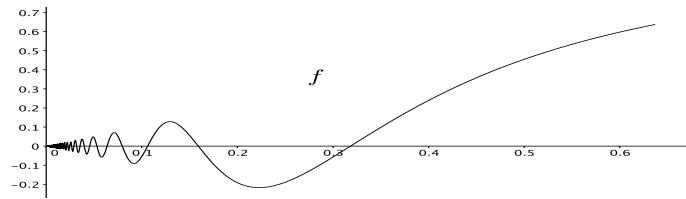
$$\mathcal{L}(f, [1, 3/2]) = \frac{1}{4} [\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} + 1)] .$$

□

Exemplo 3

A curva C , dada pelo gráfico da função contínua $f : [0, 2/\pi] \rightarrow \mathbb{R}$, e definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen}(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Figura 3: Gráfico da função f .

Não é retificável.

Solução

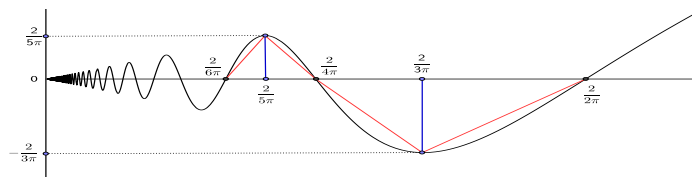
Dado $n \geq 1$, um número ímpar, vamos considerar a seguinte partição do intervalo $[0, 2/\pi]$:

$$\mathcal{P}_n = \left\{ 0 < \frac{2}{n\pi} < \frac{2}{(n-1)\pi} < \cdots < \frac{2}{3\pi} < \frac{2}{2\pi} < \frac{2}{\pi} \right\}.$$

A soma que aparece na expressão (1), correspondente a \mathcal{P}_n , majora a soma

$$\frac{2}{\pi} \left\{ 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \right\},$$

como pode ser visualizado na Figura 4.

Figura 4: Aproximação do gráfico de f .

A soma anterior, por sua vez, majora a soma

$$\frac{2}{\pi} \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \right\},$$

e dado que esta última soma vai para infinito quando n cresce, podemos concluir que a curva C não é retificável.

□

Observação 2

Note que a partição \mathcal{P}_n não satisfaz $\|\mathcal{P}_n\| \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. No entanto, a conclusão continua sendo correta (por quê?).

3 Exercícios de revisão

Calcule o comprimento de arco das seguintes curvas.

1. $y = e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}$ entre $x = 0$ e $x = 2$.
2. $y = \ln x$ entre $x = \sqrt{3}$ e $x = \sqrt{8}$.
3. $y = 1 - \ln(\cos x)$ entre $x = 0$ e $x = \frac{\pi}{4}$.
4. $y = \ln(1 - x^2)$ entre $x = 0$ e $x = \frac{1}{2}$.
5. $x = \frac{y^5}{6} + \frac{1}{10y^3}$ entre $y = 1$ e $y = 2$.
6. $x = \frac{1}{3}\sqrt{y}(y - 3)$ entre $y = 1$ e $y = 9$.

Aula 13

Integral imprópria em intervalos não limitados

Nesta aula, estenderemos o conceito de integral definida para funções definidas em intervalos não limitados.

1 Conceitos básicos

Na Aula 1, apresentamos a definição de [integral definida](#) para uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitada e definida em um intervalo fechado e limitado. Agora, estenderemos esta definição para os seguintes casos:

- funções definidas em intervalos infinitos, ou seja, intervalos do tipo $[a, +\infty)$, $[-\infty, b)$ ou $(-\infty, +\infty)$;
- funções não limitadas.

As integrais desses dois tipos são chamadas de [integrais impróprias](#).

A seguir, daremos a definição de [integral imprópria](#) para cada um dos três casos de intervalo infinito. O caso de funções não limitadas será discutido na próxima aula.

Definição 1

Dada uma função $f : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, integrável em todo intervalo da forma $[a, b]$ com $a < b$, definiremos a integral imprópria

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x)dx ,$$

quando o limite acima existir.

Definição 2

Dada uma função $f : (-\infty, b] \rightarrow \mathbb{R}$, integrável em todo intervalo da forma $[a, b]$ com $a < b$, definiremos a integral imprópria

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x)dx ,$$

quando o limite acima existir.

Definição 3

Dada uma função $f : [-\infty, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, integrável em todo intervalo da forma $[a, b]$ com $a < b$, definiremos a integral imprópria

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^{\infty} f(x)dx,$$

quando cada uma das integrais referentes ao lado direito da igualdade acima existir.

Observação 1

O valor da integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ é independente da escolha de $c \in \mathbb{R}$.

Observação 2

Nas definições anteriores, se os limites existirem e forem finitos, as integrais impróprias serão ditas **convergentes**; caso contrário, **divergentes**.

2 Exemplos

Exemplo 1

Determine os valores de $\alpha \in \mathbb{R}$, de modo que a integral imprópria $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ convirja.

Solução

Sabemos que

$$\int_1^b \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} \frac{b^{1-\alpha}-1}{1-\alpha}, & \text{se } \alpha \neq 1, \\ \ln b, & \text{se } \alpha = 1. \end{cases}$$

Portanto,

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1}, & \text{se } \alpha > 1, \\ \infty, & \text{se } \alpha \leq 1. \end{cases}$$

Logo, a integral converge se, e somente se, $\alpha > 1$. Nesse caso,

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = \frac{1}{\alpha-1}.$$

□

Exemplo 2

Calcule a área da região limitada por $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ e o eixo dos x .

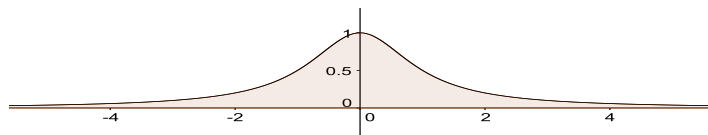


Figura 1: Gráfico da função $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Solução

Sabemos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2} dx + \int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx.$$

se, e somente se, cada uma das integrais do lado direito da expressão anterior existir. Para calcular estas duas integrais, observamos, primeiro, que

$$\int_a^b \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg}(b) - \operatorname{arctg}(a).$$

Portanto,

$$\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \{\operatorname{arctg}(0) - \operatorname{arctg}(a)\} = -(-\frac{\pi}{2}),$$

e

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \{\operatorname{arctg}(b) - \operatorname{arctg}(0)\} = \frac{\pi}{2}.$$

Logo,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \pi.$$

□

Exemplo 3

Calcule a integral imprópria $\int_0^{\infty} xe^{-x} dx$.

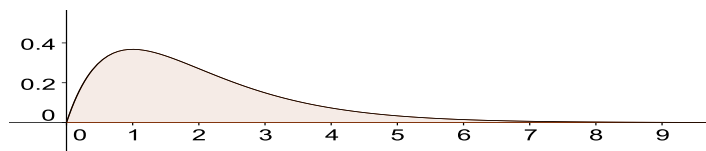
Solução

Sabemos que

$$\int_0^b xe^{-x} dx = -e^{-x}[x+1] \Big|_0^b = -e^{-b}[b+1] + 1.$$

Portanto,

$$\int_0^{\infty} xe^{-x} dx = 1 - \lim_{b \rightarrow \infty} e^{-b}[b+1].$$

Figura 2: Gráfico da função $f(x) = xe^{-x}$.

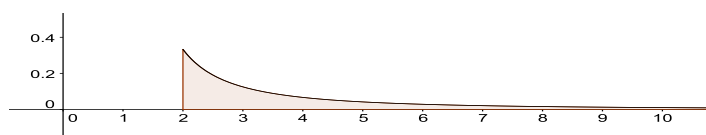
Usando a regra de L'Hospital, podemos ver que o limite anterior é igual a zero. Logo,

$$\int_0^{\infty} xe^{-x} dx = 1.$$

□

Exemplo 4

Calcule a integral imprópria $\int_2^{\infty} \frac{1}{x^2 - 1} dx$.

Figura 3: Gráfico da função $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$.

Solução

Usando frações parciais, temos

$$\begin{aligned} \int_2^b \frac{1}{x^2 - 1} dx &= \frac{1}{2} \left\{ \int_2^b \frac{1}{x-1} dx - \int_2^b \frac{1}{x+1} dx \right\} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| \Big|_2^b \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{b-1}{b+1} \right| - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1}{3} \right) = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{b-1}{b+1} \right| + \frac{\ln 3}{2}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x^2 - 1} dx = \frac{\ln 3}{2} + \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow \infty} \ln \left| \frac{b-1}{b+1} \right|.$$

Já que o limite anterior é igual a zero, obtemos

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x^2 - 1} dx = \frac{\ln 3}{2}.$$

□

3 Exercícios de revisão

Use as definições 1, 2 e 3 para verificar se a integral imprópria converge ou diverge. Caso convirja, calcule o seu valor.

- | | | | |
|----|---|----|---|
| 1. | $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + 2x + 2} dx$ | 2. | $\int_0^{\infty} x \operatorname{sen} x dx$ |
| 3. | $\int_2^{\infty} \frac{1}{x^5} dx$ | 4. | $\int_{-\infty}^{\infty} e^{- x } dx$ |
| 5. | $\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x} dx$ | 6. | $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{(x - 8)^{\frac{2}{3}}} dx$ |
| 7. | $\int_0^{\infty} e^{-ax} \operatorname{sen}(bx) dx \quad a > 0$ | 8. | $\int_0^{\infty} e^{-ax} \cos(bx) dx \quad a > 0$ |

Aula 14

Integral imprópria de funções não limitadas

Nesta aula, estenderemos o conceito de integral definida para funções não limitadas.

1 Conceitos básicos

Na Aula 1, apresentamos a definição de [integral definida](#) para uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, limitada e definida em um intervalo fechado e limitado. Na aula anterior, estendimos essa definição para funções definidas em intervalos não limitados.

A seguir, daremos a definição de [integral imprópria](#) para os casos de integrando não limitado no intervalo de integração.

Definição 1

Dada uma função $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ não limitada, que seja limitada e integrável em todo intervalo da forma $[a, c]$ com $c < b$, definiremos a integral imprópria

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c f(x)dx,$$

quando o limite existir.

Definição 2

Dada uma função $f : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ não limitada, que seja limitada e integrável em todo intervalo da forma $[c, b]$ com $c < b$, definiremos a integral imprópria

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c \rightarrow a^+} \int_c^b f(x)dx,$$

quando o limite existir.

Definição 3

Dada uma função $f : [a, c) \cup (c, b] \rightarrow \mathbb{R}$ não limitada, que satisfaz as condições das definições 1 e 2 nos intervalos $[a, c)$ e $(c, b]$, respectivamente, definimos a integral imprópria:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$$

se cada uma das integrais do lado direito existir.

Observação 1

Nas definições anteriores e naquelas que serão dadas na próxima seção, diremos que as integrais impróprias são **convergentes** se os limites existirem, ou seja, se os limites forem números reais. Caso contrário, as integrais serão ditas **divergentes**.

2 Exemplos

Exemplo 1

A função $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ será não limitada no intervalo $(0, 1]$ se $\alpha > 0$. Determine os valores de $\alpha > 0$, de modo que a integral imprópria $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx$ convirja.

Solução

Sabemos que

$$\int_c^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} \frac{1-c^{1-\alpha}}{1-\alpha}, & \text{se } \alpha \neq 1, \\ -\ln c, & \text{se } \alpha = 1. \end{cases}$$

Portanto,

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{c \rightarrow 0^+} \int_c^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}, & \text{se } 0 < \alpha < 1, \\ \infty, & \text{se } \alpha \geq 1. \end{cases}$$

Logo, a integral imprópria convergirá se, e somente se, $0 < \alpha < 1$. Nesse caso,

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = \frac{1}{1-\alpha}.$$

□

Exemplo 2

A função $f(x) = \frac{1}{(1-x)^{\frac{1}{3}}}$ é não limitada no intervalo $[0, 2]$ por causa da descontinuidade em $x = 1$. Determine se a integral imprópria $\int_0^2 \frac{1}{(1-x)^{\frac{1}{3}}} dx$ converge.

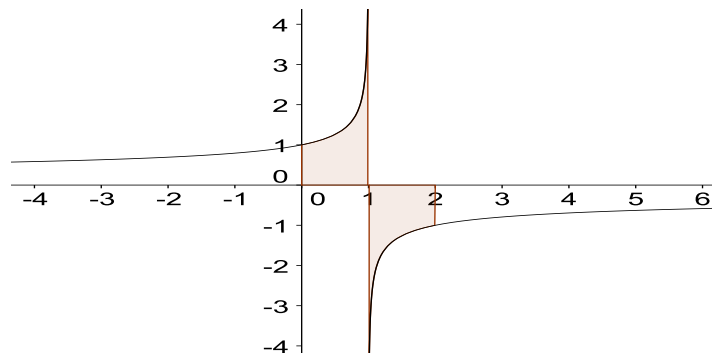


Figura 1: Gráfico da função $f(x) = \frac{1}{(1-x)^{\frac{1}{3}}}$

Solução

Este exercício enquadra-se na definição 3, onde o intervalo $[0, 2]$ é dividido nos intervalos $[0, 1]$, $[1, 2]$. Portanto,

$$\int_0^2 \frac{1}{(1-x)^{\frac{1}{3}}} dx = \int_0^1 \frac{1}{(1-x)^{\frac{1}{3}}} dx + \int_1^2 \frac{1}{(1-x)^{\frac{1}{3}}} dx.$$

Fazendo a mudança de variáveis $u = 1 - x$, $du = -dx$, obtemos

$$\int_0^b \frac{1}{(1-x)^{\frac{1}{3}}} dx = \int_{1-b}^1 u^{-\frac{1}{3}} du = \frac{3}{2} [1 - (1-b)^{\frac{2}{3}}],$$

e

$$\int_a^2 \frac{1}{(1-x)^{\frac{1}{3}}} dx = \int_{-1}^{1-a} u^{-\frac{1}{3}} du = \frac{3}{2} [(1-a)^{\frac{2}{3}} - (-1)^{\frac{2}{3}}]$$

para $0 < b < 1$ e $1 < a < 2$, respectivamente.

Então,

$$\int_0^1 \frac{1}{(1-x)^{\frac{1}{3}}} dx = \frac{3}{2} \lim_{b \rightarrow 1^-} [1 - (1-b)^{\frac{2}{3}}] = \frac{3}{2},$$

e

$$\int_1^2 \frac{1}{(1-x)^{\frac{1}{3}}} dx = \frac{3}{2} \lim_{a \rightarrow 1^+} [(1-a)^{\frac{2}{3}} - 1] = -\frac{3}{2}.$$

Logo, a integral imprópria converge. Além disso,

$$\int_0^2 \frac{1}{(1-x)^{\frac{1}{3}}} dx = 0.$$

□

Exemplo 3

A função $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ é não limitada no intervalo $[0, 2]$ por causa da descontinuidade em $x = 1$. Determine se a integral imprópria $\int_0^2 \frac{1}{(1-x)^2} dx$ converge.

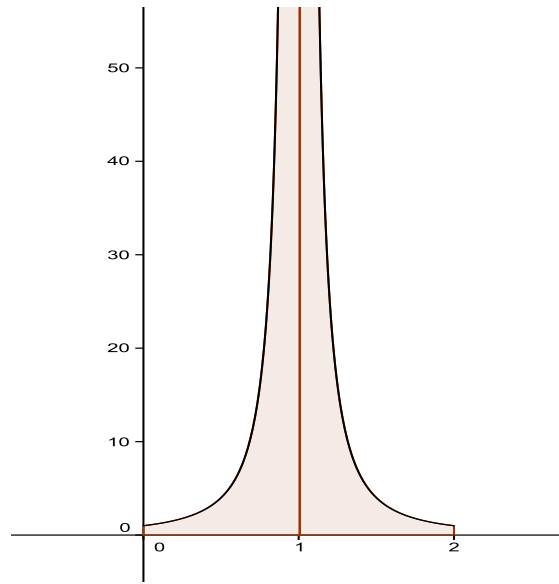


Figura 2: Gráfico da função $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$

Solução

Este exercício também se enquadra na definição 3, onde o intervalo $[0, 2]$ é dividido nos intervalos $[0, 1]$, $[1, 2]$. Portanto,

$$\int_0^2 \frac{1}{(1-x)^2} dx = \int_0^1 \frac{1}{(1-x)^2} dx + \int_1^2 \frac{1}{(1-x)^2} dx,$$

se as duas integrais do lado direito existirem. Fazendo a mudança de variáveis $u = 1 - x$, $du = -dx$, obtemos

$$\int_0^b \frac{1}{(1-x)^2} dx = \int_{1-b}^1 u^{-2} du = (1-b)^{-1} - 1,$$

e

$$\int_a^2 \frac{1}{(1-x)^2} dx = \int_{-1}^{1-a} u^{-2} du = 1 - (1-a)^{-1},$$

para $0 < b < 1$ e $1 < a < 2$, respectivamente.

Então,

$$\int_0^b \frac{1}{(1-x)^2} dx = \lim_{b \rightarrow 1^-} (1-b)^{-1} - 1 = +\infty,$$

e

$$\int_a^2 \frac{1}{(1-x)^2} dx = 1 - \lim_{a \rightarrow 1^+} (1-a)^{-1} = +\infty.$$

Logo, a integral imprópria diverge. \square

Observação 2

Observe que, se não tivéssemos percebido que o Exercício 2 tratava de uma integral imprópria, e tivéssemos efetuado a mudança de variáveis $u = x - 1$ diretamente, teríamos obtido

$$\int_0^2 \frac{1}{(1-x)^{\frac{1}{3}}} dx = \frac{3}{2}(x-1)^{2/3} \Big|_0^2 = \frac{3}{2}[1-1] = 0,$$

que é a resposta correta. No entanto, no exercício 3, teríamos obtido

$$\int_0^2 \frac{1}{(1-x)^2} dx = -(1-x)^{-1} \Big|_0^2 = -[-1-1] = 2,$$

uma resposta incorreta. Por isso, torna-se indispensável, no momento de calcular uma integral, verificar se essa integral é imprópria ou não.

Exemplo 4

A função $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$ é não limitada no intervalo $[0, 1]$ por causa das descontinuidades em $x = 0$ e $x = 1$. Determine se a integral imprópria

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx \text{ converge.}$$

Solução

Sabemos que

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx = \int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx + \int_{1/2}^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx,$$

se as duas integrais do lado direito existirem.

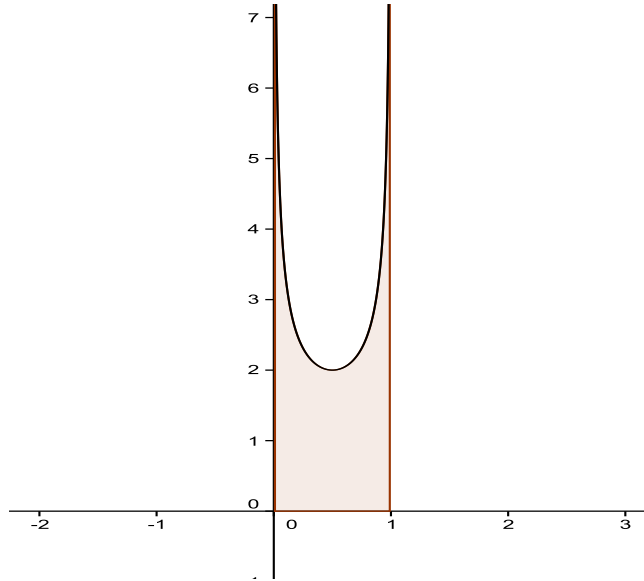


Figura 3: Gráfico da função $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$

Fazendo a mudança de variáveis $u = \sqrt{x}$, $du = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$, obtemos

$$\int_a^{1/2} \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx = 2 \operatorname{arcsen} \sqrt{x} \Big|_a^{1/2} = \frac{\pi}{3} - 2 \operatorname{arcsen} \sqrt{a},$$

e

$$\int_{1/2}^b \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx = 2 \operatorname{arcsen} \sqrt{x} \Big|_{1/2}^b = 2 \operatorname{arcsen} \sqrt{b} - \frac{\pi}{3}$$

para $0 < a < 1/2$ e $1/2 < b < 1$, respectivamente.

Então,

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx = \frac{\pi}{3} - 2 \lim_{a \rightarrow 0^+} \operatorname{arcsen} \sqrt{a} = \frac{\pi}{3},$$

e

$$\int_{1/2}^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx = 2 \lim_{b \rightarrow 1^-} \operatorname{arcsen} \sqrt{b} - \frac{\pi}{3} = 2 \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}.$$

Logo, a integral imprópria converge. Além disso,

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx = \pi.$$

□

3 Exercícios de revisão

Use as definições 1, 2 e 3 para verificar se a integral imprópria converge ou diverge. Caso convirja, calcule o seu valor.

- | | | | |
|----|--|----|--|
| 1. | $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^4} dx$ | 2. | $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ |
| 3. | $\int_0^1 \ln x dx$ | 4. | $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin x}} dx$ |
| 5. | $\int_1^3 \frac{x^2}{\sqrt{x^3-1}} dx$ | 6. | $\int_1^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx$ |
| 7. | $\int_1^5 \frac{1}{(x-3)^4} dx$ | | |

Aula 15

Critério de comparação para integrais impróprias

Nesta aula, veremos dois critérios que permitem estudar a convergência ou divergência de uma integral imprópria sem a necessidade de calcular a integral.

1 Conceitos básicos

Muitas vezes, não é possível calcular o valor exato de uma integral imprópria. No entanto, em alguns casos, podemos determinar se ela converge ou diverge. A ideia é comparar a integral imprópria que queremos estudar com outra cuja convergência ou divergência saibamos de antemão.

Enunciamos, a seguir, dois critérios de comparação.

Proposição 1

Sejam $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções integráveis no intervalo $[a, t]$ para todo $t > a$, de modo que $f(x) \geq g(x) \geq 0$ para todo $x \geq a$. Então:

- a convergência de $\int_a^\infty f(x)dx$ implica a convergência de $\int_a^\infty g(x)dx$,

- a divergência de $\int_a^\infty g(x)dx$ implica a divergência de $\int_a^\infty f(x)dx$.

Observação 1

A ideia é muito simples. Se a função positiva f for maior que a função positiva g , então, a área entre o gráfico de f e o eixo x será maior que a área entre o gráfico de g e o eixo x (ver Figura 1).

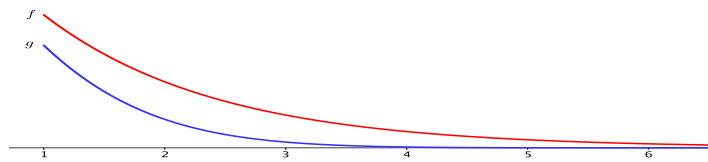


Figura 1: Gráfico das funções f e g

Proposição 2

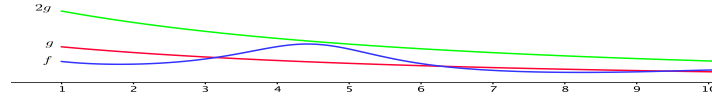
Sejam $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções integráveis no intervalo $[a, t]$ para todo $t > a$, e $f(x) \geq 0$ e $g(x) > 0$ para todo $x \geq a$. Se existir $\lambda > 0$ tal que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda, \quad (1)$$

então, $\int_a^\infty f(x)dx$ convergirá se, e somente se, $\int_a^\infty g(x)dx$ convergir.

Observação 2

A ideia é a seguinte. A existência do limite em (1) implica que, para um x suficientemente grande, a função f é muito próxima da função λg . Em particular, a função f é menor que um múltiplo da função g (ver Figura 1). Por outro lado, é claro que a integral imprópria de uma função g converge se, e somente se, a integral imprópria de qualquer múltiplo dessa função convergir.

Figura 2: Gráfico da função f

A seguir, enunciaremos duas proposições análogas para o caso de integrais impróprios de funções não limitadas.

Proposição 3

Sejam $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções não limitadas, que sejam limitadas e integráveis em todo intervalo da forma $[a, c]$ com $c < b$, e tais que $f(x) \geq g(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b)$. Então:

- a convergência de $\int_a^b f(x)dx$ implica a convergência de $\int_a^b g(x)dx$,
- a divergência de $\int_a^b g(x)dx$ implica a divergência de $\int_a^b f(x)dx$.

Proposição 4

Sejam $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções não limitadas, que sejam limitadas e integráveis em todo intervalo da forma $[a, c]$ com $c < b$, e tais que $f(x) \geq 0$ e $g(x) > 0$ para todo $x \in [a, b)$. Se existir $\lambda > 0$ tal que

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda,$$

então, $\int_a^b f(x)dx$ convergirá se, e somente se, $\int_a^b g(x)dx$ convergir.

Observação 3

Note que os critérios acima foram enunciados para funções positivas. No entanto, eles também são úteis na hora de determinar a convergência ou

divergência de algumas integrais impróprias de funções não necessariamente positivas. Isso decorre do seguinte fato: a integral imprópria $\int_a^\infty f(x) dx$ será dita **absolutamente convergente** quando a integral imprópria $\int_a^\infty |f(x)| dx$ convergir. Nesse caso, pode-se provar que a integral $\int_a^\infty f(x) dx$ também irá convergir, e que

$$\left| \int_a^\infty f(x) dx \right| \leq \int_a^\infty |f(x)| dx.$$

Uma propriedade análoga será satisfeita por integrais impróprias de funções não limitadas.

2 Exemplos

Exemplo 1

Determine se a integral $\int_1^\infty e^{-x^2} dx$ converge ou diverge.

Solução

Saiba que a integral $\int_1^b e^{-x^2} dx$ NÃO pode ser calculada em termos de funções elementares. Então, somos obrigados a usar algum critério de comparação. Já que $0 \leq e^{-x^2} \leq e^{-x}$ para $x \geq 1$ (verifique), podemos usar a Proposição 1. Sabemos que

$$\int_1^b e^{-x} dx = 1 - e^{-b}$$

para todo $b > 1$. Logo,

$$\int_1^\infty e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} 1 - e^{-b} = 1.$$

Portanto, a integral $\int_1^\infty e^{-x^2} dx$ converge. \square

Exemplo 2

Determine se a integral $\int_1^{\infty} \operatorname{sen} x e^{-x^2} dx$ converge ou diverge.

Solução

Observe que a função $f(x) = \operatorname{sen} x e^{-x^2}$ não é positiva, mas $|f(x)| \leq e^{-x^2}$ para todo $x \in \mathbb{R}$. No exercício anterior, foi mostrada a convergência da integral $\int_1^{\infty} e^{-x^2} dx$. Logo, a partir da Observação 3, concluímos que a integral $\int_1^{\infty} \operatorname{sen} x e^{-x^2} dx$ converge. \square

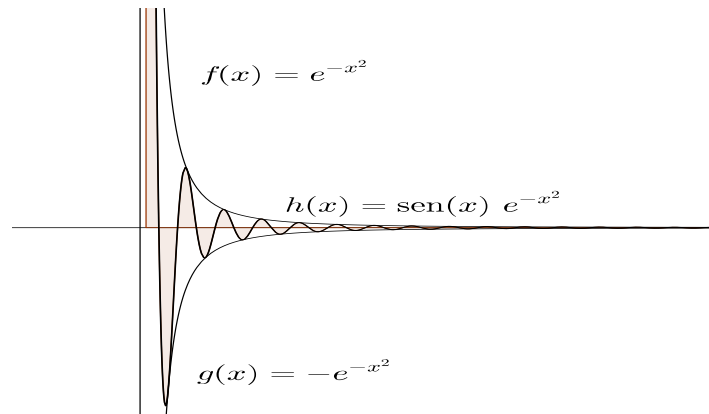


Figura 3: Gráfico das funções $f(x) = e^{-x^2}$, $g(x) = -e^{-x^2}$ e $h(x) = \operatorname{sen} x e^{-x^2}$

Exemplo 3

Determine os valores de $\beta > 0$, de modo que a integral $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^\beta + \operatorname{sen} x} dx$ convirja.

Solução

Visto que $\frac{1}{x^\beta + \operatorname{sen} x} \geq 0$ e $\frac{1}{x^\beta} > 0$ para $x \geq 1$ (verifique), podemos usar a Proposição 2. Sabemos que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^\beta}{x^\beta + \operatorname{sen} x} = 1.$$

Além disso, vimos, no Exemplo 1 da aula anterior, que $\int_1^\infty \frac{1}{x^\beta} dx$ convergirá se, e somente se $\beta > 1$.

Portanto, a integral $\int_1^\infty \frac{1}{x^\beta + \operatorname{sen} x} dx$ convergirá se, e somente se, $\beta > 1$ \square

Exemplo 4

Determine os valores de $\beta > 0$, de modo que a integral $\int_0^1 \frac{1}{x^\beta + \operatorname{sen} x} dx$ convirja.

Solução

Visto que $0 \leq \frac{1}{x^\beta + \operatorname{sen} x} \leq \frac{1}{x^\beta}$ para $x \in [0, 1]$ (verifique), podemos usar a Proposição 3. Sabemos, por meio do Exemplo 1 da aula anterior, que $\int_0^1 \frac{1}{x^\beta} dx$ converge se, e somente se, $\beta < 1$. Portanto, a integral $\int_0^1 \frac{1}{x^\beta + \operatorname{sen} x} dx$ converge se $\beta < 1$.

Por outra parte, se $\beta \geq 1$ temos que $\frac{1}{x^\beta + \operatorname{sen} x} \geq \frac{1}{2x}$ para $x \in [0, 1]$ (verifique), assim, usando novamente a Proposição 3, obtemos que $\int_0^1 \frac{1}{x^\beta + \operatorname{sen} x} dx$ diverge se $\beta \geq 1$. \square

Exemplo 5

Determine os valores de $\beta > 0$, de modo que a integral $\int_0^{\frac{3\pi}{4}} \frac{1}{x^\beta(1 + \cos x)} dx$ convirja.

Solução

Visto que $\frac{1}{x^\beta(1 + \cos x)} \geq 0$ e $\frac{1}{x^\beta} > 0$ para $x \in (0, \frac{3\pi}{4})$ (verifique), podemos usar a Proposição 4. Sabemos que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^\beta}{x^\beta(1 + \cos x)} = \frac{1}{2}.$$

Sabemos, por meio do Exemplo 1 da aula anterior, que $\int_0^{\frac{3\pi}{4}} \frac{1}{x^\beta} dx$ convergirá se, e somente se, $\beta < 1$.

Portanto, a integral $\int_0^{\frac{3\pi}{4}} \frac{1}{x^\beta(1 + \cos x)} dx$ convergirá se, e somente se, $\beta < 1$.

□

3 Exercícios de revisão

Use os critérios estudados nesta aula para verificar se a integral imprópria converge ou diverge.

- | | | | |
|----|---|----|--|
| 1. | $\int_0^\infty \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^8 - 3x^2 + 1}} dx$ | 2. | $\int_0^\infty \frac{x^2}{\sqrt[2]{x^8 + 3x^2 + 1}} dx$ |
| 3. | $\int_0^2 \frac{x}{(x-2)^3} dx$ | 4. | $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{x \operatorname{sen} x} dx$ |
| 5. | $\int_0^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx$ | 6. | $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt[2]{x} + \sqrt[3]{x^4}} dx$ |
| 7. | $\int_2^\infty \frac{x+1}{\sqrt{x^4 - x}} dx$ | 8. | $\int_1^\infty \frac{x}{\operatorname{sen} x + xe^x} dx$ |

Aula 16

Introdução às equações diferenciais ordinárias

O estudo das Equações Diferenciais (ED) é importante porque elas estão presentes em vários tipos de problemas importantes, nas diferentes áreas da ciência. Muitos problemas do campo da física, da engenharia, da economia, da matemática e até mesmo da área das ciências sociais, quando modelados matematicamente, recaem numa [Equação Diferencial Ordinária](#).

1 Equações Diferenciais Ordinárias

Uma equação que envolve uma ou mais derivadas de uma função em relação a uma única variável independente é dita uma [Equação Diferencial Ordinária](#), chamada simplesmente [EDO](#). Veja a definição geral a seguir.

Definição 1

Uma Equação Diferencial Ordinária é uma equação da forma

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0, x \in I, \quad (1)$$

envolvendo uma variável x num intervalo I , uma função incógnita $y = y(x)$ e suas derivadas.

Nesse caso, x é a variável independente, y é a variável dependente e o símbolo $y^{(k)}$ denota a derivada de ordem k da função $y = y(x)$. Dependendo do contexto, podemos usar outras letras, para denotar as variáveis de uma EDO.

As EDOs mais simples são do tipo $y'(x) = f(x)$, do tipo que tratamos nas aulas iniciais, pois o problema consiste em determinar as primitivas da função f dada. Outros exemplos de EDOs, que podemos escrever, usando diferentes notações são:

$$x^2y'' - 2xy' + y = e^x \quad (\text{com a notação linha});$$

$$\frac{dy}{dt} = y - t \quad (\text{com a notação de Leibniz});$$

$$(y - x)dy + 6xdx = 0 \quad (\text{com a notação de diferencial}).$$

A última EDO equivale a $(y - x)\frac{dy}{dx} + 6x = 0$, pois para usarmos a notação de diferencial, manipulamos $\frac{dy}{dx}$ como se fosse um quociente.

Existem equações que envolvem mais de uma variável independente e derivadas parciais de uma ou mais funções desconhecidas. Tais equações são chamadas *Equações Diferenciais Parciais* (EDPs). Alguns exemplos de EDPs são:

$$u_t = u_{xx}, \quad u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad u_y = -v_x.$$

As EDPs são de grande importância, mas não serão abordadas no presente curso.

Classificação pela Ordem

A ordem da derivada mais alta de uma EDO é por definição a **ordem da EDO**. Por exemplo,

$$xy'' - (y')^3 + y = 0 \quad \text{é de ordem 2 (ou segunda ordem);}$$

$y''' - 2xy' + \operatorname{sen} y = 0$ é de ordem 3 (ou terceira ordem);

$(y - x)dy + 6xdx = 0$ é de ordem 1 (ou primeira ordem).

Classificação pela Linearidade

Uma **EDO linear** é aquela que pode ser escrita na forma

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x).$$

Destacamos que as propriedades principais de uma EDO linear são:

- A potência de y e todas as suas derivadas é 1.
- Cada coeficiente a_i depende no máximo de x , podendo ser constante. Portanto, os coeficientes não podem envolver y e nem suas derivadas.

Uma EDO que não é linear é dita **não-linear**.

Exemplos de EDOs lineares:

$$x^2y'' - xy' + y = 0; \quad x^{(4)} - x''' + 4x'' + x' + x = t + 1; \quad (\cos x)y'' - xy' + y = \operatorname{sen} x.$$

Exemplos de EDOs não-lineares:

$$xy'' - (y')^3 + y = 0; \quad y = ty' - e^{y'}; \quad (\cos y)y' + y = x^2.$$

O objetivo desta segunda parte da disciplina é aprender a resolver alguns tipos de EDOs. Começamos definindo o que entendemos por solução.

Definição 2

Uma solução para a EDO dada em (1) de ordem n num intervalo $J \subset I$ é qualquer função que possui n derivadas definidas em J , que, ao ser substituída na equação, reduz a mesma a uma identidade.

Exemplo 1

Verifique que $y = \cos x$ é solução da EDO $y'' + y = 0$ em \mathbb{R} .

Solução

Derivando a função cosseno, temos $y' = -\operatorname{sen} x$ e $y'' = -\cos x$, logo

$$y'' + y = -\cos x + \cos x = 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Portanto, $y = \cos x$ satisfaz a EDO dada em \mathbb{R} . \square

Observação 1

- Note que a função constante $y = 0$ também é solução da EDO do exemplo anterior. Nesse caso, dizemos que $y = 0$ é uma **solução trivial**.
- Uma EDO pode possuir uma infinidade de soluções. O que ocorre com a maioria delas. Por exemplo, as equações tipo $y' = f(x)$, para f integrável, têm uma família de soluções a um parâmetro, dada pela integral indefinida. Se a EDO for de ordem n , podemos ter uma família a n parâmetros de soluções.
- Nem toda EDO que escrevemos possui alguma solução real. Por exemplo, a EDO $(y')^2 + y^2 = -1$ não possui solução real.

Para as EDOs lineares temos o conceito de **solução geral**, pois será possível reunir todas as soluções numa única fórmula, num único intervalo I de definição. Tal solução geral é escrita usando constantes arbitrárias, e quando particularizamos essas constantes, dizemos que a solução obtida é uma **solução particular** da EDO. Por exemplo, a EDO $y' = e^x$ tem como solução geral $y(x) = e^x + c$, $x \in \mathbb{R}$ e $y_p(x) = e^x - 2$, $x \in \mathbb{R}$, nesse caso, é uma solução particular. Para algumas EDOs não-lineares, o termo solução geral às vezes também é usado, quando se pode expressar "quase todas" as soluções com uma única fórmula, porém não há consenso com relação a essa terminologia.

Soluções Explícitas e Implícitas

Quando conseguimos expressar uma solução de uma EDO na forma

$$y = f(x), x \in I,$$

dizemos que essa solução é **explícita**. Foi o caso do exemplo 1.

Em várias ocasiões não conseguimos expressar a solução em função da va-

riável independente, mas obtemos soluções expressas numa equação do tipo $F(x, y) = 0$, uma tal solução é dita **implícita**.

Exemplo 2

A relação $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$, define, para $x \in (-1, 1)$, uma solução implícita da EDO $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$.

Solução

Derivando implicitamente em relação a x temos:

$$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) = 0 \Rightarrow 2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

□

Observação 2

Podemos explicitar duas soluções do exemplo 2 como $y = \sqrt{1 - x^2}$ ou $y = -\sqrt{1 - x^2}$, para $x \in (-1, 1)$.

Definição 3

Um **Problema de Valor Inicial (PVI)** é uma expressão que envolve uma EDO de ordem n , associada a n condições iniciais sobre y e suas derivadas num ponto x_0 , assim:

$$\begin{cases} F(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0, x \in I; \\ y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, y''(x_0) = y_2, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}. \end{cases}$$

Há duas perguntas importantes sobre um PVI. Analise a seguir.

1. Existência: dado um PVI, será que ele tem solução?
2. Unicidade: se houver solução, será que ela é única?

Nas próximas aulas, veremos que sob determinadas hipóteses, poderemos responder às perguntas afirmativamente, mas, em muitos casos, o problema permanecerá em aberto.

Modelagem Matemática

Em engenharia, física, economia e até medicina, frequentemente, tem-se como objetivo descrever ou modelar o comportamento de algum fenômeno ou sistema, em termos matemáticos. Na maioria das vezes, já que trabalhamos com taxas de variação (derivadas), usando as hipóteses do sistema e leis empíricas, somos levados a uma Equação Diferencial. É um caso particular do que chamamos *Modelagem Matemática*.

Quando a variável independente é o tempo, é possível através de medições no presente- e utilizando a ED- projetar o comportamento futuro do sistema ou mesmo retroceder o tempo e saber sobre seu comportamento no passado. Como ilustração, observe a seguir o problema bem conhecido de um *corpo em queda livre*. Nas próximas aulas, veremos outras aplicações.

Exemplo 3

Quando um objeto de massa m cai em queda livre, de uma altura s_0 , com velocidade inicial v_0 , próximo à superfície da Terra, sabemos que sua aceleração é supostamente constante igual a g , a aceleração da gravidade. Nosso objetivo é descrever a queda através de uma EDO, obter suas soluções e usando as medições do problema, encontrar uma única expressão para a posição $s(t)$ do objeto em cada instante, em função do tempo t decorrido.

Solução

Pela 2^a Lei de Newton, supondo o sentido positivo para cima, temos

$$F = ma = -mg,$$

onde o sinal negativo se deve ao fato de que a aceleração da gravidade atua no sentido negativo. Mas a aceleração é a derivada de ordem 2 da posição, então $a(t) = s''(t)$, logo

$$s''(t) = -g \quad (\text{é a EDO do sistema}).$$

Integrando em relação a t , obtemos $s'(t) = -gt + c_1$ e integrando novamente, temos que $s(t) = -\frac{gt^2}{2} + c_1t + c_2$. Como a posição e a velocidade iniciais são dadas, com uma substituição na expressão do espaço, segue que $s_0 = s(0) = -\frac{g \times 0^2}{2} + c_1 \times 0 + c_2 = c_2$ e $v_0 = s'(0) = -g \times 0 + c_1 = c_1$. Portanto,

$$s(t) = s_0 + v_0t - \frac{gt^2}{2},$$

que é uma fórmula bem conhecida, desde o ensino médio, para o movimento uniformemente acelerado. \square

Observação 3

Repare que no exemplo anterior resolvemos o PVI, assim:

$$\begin{cases} s''(t) = -g, & t \in \mathbb{R}; \\ s(0) = s_0, s'(0) = v_0. \end{cases}$$

Finalmente, observamos que em cursos mais avançados de EDOs estuda-se o comportamento das soluções. Ou seja, faz-se uma análise qualitativa das soluções, mesmo que não se consiga explicitá-las. Observamos também que há vários métodos numéricos para aproximar soluções. Temos assim, o estudo moderno de EDOs. Por hora, nesse texto introdutório, abordaremos as EDOs de forma clássica, buscando soluções, no mínimo, implícitas.

2 Exercícios de revisão

Classifique as EDOs a seguir quanto à ordem e à linearidade.

1. $x^2y' + y = e^x$.
2. $(1 + y)y''' + xy = x$.
3. $x'' + \text{sen}(t + x) = x^4$.
4. $e^ty^{(4)} - y'' + ty = 0$.

Verifique se a função dada constitui solução para a EDO.

5. $y'' + y = \sec t$, $0 < t < \pi/2$, $y(t) = (\cos t) \ln(\cos t) + t \sin t$.
6. $y^{(4)} + 4y''' + 3y = x$, $x \in \mathbb{R}$, $y(x) = e^{-x} + x/3$.

Determine os valores de r para os quais a EDO dada possui solução da forma $y = t^r$, para $t > 0$.

7. $t^2 y'' - 4ty' + 4y = 0$.

Determine os valores de r para os quais a EDO dada possui solução da forma $y = e^{rt}$.

8. $y''' - 3y'' + 2y' = 0$.

Aula 17

EDO de primeira ordem

Nesta aula, iniciaremos o estudo das equações diferenciais ordinárias (EDO) de **primeira ordem**. Discutiremos o tipo mais simples de EDO de primeira ordem, chamado **variáveis separáveis**.

1 Conceitos básicos

Lembre-se de que uma EDO de primeira ordem é dada por:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad (1)$$

onde $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

O nosso primeiro objetivo é resolver a equação (1), no sentido da Definição 2 da aula anterior. Como é de se esperar, dada a arbitrariedade da função f , não existe um método geral para resolver esse tipo de equação. No entanto, nesta e nas próximas seções, daremos alguns métodos de solução para certos casos particulares da função f .

Definição 1

Dizemos que a equação (1) é **imediate** se a função f depende somente da

variável x . Isto é,

$$\frac{dy}{dx} = f(x). \quad (2)$$

Observação 1

Caso a função f tenha uma primitiva F no intervalo I , a equação (2) pode ser resolvida via integração. De fato, pela definição de primitiva,

$$y(x) = F(x)$$

é solução da equação (2) no intervalo I .

Definição 2

Dizemos que a equação (1) é de **variáveis separáveis** se a função f for o produto de duas funções, cada uma delas dependendo somente de uma variável. Isto é,

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y). \quad (3)$$

Proposição 1

Suponha que, na definição anterior, a função g tem uma primitiva G definida no intervalo I , e a função $1/h$ está bem definida e tem uma primitiva H no intervalo J . Então, a expressão

$$H(y) = G(x) + C, \quad (4)$$

fornece uma solução **implícita** da equação (3) nos subintervalos de I onde y esteja definido implicitamente por dita expressão.

Prova

Derivando os dois lados de (4) com respeito a x , temos pela regra da cadeia

$$H'(y(x))y'(x) = G'(x).$$

Já que H é uma primitiva de $1/h$, temos

$$\frac{1}{h(y(x))}y'(x) = g(x).$$

Isto é,

$$y'(x) = h(y(x))g(x).$$



Observação 2

Uma maneira simples de usar o método é a seguinte: na equação (3) dividimos pela função h e “multiplicamos por dx ”, obtendo

$$\frac{1}{h(y)}dy = g(x)dx. \quad (5)$$

Logo, integramos à esquerda com respeito de y e à direita com respeito de x . A justificativa desse procedimento está na prova da Proposição 1.

Observação 3

Repare que para usar o método precisaremos que $h(y) \neq 0$. O que acontece se h se anula em algum ponto, digamos y_0 ? Nesse caso, pode-se verificar diretamente que a função constante $y \equiv y_0$ é solução da equação (3).

Ou seja, as soluções constantes são obtidas resolvendo a equação $h(y) = 0$ e as não constantes integrando (5).

2 Exemplos

Exemplo 1

Resolva a equação

$$xy' + y = 0. \quad (6)$$

Solução

Seguindo o procedimento descrito em (5) obtemos, a partir de (6), a expressão

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}.$$

Observe que estamos considerando $x \neq 0$ e $y \neq 0$. Integrando dos dois lados, obtemos

$$\ln |y| = -\ln |x| + C_1,$$

onde $C_1 \in \mathbb{R}$. Logo, tomando exponencial dos dois lados, obtemos

$$|y| = \frac{C}{|x|},$$

onde $C > 0$. Podemos tirar os módulos tomando $C \in \mathbb{R}/\{0\}$.

Logo, temos que $y = C/x$ é solução de (6) nos intervalos $(0, +\infty)$ e $(-\infty, 0)$ para qualquer constante $C \in \mathbb{R}/\{0\}$.

Finalmente, observe que $y \equiv 0$ é solução de (6) em \mathbb{R} . \square

Exemplo 2

Resolva a equação

$$y' = -\frac{x}{y}. \quad (7)$$

Solução

Observe que para a equação (7) fazer sentido, precisamos considerar $y \neq 0$. Seguindo o procedimento descrito em (5) obtemos, a partir de (7), a expressão

$$y \, dy = -x \, dx.$$

Ao fazermos a integração, obtemos

$$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C_1,$$

onde $C_1 \in \mathbb{R}$. Logo, multiplicando por 2 dos dois lados, temos que

$$y^2 + x^2 = C,$$

é solução implícita de (7). Observe que, dado que $y \neq 0$, para a expressão anterior fazer sentido precisamos que $C > 0$. \square

Exemplo 3

Resolva a equação

$$y' = y^2 - 4. \quad (8)$$

Solução

Seguindo o procedimento descrito em (5), obtemos a partir de (8) a expressão

$$\frac{dy}{y^2 - 4} = dx.$$

Observe que consideramos $y \neq -2$ e $y \neq 2$. Usando frações parciais para integrar o lado esquerdo, obtemos

$$\frac{1}{4} \{ \ln |y - 2| - \ln |y + 2| \} = x + C_1,$$

onde $C_1 \in \mathbb{R}$. Logo, passando o 4 a multiplicar e tomando exponencial dos dois lados, obtemos

$$\frac{|y - 2|}{|y + 2|} = Ce^{4x},$$

onde $C > 0$. Podemos tirar o módulo tomando $C \in \mathbb{R}/\{0\}$.

Logo, colocando y em evidência, temos que

$$y = \frac{2 + 2Ce^{4x}}{1 - Ce^{4x}}, \quad (9)$$

é solução de (8), nos intervalos $(-\frac{\ln C}{4}, +\infty)$ e $(-\infty, -\frac{\ln C}{4})$, para qualquer constante $C > 0$. No caso $C < 0$ a solução está definida em \mathbb{R} .

Finalmente, observe que $y \equiv -2$ e $y \equiv 2$ são soluções de (8) em \mathbb{R} . Veja que a solução $y \equiv 2$ faz parte da família de soluções (9)($C = 0$), o que não acontece com a solução $y \equiv -2$. \square

Exemplo 4

Resolva a equação

$$y' = \sqrt{y}. \quad (10)$$

Solução

Para a equação (10) fazer sentido, precisamos que $y \geq 0$. Seguindo o procedimento descrito em (5), obtemos a partir de (10) a expressão

$$\frac{dy}{\sqrt{y}} = dx.$$

Observe que consideramos $y \neq 0$. Integrando dos dois lados, obtemos

$$2\sqrt{y} = x + C, \quad (11)$$

onde $C \in \mathbb{R}$. Logo, passando o 2 a dividir e elevando ao quadrado dos dois lados, obtemos

$$y = \frac{1}{4}(x + C)^2. \quad (12)$$

Veja que para a equação (11) fazer sentido, precisamos que $x + C \geq 0$. Assim, a solução y dada por (12) é válida no intervalo $(-C, +\infty)$.

Finalmente, observe que $y \equiv 0$ é solução de (10) em \mathbb{R} , reparando que esta solução não pertence à família de soluções (12). \square

3 Exercícios de revisão

Verifique que as EDOs a seguir são de variáveis separáveis e resolva-as.

1. $(1 + x)y \, dx + (1 - y)x \, dy = 0.$
2. $y' = \frac{1+x^2}{1+y^2}.$
3. $\sec^2 \theta \operatorname{tg} \phi \, d\theta + \sec^2 \phi \operatorname{tg} \theta \, d\phi = 0.$
4. $(x + y^2x) \, dx + (y - x^2y)x \, dy = 0.$
5. $(x \ln y) \frac{dy}{dx} = y.$
6. $xy \frac{dy}{dx} = (1 + x^2) \operatorname{cosec} y.$
7. $y' + y^2 \operatorname{sen} x = 0.$
8. $xy' = \sqrt{1 - y^2}.$
9. $\frac{dy}{dx} = \frac{x - e^{-x}}{y + e^y}.$

Aula 18

Teorema de Existência e Unicidade

Nesta aula introduzimos o **problema de valor inicial** (PVI) associado a uma equação diferencial ordinária de primeira ordem. Depois, abordaremos os problemas de existência e unicidade de solução para o PVI.

1 Conceitos básicos

Dada uma função contínua $f : I_1 \times I_2 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definida no produto cartesiano dos intervalos abertos I_1 e I_2 , e $(x_0, y_0) \in I_1 \times I_2$, consideramos o **problema de valor inicial** (PVI):

$$\begin{cases} y' &= f(x, y), \\ y(x_0) &= y_0. \end{cases} \quad (1)$$

Vamos definir o que entendemos como uma solução, no caso do problema anterior.

Definição 1

Dado $J \subset I_1$, um subintervalo aberto de I_1 , dizemos que a função diferenciável $u : J \subset \mathbb{R} \rightarrow I_2 \subset \mathbb{R}$ é uma solução do PVI (1) se $u(x_0) = y_0$

e

$$u'(x) = f(x, u(x))$$

para todo $x \in J$.

Observação 1

Inicialmente, devemos nos perguntar: Existe alguma solução para o PVI (1)? Tendo a pergunta uma resposta positiva, vamos a uma segunda questão: Será que existe mais de uma solução?

Tais questões são de fundamental importância no estudo das equações diferenciais. De fato, não é melhor começar a procura por uma solução de um PVI quando já sabemos, de antemão, que existe ao menos uma? Caso contrário, poderíamos estar procurando por uma coisa que não existe! Além disso, dado que achamos uma solução, como podemos saber que não há mais alguma, e que a nossa procura por soluções já terminou? Por exemplo, em várias equações diferenciais que provêm de modelos da física, uma solução pode representar a trajetória de uma certa partícula. É claro que do ponto de vista físico, o problema só pode ter uma solução (a partícula não vai seguir duas trajetórias diferentes). No entanto, o PVI que modela o fenômeno físico pode ter várias soluções. Pode acontecer que na nossa procura encontremos primeiro uma solução que não tenha nada a ver com a solução do problema físico, assim, é muito importante saber se ainda existe mais alguma solução para o PVI, a fim de continuar procurando.

A seguir, vamos enunciar um resultado que fornece critérios suficientes para decidir se um PVI tem pelo menos uma solução e se a mesma solução é única.

Dado o ponto $(x_0, y_0) \in I_1 \times I_2$, fixamos duas constantes positivas a e b , tais que o retângulo $\mathcal{R} = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$ fique contido em $I_1 \times I_2$.

Teorema 1

Seja $f : I_1 \times I_2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e sejam $M = \max_{(x,y) \in \mathcal{R}} f(x, y)$ e

$\alpha = \min\{a, \frac{b}{M}\}$. Então, existe uma função

$$u : [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \subset \mathbb{R} \rightarrow [y_0 - b, y_0 + b] \subset \mathbb{R}$$

que é solução do PVI (1). Além disso, se a derivada $\frac{\partial f}{\partial y}$ existir e for contínua em $\in I_1 \times I_2$, então a solução acima é única.

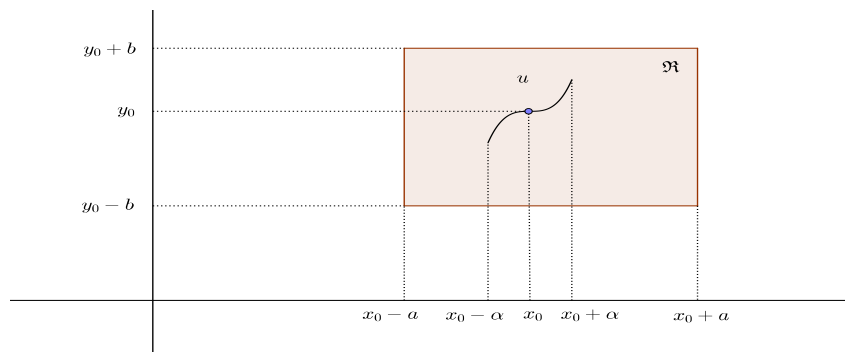


Figura 1: Gráfico da solução u garantida pelo Teorema 1.

2 Exemplos

Exemplo 1

a) Estude a existência e unidade do PVI geral associado à equação

$$y' = -\frac{x}{y}. \quad (2)$$

b) Resolva os seguintes PVIs associados à equação (2).

$$(b1) \quad \begin{cases} y' = -\frac{x}{y}, \\ y(2) = 5. \end{cases} \quad (b2) \quad \begin{cases} y' = -\frac{x}{y}, \\ y(4) = -1. \end{cases}$$

Solução

a) A equação (2) pode ser escrita como

$$y' = f(x, y) ,$$

onde $f(x, y) = -\frac{x}{y}$. Observe que o domínio de definição da função f é dado por $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\}$. Tanto a função f quanto a derivada $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{y^2}$ são contínuas em D . Logo, pelo Teorema 1, temos existência e unicidade de soluções para qualquer PVI associado (2) num ponto $(x_0, y_0) \in D$.

De fato, obtivemos no Exercício 2 da Aula 17, usando o método de variáveis separáveis, que para cada $C > 0$

$$x^2 + y^2 = C, \tag{3}$$

é solução implícita de (2).

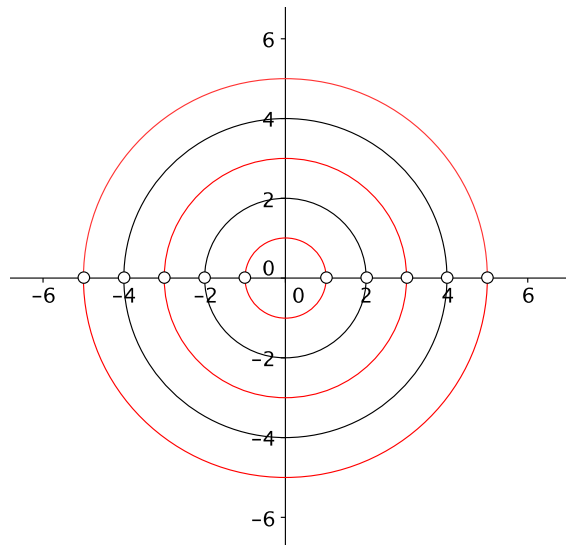


Figura 2: Gráfico das curvas $x^2 + y^2 = C$ para $C = 1$, $C = 4$, $C = 9$, $C = 16$ e $C = 25$.

b1) Avaliando a solução implícita (3) no ponto $(x_0, y_0) = (2, 5)$, vemos que $C = \sqrt{29}$. Como $y_0 = 5 > 0$ obtemos, a partir de (3), que

$$y(x) = \sqrt{29 - x^2} ,$$

é a única solução do PVI (b1), e que a mesma solução está definida no intervalo $(-\sqrt{29}, \sqrt{29})$.

b2) Avaliando a solução implícita (3) no ponto $(x_0, y_0) = (4, -1)$, constatamos que $C = \sqrt{17}$. Como $y_0 = -1 < 0$ obtemos, a partir de (3), que

$$y(x) = -\sqrt{17 - x^2} ,$$

é a única solução do PVI (b2), e que a mesma solução está definida no intervalo $(-\sqrt{17}, \sqrt{17})$.

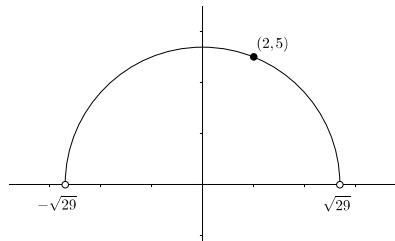


Figura 3: Gráfico da solução do PVI (b1).

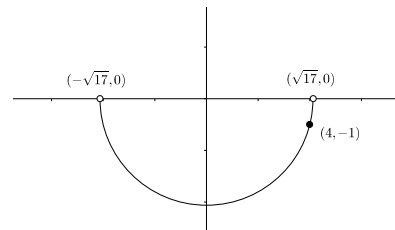


Figura 4: Gráfico da solução do PVI (b2).

□

Exemplo 2

a) Estude a existência e unidade do PVI geral associado à equação

$$y' = \sqrt{y}. \quad (4)$$

b) Resolva os seguintes PVI associados à equação (4).

$$(b1) \quad \begin{cases} y' = \sqrt{y} , \\ y(1) = 4 . \end{cases} \quad (b2) \quad \begin{cases} y' = \sqrt{y} , \\ y(-1) = 0 . \end{cases}$$

Solução

a) A equação (4) pode ser escrita como $y' = f(x, y)$, onde $f(x, y) = \sqrt{y}$, cujo domínio de definição é dado por $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$.

Observe que a função f é contínua em D , enquanto a derivada $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$ é contínua somente em $\tilde{D} = D - \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$. Inclusive, vale observar que a derivada sequer está definida no conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$.

Logo, pelo Teorema 1, temos a existência de soluções para qualquer PVI associado a (4), num ponto $(x_0, y_0) \in D$, mas a unicidade somente está garantida para $(x_0, y_0) \in \tilde{D}$. Com respeito à unicidade nos pontos da forma $(x_0, 0)$, o Teorema 1 não permite decidir nada. Qualquer coisa pode acontecer!

De fato, obtivemos no Exercício 4 da Aula 17, usando o método de variáveis separáveis, que para cada $C \in \mathbb{R}$ a função

$$y = \frac{1}{4}(x + C)^2,$$

definida no intervalo $(-C, +\infty)$, é solução de (4). Além disso, observamos que $y \equiv 0$ definida em \mathbb{R} também é solução de (4).

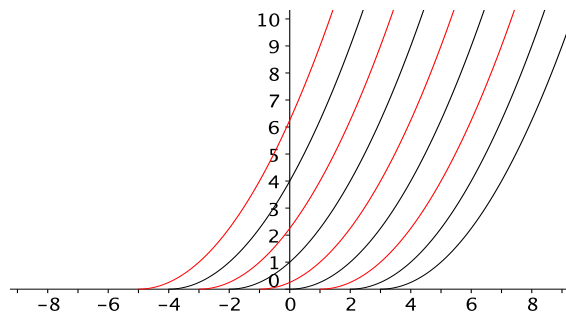


Figura 5: Gráfico das curvas $y = \frac{1}{4}(x + C)^2$ para $C = -3, -2, \dots, 4, 5$.

b1) Avaliando a solução (3) no ponto $(x_0, y_0) = (1, 4)$, vemos que $C = 3$. Além disso, como a função constante $y \equiv 0$ também é solução de (4), constatamos que a função diferenciável (Verifique!)

$$y(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}(x + 3)^2 & \text{se } x > -3, \\ 0 & \text{se } x \leq -3, \end{cases}$$

é a única solução do PVI (b1), e a mesma está definida em \mathbb{R} .

b2) Avaliando a solução (3) no ponto $(x_0, y_0) = (-1, 0)$, vemos que $C = 1$. Além disso, como a função constante $y \equiv 0$ também é solução de (4), temos que

$$y(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}(x+1)^2 & \text{se } x > -1, \\ 0 & \text{se } x \leq -1, \end{cases}$$

é solução do PVI (b2). No entanto, essa não é a única solução. De fato, a função constante $y \equiv 0$ e

$$y(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}(x+C)^2 & \text{se } x > -C, \\ 0 & \text{se } x \leq -C, \end{cases}$$

para qualquer $C \leq 1$ também são soluções do PVI (b2).

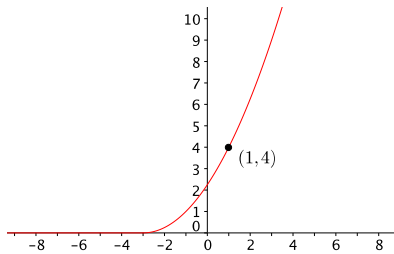


Figura 6: Gráfico da solução do PVI (b1).

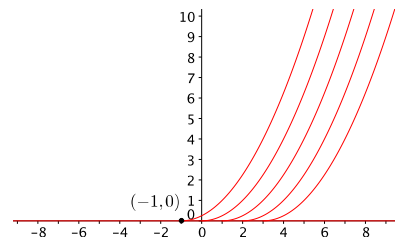


Figura 7: Gráfico de algumas soluções do PVI (b2).

□

3 Exercícios de revisão

Determine os pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ para os quais o Teorema 1 garante a existência e unicidade de soluções para as seguintes equações diferenciais. Em seguida, resolva os PVIs propostos.

1. $y' + xy = 3$ $y(0) = 0.$
2. $xy' + y = 3$ $y(0) = 1.$
3. $y' = y^{2/3}$ $y(0) = 0.$
4. $y' = \frac{e^x}{y}$ $y(0) = 1.$
5. $(1 + y^2) dx + (1 + x^2) dy = 0$ $y(1) = 1.$
6. $y' = \frac{x^{5/6}}{(1-t)^{3/2}}$ $y(0) = 1; y(1/2) = 1.$
7. $y' = \frac{y(1+2x)}{x(2+3y)}$ $y(1) = 1.$
8. $y' = y - y^2$ $y(0) = 1; y(0) = 2; y(2) = 0.$

Aula 19

Equações Diferenciais Homogêneas

Vamos estudar um tipo especial de EDO de primeira ordem não-linear, chamada **Homogênea**. Nesse tipo de equação, fazemos uma mudança e obtemos uma EDO de variáveis separáveis, conteúdo que já foi abordado na Aula 17.

1 Equações Homogêneas na forma normal

Uma **EDO homogênea na forma normal** é escrita da seguinte forma:

$$y' = f(x, y) = F\left(\frac{y}{x}\right), \quad (1)$$

para $x \neq 0$ e alguma função real $F : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Mudando a variável dependente para

$$u(x) = \frac{y(x)}{x}, \quad (2)$$

obtemos $y(x) = xu(x)$, cuja derivada é $y'(x) = u(x) + xu'(x)$. Substituindo y , y' e (2) em (1), segue que

$$xu' = F(u) - u. \quad (3)$$

A EDO em (3) tem u como variável dependente e x como variável independente e é de variáveis separáveis. Assim, resolvemos (3) e voltamos à variável y , substituindo $u = y/x$ nas soluções encontradas.

Exemplo 1

Resolva a EDO $y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy}$, $x > 0$.

Solução

Primeiro, note que $y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy} = \frac{1}{2} \left[\frac{y}{x} - \frac{x}{y} \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{y}{x} - \frac{1}{\frac{y}{x}} \right]$. Logo,

$F(t) = \frac{1}{2} \left[t - \frac{1}{t} \right]$ e, fazendo a mudança $u = y/x$, obtemos

$$u + xu' = \frac{1}{2} \left[u - \frac{1}{u} \right] \Leftrightarrow xu' = -\frac{1}{2} \left[\frac{u^2 + 1}{u} \right].$$

Separando as variáveis e fazendo a integração, segue que

$$\int \frac{2uu'}{u^2 + 1} dx = - \int \frac{1}{x} dx \Leftrightarrow \int \frac{1}{v} dv = - \ln x + c,$$

onde é possível observar que fizemos a mudança de variável $v = u^2 + 1$ na integral do lado esquerdo. Portanto, $\ln |v| = - \ln x + c$ e, aplicando a exponencial, segue que $|v| = \frac{k}{x}$ e, além disso, voltando a u e depois a $u = y/x$, obtemos as soluções implícitas na família de circunferências $y^2 + x^2 = kx$, para $k > 0$. Observe na Figura a seguir. \square

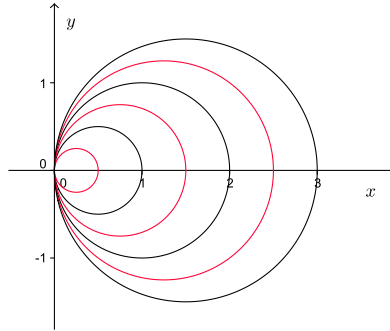


Figura 1: Família de circunferências do exemplo 1.

Exemplo 2

Resolva a EDO $x \frac{dy}{dx} = y + xe^{y/x}$, $x \neq 0$.

Solução

Dividindo ambos os membros da EDO por x , temos $\frac{dy}{dx} = y/x + e^{y/x}$, portanto, $F(t) = t + e^t$. Substituindo $u = y/x$ e $y' = u + xu'$ na EDO, segue que

$$u + xu' = u + e^u \Leftrightarrow xu' = e^u \Leftrightarrow e^{-u}u' = \frac{1}{x}.$$

Ao fazer a integração, temos $-e^{-u} = \ln|x| + c$. Voltando à variável y , obtemos as soluções implícitas $e^{-y/x} = -\ln|x| + c = \ln \frac{k}{|x|}$, ($c = \ln k$, $k > 0$), que podem ser explicitadas como $y = -x \ln \left(\ln \frac{k}{|x|} \right)$. Veja o esboço de algumas soluções na Figura 2. \square

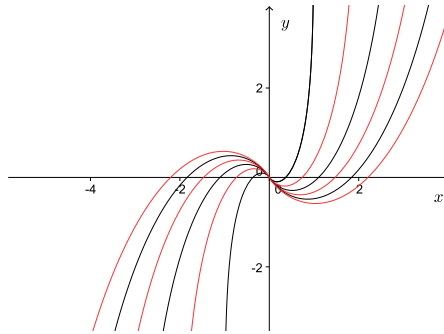


Figura 2: Esboço de algumas soluções da EDO do exemplo 2.

Nos exemplos anteriores, constatamos que as EDOs eram homogêneas, ao "juntarmos" y sobre x e descobriremos a função F . A seguinte proposição nos fornece um método algébrico simples de verificar se uma EDO é homogênea.

Proposição 1

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Então, $f(x, y) = F\left(\frac{y}{x}\right)$, se e somente se, $f(tx, ty) = f(x, y)$, $\forall t \neq 0$, tal que $(tx, ty) \in D$.

Prova

Se $f(x, y) = F\left(\frac{y}{x}\right)$, então $f(tx, ty) = F\left(\frac{ty}{tx}\right) = F\left(\frac{y}{x}\right) = f(x, y)$. Reciprocamente, temos $f(x, y) = f(x1, x\frac{y}{x}) = f(1, \frac{y}{x})$, $\forall x \neq 0$. Assim, definimos $F(t) = f(1, t)$ $t \in I$, onde I é um intervalo e temos $f(x, y) = F\left(\frac{y}{x}\right)$. ■

Exemplo 3

Resolva o PVI
$$\begin{cases} y' = \frac{x+y}{x-y}, & x > 0; \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

Solução

Pela proposição 1, verificamos que a EDO é homogênea, pois

$$f(tx, ty) = \frac{tx + ty}{tx - ty} = \frac{x + y}{x - y} = f(x, y).$$

Fazendo na EDO a mudança $u = y/x$, obtemos

$$u + xu' = \frac{1+u}{1-u} \Leftrightarrow \frac{1-u}{u^2+1}u' = \frac{1}{x}.$$

Ao fazermos a integração, segue

$$\operatorname{arctg} u - \frac{1}{2} \ln(u^2 + 1) = \ln x + c, \text{ pois } x > 0$$

e a solução geral da EDO é

$$\operatorname{arctg} y/x - \frac{1}{2} \ln(y^2 + x^2) = c.$$

Impondo a condição inicial $y(1) = 2$, segue que $c = \operatorname{arctg} 2 - \frac{1}{2} \ln 5$ e, por-

tanto, a solução do PVI está implícita em $\operatorname{arctg} y/x - \frac{1}{2} \ln(y^2 + x^2) = \operatorname{arctg} 2 - \frac{1}{2} \ln 5$

□

Observação 1

Toda EDO do tipo $y' = \frac{ax + by}{cx + dy}$, onde a, b, c, d são constantes, com c ou d

não nulas, é homogênea. De fato, $f(x, y) = \frac{ax + by}{cx + dy} = f(tx, ty)$.

2 Equações Homogêneas na forma diferencial

É comum encontrarmos equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, escritas na forma diferencial. Essa notação foi utilizada na Aula 16 e pode ser bastante útil em alguns contextos. Para escrevermos uma EDO na forma diferencial, fazemos

$$dy = y'(x)dx \quad e \quad f(x, y) = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)},$$

portanto, se

$$y'(x) = f(x, y) = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)},$$

então $dy = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)}dx$, em que

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0. \quad (4)$$

Reciprocamente, dada uma EDO na forma diferencial (4), podemos transformá-la numa EDO na forma normal, dividindo-a por dx . Para a EDO na forma diferencial, usamos outro critério para saber se é Homogênea. Acompanhe a seguir.

Proposição 2

Se existir $\alpha \in \mathbb{R}$, tal que $M(tx, ty) = t^\alpha M(x, y)$ e $N(tx, ty) = t^\alpha N(x, y)$, então a EDO (4) é homogênea.

Exemplo 4

Resolva a equação $(xy + y^2)dx - x^2dy = 0$, $x \neq 0$.

Solução

Observe que

$$M(tx, ty) = txt + (ty)^2 = t^2(xy + y^2) = t^2M(x, y)$$

e

$$N(tx, ty) = -(tx)^2 = t^2(-x^2) = t^2N(x, y),$$

portanto, pela proposição 2, a EDO é homogênea. Assim, mudando a variável para $u = y/x$ e calculando a diferencial dy em função de du e dx , temos $dy = udx + xdu$. Substituindo na EDO, segue que

$$[xux + (ux)^2]dx - x^2(udx + xdu) = 0 \Leftrightarrow x^2[u^2dx - xdu] = 0$$

$$\Leftrightarrow u^2dx - xdu = 0 \Leftrightarrow \frac{dx}{x} = \frac{du}{u^2}. \quad (5)$$

Ao integrar à esquerda em relação a x , e à direita, em relação à u , concluímos que $\ln|x| = -\frac{1}{u} + c \Leftrightarrow u = \frac{1}{c - \ln|x|}$. Portanto, $y = \frac{x}{c - \ln|x|}$, ou temos a

solução constante $y = 0$, pois a primeira EDO em (5) possui $y/x = u = 0$ como solução constante. \square

Observação 2

Dada uma EDO homogênea $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$, também podemos fazer a mudança $v = \frac{x}{y}$, onde pensamos que a variável independente é y , x e v são dependentes. Em geral, essa mudança é usada quando $M(x, y)$ é mais simples do que $N(x, y)$, ou se a mudança $u = \frac{y}{x}$ resultar numa integral difícil ou impossível de se calcular de forma elementar. Veja o exemplo a seguir.

Exemplo 5

Resolva a EDO $y^2 dx - (x^2 + xy + y^2)dy = 0$.

Solução

Pela proposição 2, é fácil ver que a EDO é homogênea. Vamos fazer a mudança $v = x/y$, onde $dx = vdy + ydv$. Então, substituindo na EDO, temos

$$y^2(vdy + ydv) - (y^2v^2 + vy^2 + y^2)dy = 0 \Leftrightarrow ydv - (v^2 + 1)dy = 0.$$

Logo, $\frac{dv}{v^2 + 1} = \frac{dy}{y}$. Assim, $\arctg v = \ln |y| + c$, donde $\arctg(x/y) = \ln |y| + c$.

\square

Observação 3

Se fizermos a mudança $u = \frac{y}{x}$, vamos obter a EDO $\frac{1 + u + u^2}{u + u^3} du = -\frac{dx}{x}$.

Essa equação é mais difícil de resolver devido ao termo que deverá ser integrado em u .

3 Exercícios de revisão

Resolva as EDOs homogêneas.

1. $(x + y)y' = y - x$.
2. $xy^2y' = y^3 - x^3$.
3. $ydx + x(\ln x - \ln y - 1)dy = 0$.
4. $xdy = (y + \sqrt{x^2 - y^2})dx, x > 0$.

Resolva os PVI's.

5. $(x^2 + 2y^2)dx = xydy, y(-1) = 1$.
6. $(x + \sqrt{xy})\frac{dy}{dx} + x - y = x^{-1/2}y^{3/2}, y(1) = 1$.

Aula 20

Equações lineares de primeira ordem

Nesta aula, estudaremos duas técnicas para resolver equações lineares de primeira ordem.

1 Conceitos básicos

Uma [equação diferencial ordinária linear](#) de primeira ordem é uma expressão da forma

$$a(x)y' + b(x)y = c(x), \quad (1)$$

onde a, b e c são funções arbitrárias. Quando c for a função constante zero, diremos que a equação (1) é [homogênea](#). Tal definição nada tem a ver com a definição de equação homogênea dada na Aula 19.

Pelo Teorema 1 da Aula 18, podemos garantir a existência e unicidade de soluções para o PVI associado a (1) no ponto (x_0, y_0) , sempre que a, b e c sejam funções contínuas e $a(x_0) \neq 0$. Logo, vamos nos concentrar em intervalos onde $a(x) \neq 0$ e dividir os dois lados da equação (1) entre $a(x)$, obtendo

$$y' + P(x)y = Q(x), \quad (2)$$

onde $P(x) = \frac{b(x)}{a(x)}$ e $Q(x) = \frac{c(x)}{a(x)}$.

Observação 1

Note que nos intervalos onde $a(x) \equiv 0$, a função y fica determinada por $b(x)y(x) = c(x)$. Porém, não garantimos mais unicidade do PVI com condição inicial em um zero isolado da função a . Nesse caso, outras ferramentas, como as séries de potências, são utilizadas na procura de soluções do PVI.

Vamos estudar duas maneiras diferentes de resolver a equação (2).

Solucionando a equação homogênea e achando uma solução particular: Um traço comum às equações lineares (independentemente da ordem) é que para encontrar a solução geral, basta achar a solução geral do problema homogêneo associado y_h e uma solução y_p (solução particular) do problema não homogêneo. Uma vez feito isso, a solução geral do problema original é dada por

$$y = y_h + y_p. \quad (3)$$

Logo, para resolver a equação (2) começamos resolvendo a equação homogênea

$$y' + P(x)y = 0.$$

Esta equação é de variáveis separáveis, e tem como solução geral

$$y_h(x) = c e^{-\int P(x)dx}, \quad (4)$$

onde $c \in \mathbb{R}$.

Para achar uma solução particular da equação (2), usamos uma técnica chamada **variação de parâmetros**, que será estudada em maior detalhe na Aula 28. Esta técnica consiste em procurar uma função $c(\cdot)$ tal que $y_p(x) = c(x)e^{-\int P(x)dx}$ seja solução da equação (2). O que fazemos é trocar o parâmetro c que aparece em (4), por uma função $c(\cdot)$, daí o nome do método.

Suponhamos que,

$$y_p(x) = c(x)e^{-\int P(x)dx} \quad \text{e, portanto,} \quad y_p'(x) = [c'(x) - P(x)c(x)]e^{-\int P(x)dx}.$$

Para que y_p seja solução de (2), precisamos que

$$[c'(x) - P(x)c(x)]e^{-\int P(x)dx} + P(x)c(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x).$$

Logo,

$$c'(x) = Q(x)e^{\int P(x)dx}.$$

Integrando os dois lados da equação anterior, obtemos

$$c(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C.$$

Já que estamos procurando uma solução particular, podemos tomar $C = 0$. Assim,

$$y_p(x) = e^{-\int P(x)dx} \int Q(x)e^{\int P(x)dx}.$$

Finalmente concluimos, a partir de (2), que a solução geral de (2) é dada por

$$y = Ce^{-\int P(x)dx} + e^{-\int P(x)dx} \int e^{\int P(x)dx} Q(x)dx, \quad (5)$$

onde C é uma constante arbitrária.

Achando um fator integrante: Esta segunda abordagem é totalmente diferente da primeira. Observe que ao multiplicarmos os dois lados da equação (2) pela função

$$\lambda(x) = e^{\int P(x)dx},$$

temos

$$(y(x)e^{\int P(x)dx})' = Q(x)e^{\int P(x)dx}. \quad (6)$$

Integrando os dois lados na expressão anterior temos

$$y(x)e^{\int P(x)dx} = \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C ,$$

onde C é uma constante arbitrária. Assim, dividindo por $e^{\int P(x)dx}$, obtemos

$$y(x) = e^{-\int P(x)dx} \left\{ \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C \right\},$$

que é exatamente a mesma fórmula obtida em (8).

Observação 2

- A função $\lambda(x)$, que faz com que apareça a derivada de um produto do lado esquerdo da equação (6), é um caso particular do chamado **fator integrante**. Esse conceito será estudado mais detalhadamente na Aula 21.
- Embora o segundo método seja um pouco mais simples de usar do que o primeiro, ele só pode ser adotado para equações de primeira ordem, enquanto a ideia do segundo pode ser generalizada para equações lineares de qualquer ordem (ver Aula 24).

Exemplo 1

Ache a solução geral de

$$y' - y = 2xe^{2x}. \quad (7)$$

Solução

Começamos resolvendo a equação homogênea

$$y' - y = 0.$$

Esta equação é de variáveis separáveis e tem como solução geral

$$y_h(x) = c e^x,$$

onde $c \in \mathbb{R}$. Para achar uma solução particular da equação (7), usamos variação de parâmetros. Ou seja, supomos que

$$y_p(x) = c(x)e^x \quad \text{e, portanto,} \quad y_p'(x) = [c'(x) + c(x)]e^x.$$

Substituindo y_p e y_p' na equação (7), obtemos

$$[c'(x) + c(x)]e^x - c(x)e^x = 2xe^{2x} \quad \text{e, portanto,} \quad c'(x) = 2xe^x.$$

Assim, integrando por partes, obtemos a solução particular

$$y_p(x) = 2xe^{2x} - 2e^{2x}.$$

Logo, concluímos que a solução geral de (7) é dada por

$$y = Ce^x + 2xe^{2x} - 2e^{2x}, \quad (8)$$

onde C é uma constante arbitrária. \square

Exemplo 2

Ache a solução geral de

$$y' - \operatorname{tg}(x) y = \operatorname{sen}(x). \quad (9)$$

Solução

Observe que a equação somente está bem definida nos valores de x tais que $\cos(x) \neq 0$. Multiplicando os dois lados da equação (9) pelo fator integrante

$$\lambda(x) = e^{-\int \operatorname{tg} x dx} = e^{\ln \cos x} = \cos x,$$

temos

$$\cos(x)y' - \operatorname{sen}(x)y = \operatorname{sen}(x) \cos(x).$$

Isto é,

$$(y(x) \cos(x))' = \operatorname{sen}(x) \cos(x).$$

Integrando os dois lados da expressão anterior temos

$$y(x) \cos(x) = -\frac{1}{2} \cos^2(x) + C ,$$

onde C é uma constante arbitrária. Assim, dividindo por $\cos(x)$, concluímos que a solução geral de (9) é dada por

$$y(x) = C \sec(x) - \frac{1}{2} \cos(x).$$

□

Exemplo 3

Ache a solução geral de

$$x^3 y' + 4x^2 y = e^{-x}. \quad (10)$$

Solução

Note que a equação somente está bem definida para $x \neq 0$. Primeiro colocamos a equação (10) na forma (2),

$$y' + 4x^{-1}y = x^{-3}e^{-x},$$

e depois multiplicamos pelo fator integrante

$$\lambda(x) = e^{4 \int x^{-1} dx} = e^{4 \ln|x|} = x^4 .$$

Assim,

$$x^4 y' + 4x^3 y = x e^{-x} ,$$

isto é,

$$(y(x)x^4)' = x e^{-x}.$$

Integrando os dois lados da expressão anterior temos

$$y(x)x^4 = -e^{-x} - x e^{-x} + C ,$$

onde C é uma constante arbitrária. Assim, dividindo por x^4 , concluímos que a solução geral de (10) é dada por

$$y(x) = Cx^{-4} - x^{-4}[1+x]e^{-x}.$$

□

Exemplo 4

Ache a solução geral de

$$(1+x^2)y' + 4xy = (1+x^2)^{-2}. \quad (11)$$

Solução

Primeiro, colocamos a equação (11) na forma (2),

$$y' + \frac{4x}{1+x^2}y = (1+x^2)^{-3},$$

e, depois, multiplicamos pelo fator integrante

$$\lambda(x) = e^{\int \frac{4x}{1+x^2} dx} = e^{2 \ln(1+x^2)} = (1+x^2)^2.$$

Assim, temos

$$(1+x^2)^2 y' + 4x(1+x^2)y = (1+x^2)^{-1},$$

isto é,

$$(y(x)(1+x^2)^2)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

Integrando os dois lados da expressão anterior temos

$$y(x)(1+x^2)^2 = \arctg(x) + C,$$

onde C é uma constante arbitrária. Assim, dividindo por $(1+x^2)^2$, concluímos que a solução geral de (10) é dada por

$$y(x) = C(1+x^2)^{-2} + (1+x^2)^{-2} \arctg(x).$$

□

2 Exercícios de revisão

Encontre a solução geral das seguintes EDOs e resolva, em cada caso, o PVI associado a $x(0) = 1$.

1. $x'(t) - 3x(t) = 5$.
2. $3x'(t) + 2x(t) + 16 = 0$.
3. $x'(t) + 2x(t) = t^2$.

Resolva as seguintes equações.

4. $tx'(t) + 2x(t) + t = 0$ para $t \neq 0$.
5. $x'(t) - \frac{x(t)}{t} = t$ para $t > 0$.
6. $x'(t) - \frac{tx(t)}{t^2-1} = t$ para $t > 1$.
7. $x'(t) - \frac{2x(t)}{t} + \frac{2}{t^2} = 0$ para $t > 0$.

Na teoria de leilões, aparece o seguinte PVI :

$$\begin{cases} x'(t)G(t) + x(t)G'(t) = tG'(t) \\ x(t_0) = t_0 \end{cases},$$

onde G é uma função desconhecida que representa a valorização do objeto para venda no tempo.

8. Resolva esta equação, expressando a solução em termos da função G , mas não em função da sua derivada.

9. Se você escreveu a equação na forma canônica e achou o fator integrante, procure pensar na razão pela qual não precisava fazer isso.

Aula 21

Equações exatas e equações redutíveis às exatas

Nesta aula, estudaremos as EDOs chamadas **Exatas**, isto é, equações de primeira ordem que, quando escritas na forma diferencial, coincidem com a diferencial total de uma função de duas variáveis.

1 Equações exatas

Lembre-se de que se $z = f(x, y)$ é uma função de duas variáveis com derivadas parciais de 1ª ordem contínuas numa região R do plano xy , sua diferencial total df (ou dz) é dada por

$$df = f_x dx + f_y dy.$$

Definição 1

Dizemos que uma EDO do tipo

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \tag{1}$$

é **exata** se existe uma função $f(x, y)$, de classe C^2 , num domínio $R \subset \mathbb{R}^2$, tal

que

$$M(x, y) = f_x(x, y) \quad e \quad N(x, y) = f_y(x, y); \quad (2)$$

em R .

Como uma EDO exata pode ser reescrita na forma

$$f_x + f_y \frac{dy}{dx} = 0,$$

pela Regra da Cadeia para funções de diferentes variáveis, temos

$$\frac{d}{dx} f(x, y(x)) = f_x + f_y \frac{dy}{dx} = 0,$$

em que $f(x, y(x)) = c$. Portanto, sua solução geral é formada pelas curvas de nível da função $f(x, y)$, ou ainda, as soluções estão implícitas na equação $f(x, y) = c$, onde c é uma constante. Assim, se identificarmos que uma EDO é exata, basta conhecermos uma f nas condições acima para que tenhamos as soluções da EDO dadas implicitamente por $f(x, y) = c$.

Agora convém fazermos as seguintes indagações:

1. Como identificar uma EDO exata?
2. Sabendo que a EDO é exata, como determinar uma função f ?

A primeira pergunta será respondida pela proposição a seguir, conhecida como *Condição de Euler*.

Proposição 1

Sejam $M, N : I_1 \times I_2 \rightarrow \mathbb{R}$ funções de classe C^1 , onde I_1, I_2 são intervalos abertos. A EDO (1) é exata se e somente se:

$$\frac{\partial}{\partial y} M(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} N(x, y) \quad (3)$$

$$\forall (x, y) \in I_1 \times I_2.$$

Observação 1

- Note que a condição (3), conhecida como condição de Euler, está associada ao Teorema de Schwarz, o qual trata da igualdade entre as derivadas mistas de uma função f de classe C^2 . Ou seja, do Teorema de Schwarz segue que se (1) for exata, então a condição de Euler (3) é verdadeira.
- A recíproca da proposição anterior nos dá a condição algébrica (3), que usaremos para verificar se a EDO em questão é exata. Assim, sabendo que uma dada EDO é exata, o passo seguinte será encontrar uma função $f(x, y)$ que satisfaça (2). A fim de determinarmos uma tal função f , o que fazemos é utilizar (2), e começamos pela primeira igualdade, integrando em relação a x , ou pela segunda igualdade, integrando em relação a y . Observe os exemplos a seguir.

2 Exemplos

Exemplo 1

Considere a equação

$$4x^3ydx + (x^4 + 2y)dy = 0,$$

em \mathbb{R}^2 .

- a) Mostre que a EDO é exata.
- b) Resolva a EDO.

Solução

- a) Para mostrar que a EDO é exata, basta verificar a condição de Euler (3), onde $M(x, y) = 4x^3y$ e $N(x, y) = x^4 + 2y$. Então,

$$\frac{\partial}{\partial y}M(x, y) = 4x^3 \quad e \quad \frac{\partial}{\partial x}N(x, y) = 4x^3.$$

Logo, a condição de Euler (3) é satisfeita em \mathbb{R}^2 e, portanto, a EDO é exata.

- b) Já sabemos, pelo item a, que a EDO é exata, então vamos determinar uma função f , tal que a EDO se escreva como $df = 0$. Integrando a primeira igualdade em (2) em relação a x , obtemos:

$$f(x, y) = \int 4x^3y \, dx + g(y) = 4y \int x^3 \, dx + g(y) = x^4y + g(y); \quad (4)$$

em que aparece uma função g que só depende de y no lugar da constante arbitrária. Pois, essa é a expressão mais geral que podemos encontrar para a f , uma vez que a derivada parcial da função g em relação a x é zero. Agora, derivando (4) em relação a y e comparando o resultado com a segunda igualdade em (2), temos

$$f_y(x, y) = x^4 + g'(y) = x^4 + 2y,$$

donde $g'(y) = 2y$, e, portanto, integrando

$$g(y) = y^2 + k, \quad (5)$$

onde k é uma constante arbitrária. Logo, de (4) e (5), temos

$$f(x, y) = x^4y + y^2 + k.$$

Assim, as soluções da EDO estão implícitas em $f(x, y) = x^4y + y^2 + k = c$, isto é, unificando as constantes arbitrárias c e k , as soluções da EDO estão implícitas em $x^4y + y^2 = c$, para $c \in \mathbb{R}$.

□

Exemplo 2

Resolva a equação :

$$(e^{3y} - y \cos xy)dx + (3xe^{3y} - x \cos xy + y^3)dy = 0,$$

em \mathbb{R}^2

Solução

Nesse exemplo, $M_y = 3e^{3y} - \cos xy + xy \operatorname{sen} xy$ e $N_x = 3e^{3y} - \cos xy + xy \operatorname{sen} xy$, logo, a EDO satisfaz (3), donde, é exata. Integrando a primeira igualdade em (2), em relação a x , obtemos:

$$f(x, y) = \int e^{3y} - y \cos xy \, dx + g(y) = xe^{3y} - \operatorname{sen} xy + g(y). \quad (6)$$

Derivando (6) em relação a y e comparando o resultado com a segunda igualdade em (2), segue que

$$f_y(x, y) = 3xe^{3y} - x \cos xy + g'(y) = 3xe^{3y} - x \cos xy + y^3,$$

donde $g'(y) = y^3$, e, portanto, integrando

$$g(y) = \frac{y^4}{4} + k. \quad (7)$$

Logo, de (6) e (7), temos que

$$f(x, y) = xe^{3y} - \operatorname{sen} xy + \frac{y^4}{4}.$$

Assim, as soluções da EDO estão implícitas em

$$xe^{3y} - \operatorname{sen} xy + \frac{y^4}{4} = c.$$

□

Exemplo 3

Resolva o PVI :

$$\begin{cases} y' = \frac{(x+y)^2}{1-x^2-2xy}; \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

Solução

Primeiro, vamos reescrever a equação na forma diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x+y)^2}{1-x^2-2xy} \Rightarrow (x+y)^2 dx + (x^2 + 2xy - 1)dy = 0.$$

Assim, $M_y = 2(x+y) = 2x + 2y$ e $N_x = 2x + 2y$, o que indica que a EDO é exata, pois satisfaz a condição de Euler. Integrando a primeira igualdade em (2) em relação a x , obtemos

$$f(x, y) = \frac{(x+y)^3}{3} + g(y). \quad (8)$$

Derivando (8) em relação a y e comparando com a segunda igualdade em (2), segue que

$$f_y(x, y) = (x+y)^2 + g'(y) = x^2 + 2xy - 1,$$

em que $g'(y) = -1 - y^2$, e, portanto, integrando

$$g(y) = -y - \frac{y^3}{3} + k. \quad (9)$$

Logo, de (8) e (9), temos

$$f(x, y) = \frac{(x+y)^3}{3} - y - \frac{y^3}{3}.$$

Assim, as soluções da EDO estão implícitas em

$$\frac{(x+y)^3}{3} - y - \frac{y^3}{3} = c.$$

Impondo a condição inicial, temos

$$\frac{(1+1)^3}{3} - 1 - \frac{1^3}{3} = c \Rightarrow c = \frac{8}{3} - 1 - \frac{1}{3} = \frac{4}{3}.$$

Portanto, a solução do PVI está implícita em

$$\frac{(x+y)^3}{3} - y - \frac{y^3}{3} = \frac{4}{3}.$$

□

3 Equações redutíveis às exatas

Considere a EDO a seguir:

$$(x + y)dx + (x \ln x)dy = 0, x > 0, y \in \mathbb{R}.$$

Observe que ela não é exata, pois não satisfaz a condição de Euler (3), já que

$$M_y = 1 \neq N_x = \ln x + 1.$$

Porém, multiplicando-a pela função $I(x) = \frac{1}{x}$, obtemos como resultado a EDO:

$$\left(1 + \frac{y}{x}\right)dx + \ln x dy = 0, x > 0, y \in \mathbb{R},$$

que é exata. Podemos, então, usar o procedimento da seção anterior para resolvê-la. A função I utilizada é dita um *fator integrante*.

Dada uma EDO do tipo:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0; \tag{10}$$

queremos encontrar uma função $I(x, y)$ que seja um fator integrante para (10), isto é, uma função que, ao multiplicarmos a EDO (10) por I , possa garantir uma equação exata. Isto significa, segundo a condição de Euler, que

$$(IM)_y = (IN)_x,$$

a qual equivale a

$$I_y M + I M_y = I_x N + I N_x, \tag{11}$$

que é uma Equação Diferencial Parcial (envolve derivadas parciais). Assim, no caso geral, a determinação de um fator integrante pode ser um problema tão ou mais difícil do que resolver a EDO original! Porém, como o objetivo é simplificar para resolver a EDO dada, vamos trabalhar somente com fatores integrantes que dependam de uma única variável. É claro que nem sempre

é possível encontrar um fator integrante com essa característica, portanto, essa hipótese deixará algumas equações de fora do nosso estudo. No entanto, vamos poder resolver as mais simples. Assim, vamos supor que I só dependa de x para chegarmos a uma expressão para o fator. Nesse caso, (11) se reduz a

$$IM_y = I'N + IN_x,$$

e, portanto, se o quociente

$$\frac{M_y - N_x}{N} \tag{12}$$

só depender de x , poderemos obter I como solução da EDO de variáveis separáveis (13)

$$\frac{I'}{I} = \frac{M_y - N_x}{N}. \tag{13}$$

Observe o fato de que a função (12), ao depender só de x , já representa uma condição de compatibilidade, pois estamos supondo $I = I(x)$.

Resolvendo a EDO (13), obtemos, para o fator integrante $I(x)$, a expressão

$$I(x) = e^{\int \frac{M_y - N_x}{N} dx}. \tag{14}$$

Resumindo o que acabamos de fazer: Se o quociente (12) só depender de x , a EDO (10) poderá ser multiplicada pelo fator integrante (14), a fim de tornar-se exata.

Analogamente, as contas anteriores podem ser feitas, supondo que I só dependa de y , desde que $\frac{N_x - M_y}{M}$ seja uma função só de y . Em tal caso, teremos a seguinte expressão para o fator integrante

$$I(y) = e^{\int \frac{N_x - M_y}{M} dy}. \tag{15}$$

Observação 2

Observe que existem vários fatores integrantes, pois na prática desprezamos a constante arbitrária no processo de integração envolvido. Porém, os fatores são iguais a menos de uma constante multiplicativa.

Exemplo 4

Resolva a equação:

$$(xy + x^2 + 1)dx + x^2dy = 0, x > 0. \quad (16)$$

Solução

Como $\frac{M_y - N_x}{N} = -\frac{1}{x}$ e, portanto, depende somente de x , segue que a EDO admite um fator integrante que só depende da variável x e é dado por (14), ou seja,

$$I(x) = e^{\int \frac{M_y - N_x}{N} dx} = e^{-\int \frac{dx}{x}} = e^{-\ln x} = \frac{1}{x}. \quad (17)$$

Multiplicando a EDO dada (16) por (17), obtemos a EDO exata:

$$(y + x + \frac{1}{x})dx + xdy = 0, x > 0.$$

Agora, resta calcularmos a função $f(x, y)$, tal que (17) se escreva como $df = 0$. De (2), obtemos, após integração em relação a x ,

$$f(x, y) = yx + \frac{x^2}{2} + \ln x + g(y). \quad (18)$$

Derivando (18) em relação a y e comparando com a segunda igualdade em (2), segue que

$$f_y(x, y) = x + g'(y) = x.$$

Portanto, $g'(y) = 0$, onde a função g é constante. Assim, podemos perceber

que as soluções da EDO (16) estão implícitas em

$$yx + \frac{x^2}{2} + \ln x = c.$$

Nesse caso, as soluções podem ser explicitadas como

$$y = \frac{1}{x} \left[c - \frac{x^2}{2} - \ln x \right], x > 0.$$

□

Exemplo 5

Resolva a equação:

$$(\cos x + 1)dx + \left(\frac{x + \operatorname{sen} x}{y} - 2 \right)dy = 0, y > 0. \quad (19)$$

Solução

Como $\frac{N_x - M_y}{M} = \frac{1}{y}$ e, portanto, depende somente de y , segue que a EDO (19) admite um fator integrante que só depende da variável y e é dado por (15), ou seja,

$$I(y) = e^{\int \frac{N_x - M_y}{M} dy} = y. \quad (20)$$

Multiplicando a EDO dada (19) por (20), obtemos a EDO exata:

$$(y \cos x + y)dx + (x + \operatorname{sen} x - 2y)dy = 0. \quad (21)$$

Agora, resta calcularmos a função $f(x, y)$, tal que (21) se escreva como $df = 0$. De (2), obtemos, após a integração em relação a x ,

$$f(x, y) = yx + y \operatorname{sen} x + g(y). \quad (22)$$

Derivando (22) em relação a y e comparando com a segunda igualdade em (2), segue que

$$f_y(x, y) = x + \operatorname{sen} x + g'(y) = x + \operatorname{sen} x - 2y.$$

Portanto, $g'(y) = -2y$, onde $g(y) = -y^2 + k$. Assim, de (22) segue que as soluções da EDO (19) estão implícitas em:

$$yx + y \operatorname{sen} x - y^2 = c,$$

onde $y > 0$ \square

Observação 3

- Quando multiplicamos uma EDO por um fator integrante obtemos uma segunda EDO, que pode possuir soluções que não satisfazem à primeira EDO. E, reciprocamente, a EDO original pode possuir soluções que não satisfaçam à EDO multiplicada pelo fator integrante. Isso se deve ao fato de que os domínios dessas EDOs podem ser diferentes. No exemplo 5 anterior, a solução trivial $y = 0$ satisfaz (21), mas não (19), pois o domínio de (19) exclui $y = 0$.
- Na Aula 20, vimos como resolver EDOs de 1^a ordem lineares através da multiplicação pelo fator integrante. O fator integrante descrito na Aula 20 é o mesmo fator $I(x)$ que podemos encontrar se usarmos o método dessa aula e transformarmos a EDO de 1^a ordem, linear, do tipo:

$$y' + p(x)y = q(x) \Leftrightarrow [p(x)y - q(x)]dx + dy,$$

numa EDO exata, onde, nesse caso, $M(x, y) = p(x)y - q(x)$ e $N(x, y) = 1$.

- O caso geral de cálculo de fatores integrantes do tipo $I(x, y)$ não foi tratado. No entanto, em algumas situações, conseguimos determinar $I(x, y)$ por inspeção.

4 Exercícios de revisão

Identifique as equações exatas e resolva-as.

1. $(2x - 1)dx + (7y + 4)dy = 0$;
2. $(4x^3 + 4xy)dx + (2x^2 + 2y - 1)dy = 0$;
3. $(4x - 8y^3)dy + (5x + 4y)dx = 0$;
4. $(y^2x + x)dx - (yx^2)dy = 0$;
5. $\cos x \cos yy' + (\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y) = 0$;
6. $(1 + \ln x + \frac{y}{x}) dx = (1 - \ln x)dy, x > 0$;
7. $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}(\ln y - \ln x), x > 0$;

Nos exercícios de 1 a 7 anteriores, encontre fatores integrantes apropriados e resolva as EDOs não exatas.

8. Resolva o PVI $(e^x - y)dx + (2 - x + ye^y)dy = 0, y(0) = 1$;
9. Resolva o PVI $(x + y)dx + (x \ln x)dy = 0, x > 0, y(e) = 1$;
10. Resolva a EDO $(x^2 + 2xy - y^2)dx + (y^2 + 2xy - x^2)dy = 0$, usando $I(x, y) = (x + y)^{-2}$ como fator integrante;
11. Determine uma função $M(x, y)$ que torna a seguinte EDO exata:

$$M(x, y)dx + \left(xe^{xy} + 2xy + \frac{1}{x} \right) dy = 0;$$

12. Mostre que qualquer EDO separável de 1^a ordem, na forma $h(y)dy - g(x)dx = 0$, onde h e g são deriváveis, também é exata.

Aula 22

Equações de Bernoulli, Ricatti e Clairaut

Nesta aula, estudaremos três tipos de equações diferenciais não lineares de primeira ordem, conhecidas como equações de Bernoulli, Ricatti e Clairaut, respectivamente.

1 Equação de Bernoulli

Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, a equação diferencial ordinária (não linear se $\alpha \notin \{0, 1\}$), de primeira ordem, da forma:

$$y' + P(x)y = Q(x)y^\alpha, \quad (1)$$

é chamada **equação de Bernoulli**.

Observação 1

Note que (1) é uma equação linear se $Q(x) = 0$ ou se $\alpha \in \{0, 1\}$.

Para determinar a solução geral de (1), a ideia é transformar essa equação em uma equação linear (observe que $y \equiv 0$ é solução de (1) se

$\alpha > 0$). Começamos dividindo os dois lados da equação (1) por y^α , obtendo

$$\frac{y'}{y^\alpha} + \frac{P(x)}{y^{\alpha-1}} = Q(x).$$

Definindo a função $w = y^{1-\alpha}$, temos que $w'(x) = (1 - \alpha)y^{-\alpha}y'$. Em termos da função w , a equação anterior se transforma em

$$w' + (\alpha - 1)P(x)w = (\alpha - 1)Q(x), \quad (2)$$

que é uma equação linear.

Assim, para resolver a equação (1), basta resolver a equação linear (2) (ver Aula 20) e desfazer a mudança $w = y^{1-\alpha}$.

Exemplo 1

Resolva a equação

$$xy' + y = x^3y^3 \text{ para } x \neq 0. \quad (3)$$

Solução

Note que a equação (3) é uma equação de Bernoulli. De fato, (3) é equivalente a

$$y' + \frac{1}{x}y = x^2y^3.$$

Fazendo $w = y^{-2}$, temos que $w' = -2y^{-3}y'$. Logo, a equação anterior se transforma em

$$w' - \frac{2}{x}w = -2x^2.$$

Essa equação é linear. Assim, multiplicando pelo fator integrante x^{-2} dos dois lados da equação, obtemos

$$[x^{-2}w]' = -2.$$

Integrando a última equação, observamos que

$$x^{-2}w = -2x + C,$$

onde $C \in \mathbb{R}$. Logo, já que $w = y^{-2}$, temos

$$y^2 = \frac{1}{x^2(C - 2x)}.$$

□

Exemplo 2

Resolva a equação

$$2xyy' - y^2 + x = 0 \quad \text{para } x \neq 0. \quad (4)$$

Solução

Note que a equação (4) é uma equação de Bernoulli. De fato, (4) é equivalente a

$$y' - \frac{1}{x}y = -\frac{1}{2}y^{-1}.$$

Fazendo $w = y^2$ temos que $w' = 2yy'$. Logo, a equação anterior se transforma em

$$w' - \frac{1}{x}w = -1.$$

Essa equação é linear. Assim, multiplicando pelo fator integrante x^{-1} dos dois lados da equação, obtemos

$$[x^{-1}w]' = -\frac{1}{x}.$$

Integrando a última equação, vemos que

$$x^{-1}w = -\ln|x| + C,$$

onde $C \in \mathbb{R}$. Logo, já que $w = y^2$, temos que

$$y^2 = x(C - \ln |x|).$$

□

2 Equação de Ricatti

A equação diferencial ordinária não linear de primeira ordem da forma:

$$y' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x) \quad (5)$$

é chamada **equação de Ricatti**.

Observação 2

Repare que (5) é uma equação linear se $P(x) = 0$ e uma equação de Bernoulli se $R(x) = 0$.

Vamos estudar duas maneiras diferentes de resolver a equação (5).

1^a) **Quando conhecemos uma solução particular:** A ideia para determinar a solução geral de (5), dado que já conhecemos alguma solução y_p (solução particular), é transformar a equação em uma equação de Bernoulli.

Seja y_p uma solução de (5). Definindo a função $z = y - y_p$, temos que $z' = y' - y_p'$. Em termos das funções z e y_p , a equação (5) se transforma em

$$z' + y_p' = P(x)\{z^2 + 2zy_p + y_p^2\} + Q(x)\{z + y_p\} + R(x). \quad (6)$$

Dado que y_p uma solução de (5), isto é,

$$y_p' = P(x)y_p^2 + Q(x)y_p + R(x),$$

obtemos, a partir de (6),

$$z' = P(x)z^2 + [Q(x) + 2P(x)y_p]z. \quad (7)$$

Observe que a equação (7) é uma equação de Bernoulli em z . Assim, para resolver a equação (5), basta resolver a equação de Bernoulli (7), usando o método visto no início da aula, lembrando que $y = z + y_p$.

Observação 3

Você deve ter observado que no procedimento anterior fizemos duas mudanças de variável, o que poderíamos ter feito simultaneamente, considerando a mudança de variável $y = y_p + 1/w$.

2^a) **Quando não conhecemos nenhuma solução particular:** Uma maneira de resolver a equação (5), quando não conhecemos nenhuma solução particular, é transformar (5) em uma equação linear de segunda ordem. Embora neste curso não estudemos esse tipo de equações em geral, motivo pelo qual não daremos exemplos do presente caso, é importante observar que reduzir uma equação não linear a uma equação linear (mesmo que seja de ordem maior) é uma simplificação do problema.

Vejam, então, como obter a equação linear de segunda ordem. Definindo a função $v(x) = P(x)y(x)$ temos $v'(x) = P(x)y'(x) + P'(x)y(x)$. Em termos da função v , a equação (5) se transforma em

$$v' = v^2 + \left[Q(x) + \frac{P'(x)}{P(x)} \right] v + P(x)R(x). \quad (8)$$

Fazendo $v = -\frac{u'}{u}$ temos $v' = \frac{(u')^2 - u''u}{u^2}$. Em termos da função u , a equação (8) se transforma em

$$-\frac{u''}{u} = -\left[Q(x) + \frac{P'(x)}{P(x)} \right] \frac{u'}{u} + P(x)R(x).$$

Multiplicando os dois lados da equação anterior por u , obtemos a seguinte equação linear de segunda ordem:

$$u'' - \left[Q(x) + \frac{P'(x)}{P(x)} \right] u' + P(x)R(x)u = 0.$$

Exemplo 3

Verifique que $y_p = x$ é solução de

$$y' = \frac{1}{x}y^2 - 2\left(1 - \frac{1}{x}\right)y + x - 1 \quad (9)$$

e resolva a equação.

Solução

Para verificar que $y_p = x$ é solução de (9), basta ver que

$$1 = \frac{1}{x}x^2 - 2\left(1 - \frac{1}{x}\right)x + x - 1.$$

Note que a equação (9) é uma equação de Ricatti. Fazendo $y = z + x$, temos $y' = z' + 1$. Logo, a equação anterior se transforma em

$$z' - \frac{2}{x}z = \frac{z^2}{x},$$

que é uma equação do tipo Bernoulli. Fazendo $w = z^{-1}$, temos $w' = -z^{-2}z'$. Logo, a equação anterior se transforma em

$$w' + \frac{2}{x}w = -\frac{2}{x}.$$

Essa equação é linear. Assim, multiplicando pelo fator integrante x^2 dos dois lados da equação, obtemos

$$[x^2w]' = -2x.$$

Integrando a última equação, observamos que

$$x^2w = -x^2 + C,$$

onde $C \in \mathbb{R}$. Logo, já que $w = z^{-1}$ e $y = z + x$, temos

$$y = \frac{x^2}{C - x^2} + x.$$

□

Exemplo 4

Verifique que $y_p = e^x$ é solução de

$$y' - (1 + 2e^x)y + y^2 = -e^{2x} \quad (10)$$

e resolva a equação.

Solução

Para verificar que $y_p = e^x$ é solução de (10), basta observar que

$$e^x - (1 + 2e^x)e^x + e^{2x} = -e^{2x}.$$

Note que a equação (10) é uma equação de Ricatti. Fazendo $y = z + e^x$, temos $y' = z' + e^x$. Logo, a equação anterior se transforma em

$$z' - z = -z^2.$$

A equação anterior é do tipo Bernoulli. Fazendo $w = z^{-1}$, temos $w' = -z^{-2}z'$. Logo, a equação anterior se transforma em

$$w' + w = 1.$$

Essa equação é linear. Assim, multiplicando pelo fator integrante e^x dos dois lados da equação, obtemos

$$[e^x w]' = e^x.$$

Integrando a última equação, é possível notar que

$$e^x w = e^x + C,$$

onde $C \in \mathbb{R}$. Logo, já que $w = z^{-1}$ e $y = z + e^x$, temos

$$y = \frac{1}{1 + Ce^{-x}} + e^x.$$

□

3 Equação de Clairaut

As chamadas **equações de Clairaut** são do tipo

$$y = xy' + f(y'), \quad (11)$$

onde f é uma função real derivável.

Essas equações são de um tipo bastante peculiar e aparecem em problemas de geometria relacionados à determinação da **envoltória** de uma família de curvas.

Para encontrarmos suas soluções, primeiro derivamos (11) em relação a x . E obtemos

$$y' = y' + xy'' + f'(y')y'',$$

donde

$$y''(x + f'(y')) = 0.$$

Portanto, $y'' = 0$ ou $x + f'(y') = 0$.

Daí, segue que $y' = C$ ou $x = -f'(y')$. Se $y' = C$, então, de (11) teremos as soluções:

$$y = xC + f(C), \quad (12)$$

que é uma família de retas a um parâmetro C . Por outro lado, se $x = -f'(y')$, chamando $y' = p$, temos de (11):

$$\begin{cases} x = -f'(p), \\ y = xp + f(p), \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = -f'(p), \\ y = -f'(p)p + f(p). \end{cases} \quad (13)$$

Assim, obtivemos em (13) uma parametrização para uma curva solução da EDO, onhecida como **solução singular** ou **envoltória** da família de retas (12). Como o próprio nome já diz, a envoltória é uma curva que "envolve" a família de retas, tangenciando-as, como veremos nos exemplos a seguir.

Exemplo 5

Resolva $y = xy' - (y')^2$ e esboce as soluções no mesmo sistema de coordenadas.

Solução

Derivando a EDO em relação a x , obtemos

$$y''(x - 2y') = 0.$$

Portanto, $y'' = 0$ ou $x - 2y' = 0$. Daí, temos a família de retas

$$y = Cx - C^2,$$

onde $C \in \mathbb{R}$. E a envoltória

$$\begin{cases} x = 2p, \\ y = 2p^2 - p^2 = p^2. \end{cases}$$

Observe que a envoltória é uma parábola, pois podemos escrever que $p = \frac{x}{2}$ e $y = \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{4}$. Veja a Figura 1.

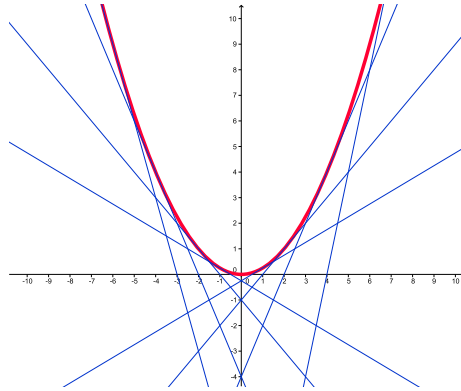


Figura 1: A envoltória $y = \frac{x^2}{4}$ da família de retas $y = Cx - C^2$.

□

Exemplo 6

Resolva $y - xy' = -\ln y'$ e esboce as soluções no mesmo sistema de coordenadas.

Solução

Observe que a EDO é de Clairaut, pois se escreve como $y = xy' - \ln y'$. Derivando em relação a x , temos as soluções formadas pela família de retas

$$y = Cx - \ln C,$$

onde $C > 0$. E a envoltória

$$\begin{cases} x = \frac{1}{p}, \\ y = 1 - \ln p. \end{cases}$$

Observe que a envoltória é dada pelo gráfico de $y = 1 + \ln x$, pois podemos escrever que $y = 1 - \ln p = 1 - \ln\left(\frac{1}{x}\right) = 1 - \ln 1 + \ln x = 1 + \ln x$, $x > 0$.

Veja a Figura 2.

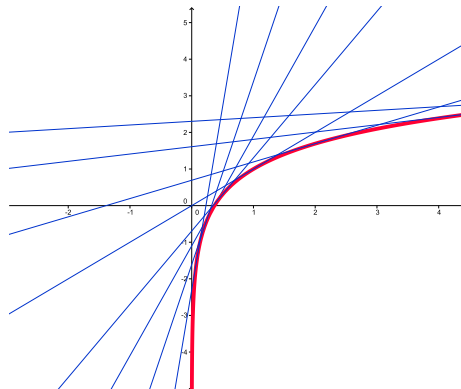


Figura 2: A envoltória $y = 1 + \ln x$ da família de retas $y = Cx - \ln C$, $C > 0$.

□

Observação 4

Observe que os problemas de valor inicial, cujas condições iniciais são dadas sobre a envoltória, não possuem solução única, pois terão por solução a própria envoltória e também uma reta da família de soluções a um parâmetro.

4 Exercícios de revisão

Resolva as seguintes equações.

1. $y' + xy = x^3y^3$.
2. $y'(x^2y^3 + xy) = 1$.
3. $(2 - y \ln x)dx + xdy = 0$.
4. $y - y' \cos x = y^2 \cos x(1 - \sin x)$.
5. $y = xy' + 1 - \ln y'$.
6. $y(y')^2 = x(y')^3 + 1$.

Verifique que y_p é solução da equação dada e depois resolva a equação.

7. $y' = y^2 + 2y - 15$, onde $y_p(x) = -3$.
8. $y' = y^2 - \frac{y}{x} - \frac{25}{x^2}$, onde $y_p(x) = \frac{5}{x}$.
9. $y' = \operatorname{cosec}^2 x + y \cotg x + y^2$, onde $y_p(x) = -\cotg x$.
10. $y' = y^2 + 8xy + 16x^2 - 4$, onde $y_p(x) = -4x$.

Aula 23

Aplicações das EDOs de 1^a ordem

As equações diferenciais são o suporte matemático para muitas áreas do conhecimento científico, pois muitos fenômenos são transcritos ou modelados matematicamente por meio delas. Nesta aula, veremos algumas aplicações das EDOs a problemas em diversas áreas.

1 Trajetórias ortogonais

Considere uma família F de curvas que constituem o conjunto solução de uma equação diferencial da forma

$$y' = f(x, y). \quad (1)$$

Dado um ponto qualquer (x_0, y_0) sobre uma curva da família, o coeficiente angular da reta tangente a essa curva no referido ponto é dado por $f(x_0, y_0)$. De fato, como a curva satisfaz (1), esse é o valor da derivada $y'(x_0)$ em (x_0, y_0) . Uma curva que passa por (x_0, y_0) de forma que a sua reta tangente nesse ponto seja ortogonal à tangente da curva da família F tem reta tangente cujo coeficiente angular é dado por $-\frac{1}{f(x_0, y_0)}$, nos pontos em que $f(x_0, y_0) \neq 0$. Assim, a equação diferencial que representa a família de

curvas que interceptam ortogonalmente as curvas da família F é dada por

$$y' = -\frac{1}{f(x_0, y_0)}. \quad (2)$$

As curvas que são solução dessa equação (2) são chamadas **trajetórias ortogonais** às curvas da família F . Observe a Figura 1 a seguir. As famílias or-

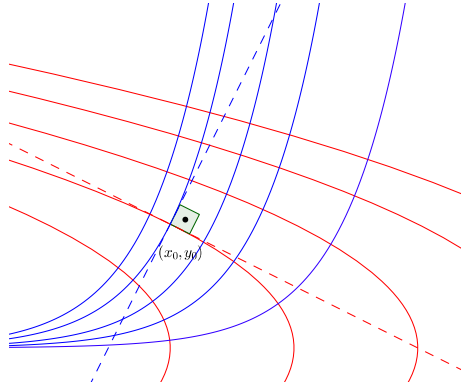


Figura 1: A família de curvas em azul e ortogonal à família de curvas em vermelho.

togonais aparecem naturalmente em diversas aplicações. Por exemplo, as curvas do fluxo de calor numa lâmina são ortogonais à família de curvas de igual temperatura (isotermas), as linhas do fluxo de um campo elétrico ou magnético são ortogonais às curvas de potencial constante (equipotenciais).

EDO associada a uma família de curvas

A uma família de curvas

$$G(x, y, c) = 0, \quad (3)$$

onde c é um parâmetro, podemos associar uma EDO que tem a dada família como solução. Supomos que existem funções de x implícitas na equação da curva (podemos usar o Teorema da função implícita para garantir isso), então, derivando implicitamente (3) em relação a x , obtemos pela regra da cadeia

$$G_x + G_y y' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{G_x}{G_y}.$$

Escrevendo o parâmetro c , em função de x e y , obtemos a EDO da família de curvas dada, a saber,

$$y' = -\frac{G_x(x, y(x), c(x, y))}{G_y(x, y(x), c(x, y))} = f(x, y), \quad (4)$$

Em (4), o parâmetro c deve ser escrito em função de x e y , pois ele só aparece após a resolução da EDO. Observe o próximo exemplo.

Exemplo 1

Determine a EDO associada à família de parábolas

$$y = cx^2. \quad (5)$$

Solução

Derivando a equação da curva em relação a x , obtemos

$$y' = 2cx. \quad (6)$$

Substituindo em (6) o parâmetro $c = \frac{y}{x^2}$, obtido de (5), segue que

$$y' = \frac{2y}{x},$$

que é a EDO associada à família de parábolas (5). \square

Para determinarmos as trajetórias ortogonais a uma família de curvas, primeiro determinamos a EDO associada à família dada, depois determinamos a EDO da família ortogonal e a resolvemos para encontrarmos as trajetórias ortogonais.

Confira os exemplos a seguir.

Exemplo 2

Determine as trajetórias ortogonais à família de circunferências concêntricas

$$x^2 + y^2 = c, \quad (7)$$

onde $c > 0$.

Solução

Inicialmente, vamos determinar a EDO associada à família dada. Derivando (7), obtemos

$$2x + 2yy' = 0,$$

donde a EDO da família dada é

$$y' = -\frac{x}{y}.$$

Daí, temos a EDO da família ortogonal:

$$y' = \frac{y}{x}. \quad (8)$$

A equação (8) é de variáveis separáveis e tem por solução a família de retas $y = kx$. Observe a Figura (2). \square

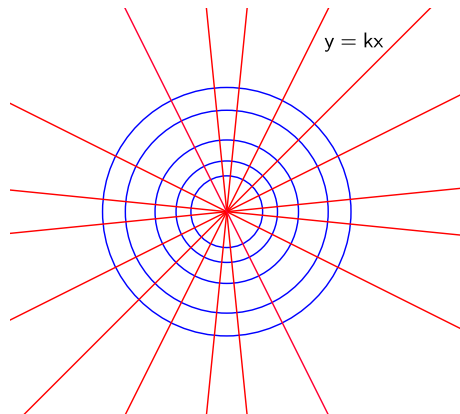


Figura 2: Trajetórias ortogonais (em vermelho) à família de circunferências do exemplo (2).

Exemplo 3

Determine a trajetória ortogonal à família de hipérboles

$$y = \frac{c}{x}, \quad (9)$$

que passa pelo ponto (1, 2).

Solução

Derivando (9) em relação a x , obtemos

$$y' = -\frac{c}{x^2},$$

donde, após a substituição de $c = yx$, obtemos a EDO da família dada

$$y' = -\frac{y}{x}.$$

Portanto, a EDO das trajetórias ortogonais é

$$y' = \frac{x}{y}. \quad (10)$$

Resolvendo (10), que é de variáveis separáveis, obtemos as trajetórias ortogonais

$$y^2 - x^2 = c, \quad (11)$$

que também são hipérbolas. Como procuramos a trajetória ortogonal que passa pelo ponto $(1, 2)$, impondo essa condição em (11), determinamos o parâmetro $c = 3$. Logo, a trajetória ortogonal desejada é a hipérbole $y^2 - x^2 = 3$, conforme observamos em preto na Figura (3). \square

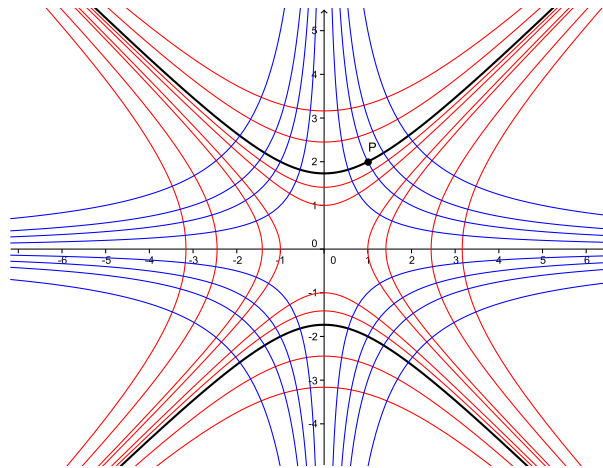


Figura 3: Curvas em (9) na cor azul e as trajetórias ortogonais em vermelho. A trajetória ortogonal que passa em $P=(1,2)$ em preto.

2 Modelagem Matemática

Considere o PVI

$$\begin{cases} y'(t) = ky(t), \\ y(t_0) = y_0, \end{cases} \quad (12)$$

onde k é uma constante real e cuja solução é dada por

$$y(t) = y_0 e^{k(t-t_0)}. \quad (13)$$

Note que a EDO anterior está relacionada à quantidade $y(t)$, cuja taxa de variação em relação ao tempo (ou outra variável qualquer) é proporcional à quantidade presente. Quando $k > 0$, há crescimento de $y(t)$, e se $k < 0$ decrescimento. Por isso, esse PVI é usado frequentemente para modelar crescimento e decrescimento de populações. Sua solução (13) pode ser encontrada usando variáveis separáveis, ou EDOs lineares de 1ª ordem. Perceba que problemas de áreas diversas são muitas vezes modelados pela mesma EDO.

Crescimento populacional: O modelo mais simples de crescimento populacional é aquele em que se supõe que a taxa de crescimento de uma população $\frac{dy}{dt}$ é proporcional à população $y(t)$ presente naquele instante. Assim, somos levados à EDO em (12).

Exemplo 4

Uma população de bactérias cresce a uma taxa proporcional à população presente. Sabendo-se que após uma hora a população é 2 vezes a população inicial, determine a população como função do tempo e o tempo necessário para que a população triplique.

Solução

Seja $y(t)$ a quantidade de bactérias no instante t dado em horas. Pelo que observamos anteriormente, temos um PVI tipo (12), onde $t_0 = 0$. Portanto,

de (13) temos que $y(t) = y_0 e^{kt}$. Para calcularmos a constante de proporcionalidade k , utilizamos o dado do problema "após uma hora a população é 2 vezes a população inicial":

$$2y_0 = y(1) = y_0 e^k,$$

donde $e^k = 2$ e, portanto, $k = \ln 2$. Assim, a solução é dada por

$$y(t) = y_0 e^{t \ln 2} = y_0 2^t.$$

A população de bactérias triplicará num tempo t , tal que tenhamos

$$3y_0 = y(t) = y_0 e^{t \ln 2},$$

donde $e^{t \ln 2} = 3$, ou seja, para $t = \frac{\ln 3}{\ln 2} \simeq 1,58h$. Assim, o tempo necessário para triplicar é de aproximadamente 1h e 35 min. \square

Datação por Carbono 14: O químico americano Willard Libby desenvolveu, na década de 1940, um método de datação de fósseis, tais como, madeira, sedimentos orgânicos, ossos e conchas marinhas, utilizando o Carbono 14. O método baseia-se no fato de que a proporção de Carbono 14 (radioativo) na atmosfera é a mesma presente num organismo vivo, em relação ao Carbono 12. Quando um organismo morre, a absorção de Carbono 14 cessa e, a partir de então, *o Carbono 14 vai se transformando em Carbono 12 a uma taxa que é proporcional à quantidade presente*. Como a meia-vida do Carbono é longa (aproximadamente 5700 anos), podem ser medidas quantidades remanescentes de Carbono 14, mesmo depois de muito tempo. Assim, obtemos a EDO em (13). Lembramos que a meia-vida de um radioisótopo ou isótopo radioativo é o tempo necessário para desintegrar a metade da massa deste isótopo. A constante de proporcionalidade k , presente na EDO (12), pode ser calculada usando a meia-vida do isótopo.

Exemplo 5

Em um pedaço de madeira fossilizada encontramos 2 % da quantidade original de Carbono 14. Determine a idade desse objeto.

Solução

Sejam $y(t)$ a quantidade de C 14 presente na madeira fossilizada e $y(0) = y_0$ a quantidade inicial do isótopo. Pelo que aprendemos, $y(t) = y_0 e^{kt}$. Utilizando a meia-vida do C 14, que é de aproximadamente 5700 anos, vamos determinar k . Assim, temos

$$\frac{y_0}{2} = y_0 e^{5700k},$$

onde, cancelando y_0 e aplicando o logaritmo natural, obtemos

$$k = -\frac{\ln 2}{5700}.$$

A quantidade de C 14 no tempo presente é de $0,02y_0$, portanto, a idade t da madeira é dada por

$$0,02y_0 = y_0 e^{-\frac{\ln 2}{5700}t},$$

no qual ao cancelar y_0 e aplicar o logaritmo natural, obtemos

$$t = -5700 \frac{\ln 0,02}{\ln 2} \simeq 32.170 \text{anos.}$$

□

Resfriamento: A *lei de resfriamento de Newton* diz que a taxa de variação da temperatura $T(t)$ de um corpo em resfriamento é proporcional à diferença entre a temperatura do corpo e a do meio ambiente T_m , suposta constante. Matematicamente, podemos escrevê-la como

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_m), \quad (14)$$

em que k é uma constante de proporcionalidade. Observe que a EDO em (14) pode ser resolvida como uma EDO linear, de variáveis separáveis ou mesmo via mudança de variável $y(t) = T(t) - T_m$, pois no último caso, como T_m é constante, segue que $\frac{dy}{dt} = \frac{dT}{dt}$, donde obtemos a EDO em (12). De qualquer

forma, a solução geral é $T(t) = T_m + ce^{kt}$ e se a temperatura inicial em $t = 0$ for T_0 , então teremos

$$T(t) = T_m + (T_0 - T_m)e^{kt}, \quad (15)$$

como solução do PVI.

Exemplo 6

Uma torta é retirada do forno a uma temperatura de 180°C . Após quatro minutos sobre a mesa da cozinha, que tem um termômetro marcando 20°C , sua temperatura é de 120°C . Quanto tempo levará para a temperatura chegar a 25°C ?

Solução

Nesse exemplo, temos $T(0) = 180$ e $T_m = 20$, onde de (15), obtemos $T(t) = 20 + (180 - 20)e^{kt} = 20 + 160e^{kt}$, em que t é dado em minutos. Após 4 minutos, temos $120 = T(4) = 20 + 160e^{4k}$, donde $k = \frac{1}{4} \ln \frac{5}{8}$. Para a temperatura alcançar 25°C o tempo transcorrido deve ser satisfazer $25 = 20 + 160e^{\frac{t}{4} \ln \frac{5}{8}}$. Assim, $t = 4 \ln \frac{5}{160} / \ln \frac{5}{8} = -20 \ln 2 / \ln \frac{5}{8} \simeq 29,5$ minutos, ou seja, 29 minutos e 30 segundos. \square

Corpo em queda: Um corpo de massa m caindo através de um meio viscoso encontra uma força de resistência proporcional ao quadrado de sua velocidade instantânea. Nessa situação, supondo a velocidade inicial dada por $v(0) = v_0$, podemos utilizar a 2ª Lei de Newton e obter a EDO para a velocidade $v(t)$:

$$m \frac{dv}{dt} = mg - kv^2,$$

em que $k > 0$ (o sinal negativo no termo kv^2 se deve ao fato de que a força de resistência se opõe ao movimento) e $\frac{dv}{dt}$ é a aceleração. Vamos determinar $v(t)$ e a velocidade limite (quando $t \rightarrow \infty$) do corpo em queda.

Solução

A EDO é de variáveis separáveis e pode ser reescrita como

$$m \frac{dv}{dt} = (\sqrt{mg} - \sqrt{kv})(\sqrt{mg} + \sqrt{kv}). \quad (16)$$

Separando as variáveis, obtemos

$$\int \frac{m dv}{(\sqrt{mg} - \sqrt{kv})(\sqrt{mg} + \sqrt{kv})} = \int dt,$$

donde, integrando o lado esquerdo pelo método de frações parciais, obtemos

$$\sqrt{\frac{mg}{k}} \ln \left| \frac{\sqrt{mg} + v\sqrt{k}}{\sqrt{mg} - v\sqrt{k}} \right| = 2t + C.$$

Daí, aplicando a exponencial dos dois lados, segue que

$$\frac{\sqrt{mg} + v\sqrt{k}}{\sqrt{mg} - v\sqrt{k}} = C e^{2t\sqrt{\frac{k}{mg}}}.$$

Explicitando v em função de t , temos

$$v(t) = \sqrt{\frac{mg}{k}} \left[\frac{C e^{2t\sqrt{\frac{k}{mg}}} - 1}{C e^{2t\sqrt{\frac{k}{mg}}} + 1} \right].$$

Utilizando a condição inicial $v(0) = v_0$, obtemos

$$v(t) = \sqrt{\frac{mg}{k}} \left[\frac{\left(\frac{\sqrt{mg} + \sqrt{kv_0}}{\sqrt{mg} - \sqrt{kv_0}} \right) e^{2t\sqrt{\frac{k}{mg}}} - 1}{\left(\frac{\sqrt{mg} + \sqrt{kv_0}}{\sqrt{mg} - \sqrt{kv_0}} \right) e^{2t\sqrt{\frac{k}{mg}}} + 1} \right]. \quad (17)$$

Quando $t \rightarrow \infty$ em (17), obtemos, pela regra de L'Hôpital, $v(t) \rightarrow \sqrt{\frac{mg}{k}}$.

□

3 Exercícios de revisão

1. A taxa de crescimento da população de uma certa cidade é proporcional ao número de habitantes. Se a população em 1950 era de 50.000 e em 1980 de 75.000, qual a população esperada em 2012?
2. Um material radioativo se desintegra a uma taxa proporcional à quantidade de matéria no instante t . Supondo que a quantidade inicial de matéria seja Q_0 e que 10 anos após já tenha se desintegrado $1/3$ da quantidade inicial, calcule o tempo necessário para que metade da quantidade inicial desintegre.
3. A meia-vida do Cobalto radioativo é de 5,27 anos. Suponha que um acidente nuclear tenha levado o nível de radiação por cobalto numa certa região a 100 vezes o nível aceito para a habitação humana. Quanto tempo levará até que a região seja novamente habitável? (Ignore a presença provável de outros elementos radioativos.)
4. O Carbono extraído de um crânio antigo continha apenas um sexto do Carbono 14 radioativo em relação ao Carbono extraído de uma amostra de um osso atual. Qual é a idade do crânio? (Considere a meia-vida do carbono igual a 5.700 anos.)
5. Suponha que um corpo, descoberto à meia-noite, tenha temperatura de $29,4^\circ\text{C}$ e que a temperatura ambiente seja constante e igual a 21°C . O corpo é removido rapidamente (suponha instantaneamente) para o necrotério, onde a temperatura ambiente é $4,4^\circ\text{C}$. Depois de uma hora a temperatura do corpo é de $15,6^\circ\text{C}$. Estime a hora da morte do indivíduo.
6. Uma solução de 60 kg de sal em água enche um tanque de 400 litros. Faz-se entrar água nesse tanque, na razão de 8 litros por minuto, e a mistura, mantida homogênea por agitação, sai com a mesma vazão. Qual a quantidade de sal existente no tanque no fim de 1 hora?
7. Determine a trajetória ortogonal a cada família
 - a) $y = cxe^x$
 - b) $y = c \operatorname{sen} x$.

8. Para todo $c > 0$, o gráfico de $y = f(x)$ intercepta ortogonalmente os gráficos de $y = c \ln x$. Determine f , sabendo que $f(1) = 2$.
9. Encontre as trajetórias ortogonais de $x + y = ce^y$ que passam por $(0,5)$.
10. Uma família de curvas é dita *auto-ortogonal* quando um membro das trajetórias ortogonais é também um membro da família original. Mostre que a família de parábolas $y^2 = c(2x + c)$ é auto-ortogonal.

Aula 24

EDOs homogêneas lineares de ordem $n \geq 2$

Nesta aula, estudamos equações diferenciais ordinárias homogêneas lineares de ordem $n \geq 2$. Introduzimos os conceitos de soluções linearmente independentes e enunciamos um critério para determinar a independência.

1 Conceitos básicos

Uma **equação diferencial ordinária linear** (EDL) de ordem $n \geq 2$ é uma expressão da forma

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x), \quad (1)$$

onde $y^{(k)}$ denota a k -ésima derivada da função y , com respeito a x , e a_0, \dots, a_n, g são funções arbitrárias. Quando no lado direito de (1) tivermos a função constante zero, no lugar da função g , diremos que a equação é **homogênea**.

É simples de verificar que, da mesma maneira que acontece com as equações de ordem 1, para encontrar a solução geral de uma equação linear (independentemente da ordem), basta achar a solução geral do problema homogêneo associado y_h , e uma solução particular y_p do problema não homogêneo. Uma vez feito isto, a solução geral do problema original é dada

por

$$y = y_h + y_p. \quad (2)$$

Nesta, e nas próximas duas aulas, estudaremos EDL homogêneas, enquanto que as Aulas 27 e 28 serão dedicadas ao estudo de métodos para achar soluções particulares de alguns tipos de EDL.

Antes de começar a estudar métodos para resolver equações homogêneas, enunciaremos um resultado análogo ao estudado na Aula 18, que dá condições suficientes para garantir a existência e a unicidade de soluções para o problema de valor inicial associado à equação (1).

Teorema 1

Sejam a_0, \dots, a_n, g funções contínuas em um intervalo I , tais que a função a_n não se anula nesse intervalo, então o *problema de valor inicial* (PVI)

$$\begin{cases} a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x), \\ y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}, \end{cases}$$

onde $x_0 \in I$, tem solução única definida em I .

Nesta aula, restringeremo-nos ao estudo da equação diferencial ordinária linear *homogênea* de ordem $n \geq 2$, isto é,

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0. \quad (3)$$

A seguir, enunciamos o chamado *princípio de superposição*.

Teorema 2

Sejam y_1, y_2, \dots, y_k soluções da equação homogênea (3) no intervalo I . Então, qualquer combinação linear dessas soluções

$$c_1y_1 + c_2y_2 + \dots + c_ky_k,$$

também é solução de (3) no intervalo I .

Observação 1

Note que para o Teorema 2 valer, é indispensável que a equação seja homogênea. Por exemplo, embora $f_1(x) = 1 + \operatorname{sen} x$ e $f_2(x) = 1 + \operatorname{cos} x$ sejam soluções da equação $y'' + y = 1$, as funções $f_1 + f_2$ e $2f_1$ não são soluções (verifique!).

Outra maneira de enunciar o Teorema 2 é dizer que o conjunto das soluções da equação (3) forma um espaço vetorial. Logo, é razoável procurar por uma base desse espaço vetorial, assim, todas as soluções da equação (3) serão uma combinação linear dos elementos de dita base (isto é, teríamos uma solução geral para (3)).

Lembre-se de que uma base de um espaço vetorial é um conjunto de vetores linearmente independentes que gera o espaço todo. Começamos, então, recordando a definição de independência linear no presente contexto.

Definição 1

O conjunto de funções y_1, y_2, \dots, y_k é dito **linearmente independente** em I se

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_k y_k(x) = 0,$$

para todo $x \in I$, então $c_1 = c_2 = \dots = 0$. Caso contrário, as funções são ditas **linearmente dependentes**.

Lembremos que no caso do espaço vetorial \mathbb{R}^n temos um critério para determinar quando um conjunto de n vetores é linearmente independente: precisamos verificar se o determinante da matriz formada pelos vetores é diferente de zero. A seguir, enunciamos um critério análogo no presente contexto.

Proposição 1

Um conjunto y_1, y_2, \dots, y_k de funções $k - 1$ vezes diferenciáveis no intervalo I é linearmente independente em I , se $W[y_1, \dots, y_k](x_0) \neq 0$ para algum

$x_0 \in I$, onde

$$W[y_1, \dots, y_k](x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_k(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_k'(x) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ y_1^{(k-1)}(x) & y_2^{(k-1)}(x) & \cdots & y_k^{(k-1)}(x) \end{vmatrix},$$

é o chamado *Wronskiano* das funções y_1, y_2, \dots, y_k no ponto x .

Observação 2

O recíproco da proposição anterior é válido para funções analíticas (por exemplo polinômios, exponenciais, funções trigonométricas), mas é falso em geral. Isto é, existem funções linearmente independentes em um intervalo I , tais que o wronskiano delas se anula em dito intervalo (veja o Exemplo 2).

Finalmente, como uma consequência dos resultados anteriores, obtemos uma maneira de achar a solução geral de (3) em um intervalo, no caso em que os coeficientes da equação sejam funções contínuas.

Corolário 1

Suponhamos que os coeficientes da equação (3) satisfazem as condições do Teorema 1. Dadas n soluções y_1, y_2, \dots, y_n da equação (3) no intervalo I , tais que $W[y_1, \dots, y_n](x_0) \neq 0$ para algum $x_0 \in I$, temos

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x),$$

é solução geral de (3) no intervalo I . Nesse caso, dizemos que y_1, y_2, \dots, y_n é um *conjunto fundamental de soluções*.

Assim, o espaço vetorial das soluções de uma equação diferencial linear homogênea tem dimensão finita igual à ordem de dita equação.

2 Exemplos

Exemplo 1

Verifique se os seguintes conjuntos de funções são linearmente independentes em \mathbb{R} .

$$(a) \quad \{2x - 3, x^2 + 1, 2x^2 - x\} \qquad (b) \quad \{2x - 3, 2x^2 + 1, 3x^2 + x\}.$$

Solução

Da Proposição 1 e da Observação 2, sabemos que basta calcular o Wronskiano e verificar se ele é igual ou diferente de zero.

(a) As funções são linearmente independentes. De fato,

$$\begin{aligned} W(2x - 3, x^2 + 1, 2x^2 - x) &= \begin{vmatrix} 2x - 3 & x^2 + 1 & 2x^2 - x \\ 2 & 2x & 4x - 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} \\ &= (2x - 3) \begin{vmatrix} 2x & 4x - 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} x^2 + 1 & 2x^2 - x \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \\ &= 2(2x - 3) - 2(4 + 2x) = -10 \neq 0. \end{aligned}$$

(b) As funções são linearmente dependentes. De fato,

$$\begin{aligned} W(2x + 3, 2x^2 + 1, 3x^2 - x) &= \begin{vmatrix} 2x + 3 & 2x^2 + 1 & 3x^2 - x \\ 2 & 4x & 6x - 1 \\ 0 & 4 & 6 \end{vmatrix} \\ &= (2x + 3) \begin{vmatrix} 4x & 6x - 1 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2x^2 + 1 & 3x^2 - x \\ 4 & 6 \end{vmatrix} \\ &= 4(2x + 3) - 2(6 + 4x) = 0. \end{aligned}$$

Nesse caso, a dependência entre as funções é dada por

$$[2x + 3] - 3[2x^2 + 1] + 2[3x^2 - x] = 0.$$

□

Exemplo 2

Verifique que o wronskiano $W(x^3, |x^3|)$ é identicamente zero. Mostre que, mesmo assim, as funções $\{x^3, |x^3|\}$ são linearmente independentes.

Solução

A função $|x^3|$ e sua derivada $|x^3|'$ podem ser expressas da seguinte maneira:

$$|x^3| = \begin{cases} x^3 & x > 0 \\ -x^3 & x \leq 0 \end{cases}, \quad |x^3|' = \begin{cases} 3x^2 & x > 0 \\ -3x^2 & x \leq 0. \end{cases}$$

Logo,

$$W(x^3, |x^3|) = \begin{vmatrix} x^3 & x^3 \\ 3x^2 & 3x^2 \end{vmatrix} = 0, \quad x > 0,$$

e

$$W(x^3, |x^3|) = \begin{vmatrix} x^3 & -x^3 \\ 3x^2 & -3x^2 \end{vmatrix} = 0, \quad x \leq 0.$$

Assim, $W(x^3, |x^3|) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Por outro lado, se existem constantes c_1 e c_2 , tais que

$$c_1 x^3 + c_2 |x^3| = 0,$$

avaliando em $x = 1$ e $x = -1$, obtemos

$$c_1 + c_2 = 0,$$

$$-c_1 + c_2 = 0,$$

o que implica que $c_1 = c_2 = 0$. Isto é, as funções $\{x^3, |x^3|\}$ são linearmente independentes. □

Exemplo 3

Verifique se os seguintes conjuntos de funções são soluções das equações dadas e determine, em cada caso, se elas são um sistema fundamental de soluções.

$$(a) \quad xy''' - y'' = 0; \quad \{y_1 = 1, y_2 = x, y_3 = x^3\}.$$

$$(b) \quad x^3y''' + x^2y'' - 2xy' + 2y = 0; \quad \{y_1 = x, y_2 = x^2, y_3 = 1/x\}.$$

Solução

Para verificar se as funções propostas são soluções das equações dadas, basta calcular as derivadas das funções e substituí-las na respectiva equação.

$$(a) \quad \{y_1 = 1, y_1' = 0, y_1'' = 0, y_1''' = 0\} \text{ então } x[0] - [0] = 0,$$

$$\{y_2 = x, y_2' = 1, y_2'' = 0, y_2''' = 0\} \text{ então } x[0] - [0] = 0,$$

$$\{y_3 = x^3, y_3' = 3x^2, y_3'' = 6x, y_3''' = 6\} \text{ então } x[6] - [6x] = 0.$$

$$(b) \quad \{y_1 = x, y_1' = 1, y_1'' = 0, y_1''' = 0\} \text{ então } x^3[0] + x^2[0] - 2x[1] + 2[x] = 0,$$

$$\{y_2 = x^2, y_2' = 2x, y_2'' = 2, y_2''' = 0\} \text{ então } x^3[0] + x^2[2] - 2x[2x] + 2[x^2] = 0,$$

$$\{y_3 = x^{-1}, y_3' = -x^{-2}, y_3'' = 2x^{-3}, y_3''' = -6x^{-4}\} \text{ então}$$

$$x^3[-6x^{-4}] + x^2[2x^{-3}] - 2x[-x^{-2}] + 2[x^{-1}] = (-6 + 2 + 2 + 2)x^{-1} = 0.$$

Para determinar que as funções propostas são um sistema fundamental de soluções, basta calcular o Wronskiano das funções.

$$(a) \quad W(1, x, x^3) = \begin{vmatrix} 1 & x+1 & x^3 \\ 0 & 1 & 3x^2 \\ 0 & 0 & 6x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3x^2 \\ 0 & 6x \end{vmatrix} = 6x.$$

$$(b) \quad W(x, x^2, x^{-1}) = \begin{vmatrix} x & x^2 & x^{-1} \\ 1 & 2x & -x^{-2} \\ 0 & 2 & 2x^{-3} \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} 2x & -x^{-2} \\ 2 & 2x^{-3} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x^2 & x^{-1} \\ 2 & 2x^{-3} \end{vmatrix} = 6x^{-2}.$$

Assim, cada um dos conjuntos de soluções é um sistema fundamental de soluções para a respectiva equação nos intervalos $(-\infty, 0)$ e $(0, \infty)$. \square

Exemplo 4

Discuta a existência e a unicidade de soluções para os seguintes PVI.

$$(a) \quad \begin{cases} xy''' - y'' = 0, \\ y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, y''(x_0) = y_2. \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} x^3 y''' + x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0, \\ y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, y''(x_0) = y_2. \end{cases}$$

Solução

- (a) O Teorema 1 garante a existência e unicidade de solução sempre que $x_0 \neq 0$. Do exercício anterior sabemos que

$$y(x) = c_1 + c_2 x + c_3 x^3$$

é solução geral nos intervalos $(-\infty, 0)$ e $(0, \infty)$. Impondo as condições iniciais, obtemos

$$c_1 = \frac{y_0}{6x_0}, \quad c_2 = y_1 - \frac{y_2}{2x_0} \quad \text{e} \quad c_3 = y_0 - x_0 y_1 + \frac{1}{2} y_2 + \frac{1}{6} y_2 x_0^2.$$

O Teorema 1 nada diz sobre o que acontece se $x_0 = 0$. Qualquer coisa pode acontecer. Por exemplo, sob as condições iniciais

$$\{x_0 = 0, y_0 = 1, y_1 = 1, y_2 = 0\},$$

a função $y(x) = 1 + x$ é a única solução do PVI (b) em \mathbb{R} , enquanto que sob as condições iniciais

$$\{x_0 = 0, y_0 = 0, y_1 = 0, y_2 = 1\},$$

o PVI (b) não tem solução.

- (b) O Teorema 1 garante a existência e unicidade de solução sempre que $x_0 \neq 0$. Do exercício anterior sabemos que

$$y(x) = c_1 x + c_2 x^2 + \frac{c_3}{x}$$

é solução geral nos intervalos $(-\infty, 0)$ e $(0, \infty)$. Impondo as condições iniciais, obtemos

$$c_1 = \frac{y_0}{x_0} - \frac{3}{4} x_0 y_2, \quad c_2 = \frac{y_2}{2} + \frac{y_1}{3x_0} - \frac{y_0}{3x_0^2} \quad \text{e} \quad c_3 = \frac{1}{3} x_0 y_0 - \frac{1}{3} x_0^2 y_1 + \frac{1}{6} x_0^3 y_2.$$

O Teorema 1 nada diz sobre o que acontece se $x_0 = 0$. Qualquer coisa pode acontecer. Por exemplo, sob as condições iniciais

$$\{x_0 = 0, y_0 = 0, y_1 = 1, y_2 = 1\},$$

a função $y(x) = x + x^2$ é a única solução do PVI (a) em \mathbb{R} , enquanto sob as condições iniciais

$$\{x_0 = 0, y_0 = 1, y_1 = 1, y_2 = 1\}$$

o PVI (a) não tem solução.

□

3 Exercícios de revisão

Determine intervalos nos quais o Teorema 1 garante a existência e a unicidade de soluções para as seguintes equações.

1. $xy''' + (\operatorname{sen} x)y'' + 3y = \cos x$
2. $x(x-1)y^{(4)} + e^x y'' + 4x^2 y = 0$.
3. $(x-1)y^{(4)} + (x+1)y'' + (\operatorname{tg} x)y = 0$.
4. $(x^2-4)y^{(4)} + x^2 y''' + 9y = 0$.

Verifique se os seguintes conjuntos de funções são soluções das equações dadas e determine, em cada caso, se elas são um sistema fundamental de soluções no intervalo indicado.

5. $y'' - y' - 12y = 0$; $\{y_1 = e^{-3x}, y_2 = e^{4x}\}$ em \mathbb{R} .
6. $y'' - 2y' + 5y = 0$; $\{y_1 = e^x \cos 2x, y_2 = e^x \operatorname{sen} 2x\}$ em \mathbb{R} .
7. $x^2 y'' + xy' + y = 0$; $\{y_1 = \cos(\ln x), y_2 = \operatorname{sen}(\ln x)\}$ em $(0, \infty)$.
8. $x^3 y''' + 6x^2 y'' + 4xy' - 4y = 0$; $\{y_1 = x, y_2 = x^{-2}, y_3 = x^{-2} \ln x\}$ em $(0, \infty)$.

Considere a equação diferencial

$$x^2 y'' - 4xy' + 6y = 0. \quad (4)$$

9. Verifique se as famílias $\{y_1 = x^3, y_2 = |x^3|\}$ e $\{z_1 = x^2, z_2 = x^3\}$ são soluções linearmente independentes de (4) em \mathbb{R} .

10. Mostre que nenhuma das famílias

$$y(x) = c_1x^3 + c_2|x^3| \quad \text{ou} \quad y(x) = c_1x^2 + c_2x^3,$$

são soluções gerais de (4) em \mathbb{R} . Por que isso não contradiz o Corolário 1?

Aula 25

Método da redução de ordem

Para uma EDO de segunda ordem linear homogênea é possível construir uma segunda solução a partir de uma solução conhecida, utilizando o *método da redução de ordem*.

1 Descrição do método

Considere uma EDO de 2ª ordem homogênea na forma padrão, ou seja, com o coeficiente da segunda derivada igual a um:

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0, \quad (1)$$

onde P e Q são funções contínuas num intervalo I . Supomos conhecida uma solução y_1 de (1) em I e que $y_1(x) \neq 0, \forall x \in I$. A ideia é procurarmos uma segunda solução y_2 , que seja uma “perturbação” de y_1 do tipo $y_2 = \phi(x)y_1(x)$, onde ϕ é uma função (não constante) de classe C^2 em I . Assim, $\{y_1, y_2\}$ formará um conjunto fundamental de soluções para (1). Para caracterizarmos a função ϕ , derivamos $y_2 = \phi(x)y_1$. Obtemos

$$y_2' = \phi' y_1 + \phi y_1' \quad e \quad y_2'' = \phi'' y_1 + 2\phi' y_1' + \phi y_1'' + \phi y_1'',$$

que substituindo em (1), implica que $\phi(x)$ deve satisfazer

$$\begin{aligned} y_2'' + P(x)y_2' + Q(x)y_2 &= \phi(x)(y_1'' + P(x)y_1' + Q(x)y_1) + \\ &+ \phi''y_1 + \phi'(x)(2y_1'(x) + P(x)y_1(x)) = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Usando o fato de que o primeiro termo da igualdade (2) é igual a zero, pois y_1 satisfaz a EDO (1), obtemos

$$y_1\phi'' + (2y_1' + Py_1)\phi' = 0. \quad (3)$$

Dividindo (3) por y_1 e substituindo ϕ' por u , encontramos em u a EDO linear de 1ª ordem

$$y_1u' + (2y_1' + Py_1)u = 0. \quad (4)$$

Assim, reduzimos o problema à resolução de uma EDO de ordem inferior, o que originou o nome do método. A solução de (4) é dada por

$$u(x) = c_1 e^{-\int \frac{2y_1' + Py_1}{y_1} dx} = \frac{c_1 e^{-\int P(x) dx}}{y_1^2}. \quad (5)$$

Como $u = \phi'$, obtemos de (5)

$$\phi(x) = \int \frac{c_1 e^{-\int P(x) dx}}{y_1^2} dx + c_2. \quad (6)$$

A fórmula (6) nos dá uma família a dois parâmetros de funções e como basta uma função, tomamos $c_1 = 1$ e $c_2 = 0$, donde obtém-se a seguinte expressão para a função $\phi(x)$

$$\phi(x) = \int \frac{e^{-\int P(x) dx}}{y_1^2} dx. \quad (7)$$

Portanto, de (7) temos

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{e^{-\int P(x) dx}}{y_1^2} dx. \quad (8)$$

Utilizando o corolário 1 da Aula 24 pode-se mostrar que as funções $\{y_1, y_2\}$ formam um conjunto fundamental de soluções para (1). Verifique!

Exemplo 1

Sabendo que a EDO $xy'' - 2y' + 4(1-x)y = 0$ possui como solução $y_1(x) = e^{2x}$, determine a solução do PVI associado, cuja condição inicial é dada por $y(1) = 1, y'(1) = 0$.

Solução

Este primeiro exemplo será resolvido sem o uso da fórmula (8), vamos repetir o raciocínio feito até chegarmos à expressão da 2ª solução. Procuramos uma função ϕ , tal que

$$y_2(x) = \phi(x)e^{2x} \quad (9)$$

seja solução da EDO dada. Derivando (9) e substituindo na EDO inicial, obtemos

$$x\phi''(x) + (4x - 2)\phi'(x) = 0,$$

que na forma padrão se escreve como

$$\phi''(x) + \left(4 - \frac{2}{x}\right)\phi'(x) = 0,$$

Substituindo $u(x) = \phi'(x)$, obtemos

$$u'(x) + \left(4 - \frac{2}{x}\right)u(x) = 0. \quad (10)$$

Multiplicando (10) pelo fator integrante $e^{\int 4 - \frac{2}{x} dx} = \frac{e^{4x}}{x^2}$ e resolvendo a EDO de 1ª ordem (10), obtemos $u(x) = c_1 x^2 e^{-4x}$. Tomando $c_1 = 1$ e integrando $\phi' = u(x)$, chegamos a $\phi(x) = -\frac{x^2 e^{-4x}}{4} - \frac{e^{-4x}}{8}$. Logo, a solução geral da EDO dada é $y(x) = k_1 e^{2x} + k_2 (2x^2 e^{-2x} + e^{-2x})$. Impondo a condição inicial

$y(1) = 1, y'(1) = 0$, determinamos k_1, k_2 e obtemos a seguinte solução do PVI

$$y(x) = \frac{e^{2x-2}}{4} + \frac{e^{-2x+2}}{4}(2x^2 + 1).$$

□

Exemplo 2

Sabendo que $y_1(x) = x^4$ é uma solução da EDO $x^2y'' - 7xy' + 16y = 0, x > 0$, encontre sua solução geral.

Solução

Nesse exemplo vamos resolver o exercício aplicando a fórmula (8). Primeiro, devemos escrever a EDO na forma padrão, a saber, $y'' - \frac{7}{x}y' + \frac{16}{x^2}y = 0$. Então,

$$y_2(x) = x^4 \int \frac{e^{\int \frac{7}{x} dx}}{x^8} dx = x^4 \int \frac{e^{7 \ln x}}{x^8} dx = x^4 \ln x.$$

Portanto, a solução geral é dada por $y(x) = c_1x^4 + c_2x^4 \ln x$, para $x > 0$. □

Exemplo 3

Sabendo que a EDO $y'' + y' = 0$ possui uma solução constante, encontre sua solução geral.

Solução

Observe que esse exercício pode ser resolvido fazendo $y' = u$, o que resulta diretamente numa redução de ordem da EDO e tal equação é a mesma de (4). Neste caso, qualquer constante é solução da EDO, logo vamos tomar $y_1 = 1$ e portanto de (8) temos $y_2 = -e^{-x}$. A solução geral é dada por $y(x) = c_1 + c_2e^{-x}$. □

2 Exercícios de revisão

Em cada caso, verifique que a função y_1 dada é solução da EDO e encontre sua solução geral.

1. $y'' - 2y' = 0$, $y_1(x) = 1$.
2. $y'' - y = 0$, $y_1(x) = e^x$.
3. $y'' - 4y' + 4y = 0$, $y_1(x) = e^{2x}$.
4. $y'' + 6y' + 9y = 0$, $y_1(x) = e^{-3x}$.
5. $x^2y'' - 6y = 0$, $y_1(x) = x^3$, para $x > 0$.
6. $x^2y'' - 3xy' + 5y = 0$, $y_1(x) = x^2 \cos(\ln x)$.

7. Considere a EDO $y'' - 4y = 2$.

- a) Encontre por inspeção uma solução particular desta EDO;
- b) verifique que $y_1(t) = e^{-2t}$ é uma solução da equação homogênea associada
- c) Determine a solução geral da EDO dada.

8. Considere a EDO $y'' + by' + cy = 0$, onde $b^2 - 4c = 0$.

- a) Mostre que $y_1(t) = e^{-bt/2}$ é uma solução da equação dada;
- b) Encontre uma segunda solução da EDO que forme com y_1 um conjunto fundamental. Escreva a solução geral da equação.

9. Verifique por substituição direta que a fórmula (8) satisfaz a equação (1).

Aula 26

EDO lineares homogêneas de grau n com coeficientes constantes

Nesta aula estudaremos a solução geral das equações diferenciais ordinárias lineares homogêneas de grau n com coeficientes constantes.

1 Conceitos básicos

Uma EDO linear homogênea de ordem n com coeficientes constantes é uma expressão da forma:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0, \quad (1)$$

onde a_0, \dots, a_n são **constantes** reais.

O nosso interesse é fornecer a solução geral para este tipo de equações. Vamos começar considerando o caso onde $n = 2$.

2 Grau $n=2$

Isto é

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0. \quad (2)$$

Procuramos soluções da forma $y = e^{\alpha x}$, onde $\alpha \in \mathbb{R}$. Para isto, substituímos y por $e^{\alpha x}$ na equação (2) obtendo

$$[a_2\alpha^2 + a_1\alpha + a_0]e^{\alpha x} = 0. \quad (3)$$

Dado que $e^{\alpha x}$ é sempre um número positivo, a equação (3) será satisfeita se e somente se

$$a_2\alpha^2 + a_1\alpha + a_0 = 0.$$

A expressão acima é chamada de **equação característica** e suas soluções são as raízes do polinômio

$$P(z) = a_2z^2 + a_1z + a_0.$$

Lembremos que todo polinômio de grau 2 tem duas raízes, que dependendo do valor do discriminante $\Delta = a_1^2 - 4a_0a_2$ ($\Delta > 0, \Delta = 0, \Delta < 0$) podem ser reais e diferentes, reais e iguais, ou complexas, respectivamente.

Caso $\Delta > 0$: Neste caso temos duas raízes reais diferentes, a saber, $\alpha_1 = \frac{-a_1 + \sqrt{\Delta}}{2a_2}$ e $\alpha_2 = \frac{-a_1 - \sqrt{\Delta}}{2a_2}$. Assim,

$$y_1 = e^{\alpha_1 x} \quad \text{e} \quad y_2 = e^{\alpha_2 x},$$

são duas soluções da equação (2). Além disso, já que

$$W[y_1, y_2](x) = \begin{vmatrix} e^{\alpha_1 x} & e^{\alpha_2 x} \\ \alpha_1 e^{\alpha_1 x} & \alpha_2 e^{\alpha_2 x} \end{vmatrix} = (\alpha_2 - \alpha_1)e^{(\alpha_1 + \alpha_2)x} \neq 0,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, estas soluções são linearmente independentes (veja a Proposição 1 da Aula 24).

Portanto,

$$y(x) = c_1 e^{\alpha_1 x} + c_2 e^{\alpha_2 x}$$

é a solução geral da equação (2).

Caso $\Delta < 0$: Neste caso temos duas raízes complexas conjugadas, a saber, $\lambda_1 = a + bi$ e $\lambda_2 = a - bi$, onde $a = \frac{-a_1}{2a_2}$ e $b = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a_2}$. Assim,

$$w_1 = e^{\lambda_1 x} \quad \text{e} \quad w_2 = e^{\lambda_2 x},$$

são “soluções” da equação (2). As aspas na frase anterior vêm do fato das funções acima serem complexas. Nos estamos interessados em soluções reais, e dado que qualquer combinação linear de soluções é novamente uma solução, vamos procurar duas combinações lineares de w_1 e w_2 que sejam reais e linearmente independentes.

Lembrando da identidade $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta)$, temos que

$$w_1 = e^{ax} [\cos(bx) + i \operatorname{sen}(bx)] \quad \text{e} \quad w_2 = e^{ax} [\cos(bx) - i \operatorname{sen}(bx)].$$

Logo,

$$\frac{1}{2}w_1 + \frac{1}{2}w_2 = e^{ax} \cos(bx) \quad \text{e} \quad \frac{1}{2i}w_1 - \frac{1}{2i}w_2 = e^{ax} \operatorname{sen}(bx).$$

Portanto,

$$y_1 = e^{ax} \cos(bx) \quad \text{e} \quad y_2 = e^{ax} \operatorname{sen}(bx),$$

são soluções da equação (2) (Verifique!). Além disso, já que

$$\begin{vmatrix} e^{ax} \cos(bx) & e^{ax} \operatorname{sen}(bx) \\ ae^{ax} \cos(bx) - be^{ax} \operatorname{sen}(bx) & ae^{ax} \operatorname{sen}(bx) + be^{ax} \cos(bx) \end{vmatrix} = be^{ax} \neq 0,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, estas soluções são linearmente independentes.

Portanto,

$$y(x) = c_1 e^{ax} \cos(bx) + c_2 e^{ax} \operatorname{sen}(bx)$$

é a solução geral da equação (2).

Caso $\Delta = 0$: Neste caso temos uma única raiz de multiplicidade 2, a saber, $\alpha = -\frac{a_1}{2a_2}$. Assim,

$$y_1 = e^{\alpha x},$$

é uma solução da equação (2). Para achar uma segunda solução y_2 independente de y_1 podemos usar redução de ordem (Aula 25). Isto é, procuramos uma função $c(\cdot)$ tal que

$$y_2(x) = c(x)e^{\alpha x}$$

seja solução da equação (2). Começamos calculando y_2' e y_2'' :

$$y_2'(x) = [c'(x) + \alpha c(x)]e^{\alpha x} \quad ; \quad y_2''(x) = [c''(x) + 2\alpha c'(x) + c(x)\alpha^2]e^{\alpha x}.$$

Para que y_2 seja solução da equação (2), devemos ter que

$$a_2[c''(x) + 2\alpha c'(x) + c(x)\alpha^2] + a_1[c'(x) + \alpha c(x)] + a_0c(x) = 0,$$

logo,

$$a_2[c''(x) + 2\alpha c'(x)] + a_1c'(x) = 0.$$

Dado que na expressão anterior aparecem c' e c'' mas não c , podemos usar redução de ordem. Isto é, definindo $d(x) = c'(x)$ a expressão anterior, que é uma equação de segunda ordem, se transforma numa equação diferencial de primeira ordem:

$$d'(x) + [2\alpha + a_1/a_2]d(x) = 0.$$

Já que $\alpha = -\frac{a_1}{2a_2}$, temos que $d'(x) = 0$. Assim, d é uma função constante e por tanto c é uma função da forma

$$c(x) = mx + k,$$

onde m e k são constantes arbitrárias. Tomando $m = 1$ e $d = 0$, finalmente obtemos que

$$y_2(x) = xe^{\alpha x}$$

é solução da equação (2). Além disso, já que

$$\begin{vmatrix} e^{\alpha x} & xe^{\alpha x} \\ \alpha e^{\alpha x} & e^{\alpha x}(1 + \alpha x) \end{vmatrix} = e^{\alpha x} \neq 0,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, esta solução é linearmente independentes de y_1 .

Portanto,

$$y(x) = c_1 e^{\alpha x} + c_2 x e^{\alpha x}$$

é a solução geral da equação (2).

3 Grau $n \geq 3$

Para achar a solução geral da equação (1) no caso $n \geq 3$, seguimos uma estratégia análoga à seguida no caso $n = 2$. Isto é, substituímos y por $e^{\alpha x}$ na equação (1) obtendo que:

$y = e^{\alpha x}$ é solução de (1) se e somente se α é uma raiz do polinômio

$$P(x) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0.$$

O teorema fundamental da álgebra garante a existência de exatamente n raízes reais ou complexas (considerando multiplicidades) de P . No entanto, não existe uma fórmula geral para calcular as raízes de um polinômio qualquer. De fato, o principal problema na hora de resolver a equação (1) é calcular tais raízes.

Uma vez calculadas as raízes do polinômio P , podemos construir a solução geral de (1) mediante as seguintes duas observações :

- Se α é uma raiz real do polinômio P , de multiplicidade k , então

$$\{e^{\alpha x}, x e^{\alpha x}, \dots, x^{k-1} e^{\alpha x}\}$$

é um conjunto de soluções linearmente independente da equação (1).

- Se $\lambda_1 = a + bi$ e $\lambda_2 = a - bi$ é um par de raízes complexas do polinômio P , de multiplicidade k , então

$$\{\sin(ax) e^{bx}, \cos(ax) e^{bx}, \dots, x^{k-1} \sin(ax) e^{bx}, x^{k-1} \cos(ax) e^{bx}\}$$

é um conjunto de soluções linearmente independente da equação (1).

4 Exemplos

Exemplo 1

Dê a solução geral de uma equação diferencial do tipo (1) cujo polinômio característico tenha as seguintes raízes.

- a) $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 5.$
- b) $\lambda_1 = \sqrt{3} - 2i, \lambda_2 = \sqrt{3} + 2i .$
- c) $\lambda_1 = 1/2, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 3.$
- d) $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2 + i, \lambda_3 = -2 - i.$
- e) $\lambda_1 = \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3.$
- f) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1/4.$
- g) $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 5, \lambda_4 = 7.$
- h) $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 5 + 4i, \lambda_4 = 5 - 4i.$
- i) $\lambda_1 = \lambda_2 = -2 + 3i, \lambda_3 = \lambda_4 = -2 - 3i.$
- j) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 1/3, \lambda_5 = 3$

Solução

- a) $y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{5x}.$
- b) $y(x) = c_1 e^{\sqrt{3}x} \cos(2x) + c_2 e^{\sqrt{3}x} \operatorname{sen}(2x).$
- c) $y(x) = c_1 e^{x/2} + c_2 e^{-2x} + c_3 e^{3x}.$
- d) $y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} \cos(x) + c_3 e^{-2x} \operatorname{sen}(x).$
- e) $y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + c_3 e^{3x}.$

$$f) y(x) = c_1 e^{x/4} + c_2 x e^{x/4} + c_3 x^2 e^{x/4}.$$

$$g) y(x) = c_1 e^{-2x} + c_1 e^{-x} + c_1 e^{5x} + c_1 e^{7x}.$$

$$h) y(x) = c_1 e^{-2x} + c_1 e^{-x} + c_3 e^{5x} \cos(4x) + c_4 e^{5x} \operatorname{sen}(4x).$$

$$i) y(x) = c_1 e^{-2x} \cos(3x) + c_2 x e^{-2x} \cos(3x) + c_3 e^{-2x} \operatorname{sen}(3x) + c_4 x e^{-2x} \operatorname{sen}(3x).$$

$$j) y(x) = c_1 e^{x/3} + c_2 x e^{x/3} + c_3 x^2 e^{x/3} + c_4 x^3 e^{x/3} + c_5 e^{3x}.$$

□

Exemplo 2

Ache a solução dos seguintes PVI.

$$a) \begin{cases} y^{(3)} + y' = 0; \\ y(0) = 0, y'(0) = 0, y''(0) = 2. \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 4y^{(3)} + y' + 5y = 0; \\ y(0) = 2, y'(0) = 1, y''(0) = -1. \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} y^{(4)} - 4y^{(3)} + 4y'' = 0; \\ y(1) = -1, y'(1) = 2, y''(1) = 0, y^{(3)}(1) = 0. \end{cases}$$

Solução

a) Fatorando o polinômio característico

$$z^3 + z = z(z^2 + 1),$$

obtemos as raízes $\lambda_1 = 0$, $\lambda_1 = i$, $\lambda_1 = -i$. Logo,

$$y(x) = c_1 + c_2 \cos x + c_3 \operatorname{sen} x ,$$

$$y'(x) = -c_2 \operatorname{sen} x + c_3 \cos x ,$$

$$y''(x) = -c_2 \cos x - c_3 \operatorname{sen} x .$$

Para satisfazer as condições iniciais devemos ter que

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

Resolvendo o sistema linear obtemos que $c_1 = 0$, $c_2 = 0$ e $c_3 = 2$. Portanto, a solução do PVI é dada por

$$y(x) = 2 \operatorname{sen} x , \quad x \in \mathbb{R} .$$

b) Fatorando o polinômio característico

$$4z^3 + z + 5 = (z + 1)(4z^2 - 4z + 5)$$

obtemos as raízes $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1/2 + i$, $\lambda_3 = 1/2 - i$. Logo,

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{x/2} \cos x + c_3 e^{x/2} \operatorname{sen} x ,$$

$$y'(x) = -c_1 e^{-x} + c_2 e^{x/2} [1/2 \cos x - \operatorname{sen} x] + c_3 e^{x/2} [1/2 \operatorname{sen} x + \cos x] ,$$

$$y''(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{x/2} [-3/4 \cos x - \operatorname{sen} x] + c_3 e^{x/2} [-3/4 \operatorname{sen} x + \cos x] .$$

Para satisfazer as condições iniciais devemos ter que

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1/2 & 1 \\ 1 & -3/4 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

Resolvendo o sistema linear obtemos que $c_1 = 2/13$, $c_2 = 24/13$ e $c_3 = 3/13$. Portanto, a solução do PVI é dada por

$$y(x) = 2/13 e^{-x} + 24/13 e^{x/2} \cos x + 3/13 e^{x/2} \operatorname{sen} x .$$

c) Fatorando o polinômio característico

$$z^4 - 4z^3 + 4z^2 = z^2(z^2 - 4z + 4) = z^2(z - 2)^2 ,$$

obtemos as raízes $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = \lambda_4 = 2$. Logo,

$$y(x) = c_1 + c_2x + c_3e^{2x} + c_4xe^{2x} ,$$

$$y'(x) = c_2 + 2c_3e^{2x} + c_4e^{2x}[1 + 2x] ,$$

$$y''(x) = 4c_3e^{2x} + c_4e^{2x}[4 + 4x] ,$$

$$y^{(3)}(x) = 8c_3e^{2x} + c_4e^{2x}[12 + 8x] .$$

Para satisfazer as condições iniciais devemos ter que

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & e^2 & e^2 \\ 0 & 1 & 2e^2 & 3e^2 \\ 0 & 0 & 4e^2 & 8e^2 \\ 0 & 0 & 8e^2 & 20e^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Resolvendo o sistema linear obtemos que $c_1 = -3$, $c_2 = 2$ e $c_3 = c_4 = 0$. Portanto, a solução do PVI é dada por

$$y(x) = -3 + 2x , \quad x \in \mathbb{R} .$$

□

5 Exercícios de revisão

Ache a solução dos seguintes PVI.

$$\text{a) } \begin{cases} y^{(4)} + y' = 0; \\ y(0) = 0, y'(0) = 0, y''(0) = -1, y^{(3)}(0) = 0. \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} y^{(4)} - y' = 0; \\ y(0) = 0, y'(0) = 0, y''(0) = 1, y^{(3)}(0) = 1. \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} y^{(4)} + 6y^{(3)} + 17y'' + 22y' + 14y = 0; \\ y(0) = 1, y'(0) = -2, y''(0) = 0, y^{(3)}(0) = 3. \end{cases}$$

Aula 27

Método dos coeficientes a determinar

Este método tem como objetivo produzir uma solução particular para certos tipos de EDOs lineares não homogêneas com coeficientes constantes.

1 Descrição do método dos coeficientes a determinar

Considere a EDO linear não homogênea

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = g(x), \quad (1)$$

em que a_0, a_1, \dots, a_n são constantes e $g(x)$ é uma função real do tipo combinação linear entre funções dos seguintes tipos:

$$k, x^n, x^n e^{ax}, x^n e^{ax} \cos bx, x^n e^{ax} \sin bx, \quad (1)$$

onde k, a, b são constantes reais e n é um número inteiro não negativo. Como casos particulares, temos $g(x) = 2x^3 + x - 1$ ou qualquer polinômio, $g(x) = e^{2x} \cos 3x$, $g(x) = \sin \pi x + 5x^4$ ou $g(x) = x^2 e^{-x} \sin 4x + e^{4x}$, entre outras.

O *Método dos Coeficientes a Determinar* consiste em buscar uma solução particular para (1) “parecida” com a função $g(x)$, pois partimos da ideia de que é possível produzirmos a função g através de combinações lineares entre as derivadas de uma função do mesmo tipo. Essa ideia vem do fato de que combinações lineares entre elementos pertencentes ao conjunto de funções permissíveis para g também pertencem ao mesmo conjunto. Por exemplo, as derivadas de qualquer ordem de senos e cossenos são de novo senos e cossenos, as derivadas de polinômios são polinômios, analogamente para as funções exponenciais.

Este procedimento, no entanto, não vale quando temos por exemplo $g(x) = \ln x$, ou $g(x) = \frac{1}{x}$ ou $g(x) = \operatorname{tg} x$, entre outras. Para este tipo de não homogeneidade, vamos ver na Aula 28 o *Método da Variação dos Parâmetros*, que valerá para qualquer função $g(x)$ contínua.

2 Exemplos

Exemplo 1

Determine uma solução particular da equação

$$y'' + 4y' - 2y = 7x + 1. \quad (2)$$

Solução

Como neste caso $g(x) = 7x + 1$, ou seja, um polinômio de grau 1, vamos procurar uma solução particular $y_p(x) = Ax + B$, que é do mesmo tipo da função g . Derivando $y_p(x)$ e substituindo em (2), obtemos

$$4A - 2Ax - 2B = 7x + 1,$$

donde segue, usando a propriedade da igualdade entre polinômios, que $4A - 2B = 1$ e $-2A = 7$. Portanto, $A = -7/2$ e $B = -15/2$. Assim, chegamos à solução particular para (2) $y_p(x) = -\frac{7}{2}x - \frac{15}{2}$. \square

Exemplo 2

Determine uma solução particular da equação

$$y''' - y = x^3. \quad (3)$$

Solução

Seguindo a mesma ideia do exemplo anterior, procuramos $y_p = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$, um polinômio de grau 3. Derivando y_p e substituindo em (3), obtemos

$$6A - Ax^3 - Bx^2 - Cx - D = x^3.$$

□

Portanto, $-A = 1$, $B = 0$, $C = 0$ e $6A - D = 0$, donde $A = -1$, $B = 0$, $C = 0$ e $D = -6$. Assim, $y_p = -x^3 - 6$.

Exemplo 3

Determine a solução geral da equação

$$y'' + 4y = 2 \operatorname{sen} 3x \quad (4)$$

Solução

A EDO homogênea associada a (4) tem equação característica dada por $z^2 + 4 = 0$, cujas raízes são $\lambda_1 = 2i$ e $\lambda_2 = -2i$, portanto, de acordo com a Aula 26, sua solução geral é dada por $y_h(x) = c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x$. Agora, precisamos de uma solução particular de (4) para podermos determinar sua solução geral. Assim, usando o método dos coeficientes a determinar, vamos procurar $y_p(x) = A \operatorname{sen} 3x + B \cos 3x$. Observe que utilizamos tanto a função seno quanto a cosseno, pois sempre que uma delas aparecer na expressão da $g(x)$, precisaremos utilizar as duas na formação da solução particular, visto que as derivadas de cada uma delas é a outra, a menos de constante multiplicativa. Derivando a suposta solução particular e substituindo em (4), obtemos

$$-9A \operatorname{sen} 3x - 9A \cos 3x + 4A \operatorname{sen} 3x + 4B \cos 3x = 2 \operatorname{sen} 3x.$$

Daí, agrupando os coeficientes de $\sin 3x$ e $\cos 3x$ e igualando os coeficientes, obtemos $-5A = 2$ e $-9A + 4B = 0$, donde $A = -2/5$ e $B = -9/10$. Logo, a solução geral de (4) é

$$y(x) = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x - \frac{2}{5} \sin 3x - \frac{9}{10} \cos 3x.$$

□

Exemplo 4

Determine a solução geral da equação

$$y'' - 5y' + 4y = e^x. \quad (5)$$

Este exemplo nos mostra que a nossa suposição inicial para a solução particular procurada poderá sofrer algum ajuste.

Solução

A equação característica da EDO homogênea associada tem como raízes $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 4$, portanto sua solução geral é dada por $y_h = c_1 e^x + c_2 e^{4x}$.

Agora, vamos procurar uma solução particular para (5) do tipo da g . Portanto, supomos inicialmente $y_p(x) = Ae^x$, porém como esta já é solução da homogênea associada, não será solução da não homogênea, portanto, em tal caso, ajustamos a suposição inicial multiplicando-a por x . Assim, na verdade vamos trabalhar com

$$y_p = Axe^x. \quad (6)$$

Derivando (6) e substituindo em (5), temos

$$2Ae^x + Axe^x - 5Ae^x - 5Axe^x + 4Axe^x = e^x,$$

donde simplificando e igualando os coeficientes dos termos iguais, segue que

$A = -1/3$. Portanto, $y_p = -\frac{1}{3}xe^x$ e a solução geral de (5) é

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{4x} - \frac{1}{3}xe^x. \quad \square$$

Exemplo 5

Determine a solução geral da equação

$$y'' - 2y' + y = 2e^x. \quad (7)$$

Solução

A equação característica da EDO homogênea associada tem como raízes $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, portanto sua solução geral é dada por $y_h = c_1e^x + c_2xe^x$. Neste caso, buscamos uma solução particular

$$y_p = Ax^2e^x, \quad (8)$$

pois tanto $y = e^x$, quanto $y = xe^x$ são soluções da homogênea associada, sendo necessário ajustarmos nossa suposição inicial, multiplicando por x duas vezes. Derivando (8) e substituindo em (7), obtemos $2Ae^x = 2e^x$, donde $A = 1$. Logo, a solução geral procurada é $y(x) = c_1e^x + c_2xe^x + x^2e^x$. \square

Exemplo 6

Determine a solução geral da equação

$$y'' + y = \cos x + x - 3e^{2x}. \quad (9)$$

Solução

A EDO homogênea associada tem solução geral $y_h(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$. Observando cada termo que compõe a função g , vamos pensar em soluções particulares para cada um e depois somar as suposições. Assim, vamos supor $y_p = Ax \cos x + Bx \sin x + Cx + D + Ee^{2x}$. Derivando e substituindo em (9), obtemos após simplificações

$$-2A \sin x + 2B \cos x + Cx + D + 5Ee^{2x} = \cos x + x - 3e^{2x}.$$

Segue desta igualdade que $-2A = 0, 2B = 1, C = 1, D = 0$ e $5E = -3$.

Portanto, $y_p = \frac{1}{2}x \sin x + x - \frac{3}{5}e^{2x}$ e a solução geral de (9) é

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \frac{1}{2}x \sin x + x - \frac{3}{5}e^{2x}. \quad \square$$

Observação 1

Dada um EDO linear a qual associamos duas funções para a parte não homogênea, digamos g_1 e g_2 , conforme abaixo

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g_1(x) \quad (10)$$

e

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g_2(x) \quad (11)$$

Se $y_1(x)$ é uma solução particular para (10) e $y_2(x)$ para (11), então $y_1(x) + y_2(x)$ é uma solução particular para a EDO (12) com a parte não homogênea sendo a soma entre as funções g_1 e g_2 (verifique!)

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g_1(x) + g_2(x). \quad (12)$$

Este fato é conhecido como *princípio da superposição* de soluções para uma EDO linear não homogênea. No exemplo 6 anterior, ao somarmos as supostas soluções particulares para cada termo da função g estávamos usando esse princípio.

Exemplo 7

Determine a solução geral da equação

$$y''' - y'' + y' - y = x^2 e^x. \quad (13)$$

Solução

A equação característica da EDO homogênea associada a (13) é $z^3 - z^2 + z - 1 = 0$, que pode ser fatorada como $z^2(z-1) + z - 1 = (z-1)(z^2+1) = 0$. Assim, suas raízes são $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -i$ e $\lambda_3 = i$. Daí, $y_h(x) = c_1 e^x + c_2 \cos x + c_3 \sin x$. Buscamos uma solução particular para (13) do tipo

$$y_p(x) = x(Ax^2 + Bx + C)e^x.$$

Observe que multiplicamos por x para que não houvesse termos da solução geral da homogênea associada presentes na solução particular. Derivando

a solução particular e substituindo em (13), obtemos (verifique!) $A = 1/6$, $B = -1/2$ e $C = 1/2$. Logo, a solução geral de (13) é

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 \cos x + c_3 \sin x + \left(\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x\right)e^x.$$

□

3 Exercícios de revisão

Resolva as seguintes equações.

1. $y'' + 3y = 5$.
2. $2y'' - y' + 2y = 3xe^x$.
3. $y'' - 2y' + y = 2e^x + xe^x$.
4. $y''' + 3y'' - 4y = e^x \cos x$.
5. $y'' + 2y = xe^x \sin x$.
6. $y^{(4)} - y = -e^x$.
7. $y'' + 4y = \sin x \cos x$. (Use $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$)

Determine a solução de cada PVI.

8. $y'' + 3y = 5$; $y'(0) = 1$, $y(0) = -1$.
9. $y''' + y'' + 3y' + 3y = x^2$; $y''(0) = 2$, $y'(0) = 1$, $y(0) = 0$.

Aula 28

Método da variação dos parâmetros

Nesta aula vamos estudar o método da variação dos parâmetros, que é usado para achar uma solução particular de uma equação diferencial linear não homogênea de grau n .

1 Conceitos básicos

Consideramos a EDO linear não homogênea de ordem n dada pela expressão:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y = g, \quad (1)$$

onde a_0, \dots, a_{n-1} e g são funções da variável x .

Nosso objetivo é achar uma solução particular da equação (1) supondo que conhecemos a solução geral da equação homogênea associada.

Observação 1

O método da variação dos parâmetros é muito mais geral do que o método estudado na Aula 27. De fato, para aplicar o método não é necessário que

os coeficientes a_0, \dots, a_n sejam constantes, nem que a função g seja do tipo mencionado em (2) da Aula 27.

Vamos começar considerando o caso onde $n = 2$.

2 Grau n=2

Consideramos a equação

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x), \quad (2)$$

e supomos que

$$y_h(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x), \quad (3)$$

onde c_1 e c_2 são **constantes**, é a solução geral da equação homogênea associada:

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0. \quad (4)$$

O método da variação dos parâmetros consiste, daí seu nome, em fazer variar os parâmetros c_1, c_2 na solução geral (3) para achar uma solução particular de (2). Isto é, procuramos por uma solução particular da forma:

$$y_p(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x), \quad (5)$$

onde agora c_1 e c_2 são **funções**.

Note que as funções y_1, y_2 e g são conhecidas enquanto que as funções c_1 e c_2 são desconhecidas. Assim, o método da variação dos parâmetros consiste em achar funções $c_1(\cdot)$ e $c_2(\cdot)$ tais que (5) seja solução da equação (2).

Começamos calculando

$$y_p'(x) = c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) + c_1(x)y_1'(x) + c_2(x)y_2'(x),$$

e impomos uma primeira restrição nas funções c_1 e c_2 :

$$c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) = 0. \quad (6)$$

De tal maneira que

$$y'_p(x) = c_1(x)y'_1(x) + c_2(x)y'_2(x). \quad (7)$$

Calculamos

$$y''_p(x) = c'_1(x)y'_1(x) + c'_2(x)y'_2(x) + c_1(x)y''_1(x) + c_2(x)y''_2(x). \quad (8)$$

Introduzindo (5), (7) e (8) em (2), obtemos

$$\begin{aligned} a_0(x)[c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)] + a_1(x)[c_1(x)y'_1(x) + c_2(x)y'_2(x)] + \\ c_1(x)y''_1(x) + c_2(x)y''_2(x) + c'_1(x)y'_1(x) + c'_2(x)y'_2(x) = g(x). \end{aligned} \quad (9)$$

Usando o fato de que y_1 e y_2 são soluções de (4), isto é

$$y''_1 + a_1(x)y'_1 + a_0(x)y_1 = 0 \quad \text{e} \quad y''_2 + a_1(x)y'_2 + a_0(x)y_2 = 0,$$

obtemos, a partir de (9), uma segunda restrição nas funções c_1 e c_2 :

$$c'_1(x)y'_1(x) + c'_2(x)y'_2(x) = g(x). \quad (10)$$

Assim, basta achar funções c_1 e c_2 que satisfazam as restrições (6) e (10). isto é,

$$c'_1(x)y_1(x) + c'_2(x)y_2(x) = 0, \quad (11)$$

$$c'_1(x)y'_1(x) + c'_2(x)y'_2(x) = g(x).$$

Para cada x fixado, (11) é um sistema linear de equações. Este sistema pode ser resolvido, usando a regra de Cramer, da seguinte maneira:

$$c'_1(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2(x) \\ g(x) & y'_2(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y'_1(x) & y'_2(x) \end{vmatrix}}, \quad c'_2(x) = \frac{\begin{vmatrix} y_1(x) & 0 \\ y'_1(x) & g(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y'_1(x) & y'_2(x) \end{vmatrix}}. \quad (12)$$

Observe que o denominador de cada uma das expressões anteriores é diferente de zero, já que corresponde ao wronskiano $W(y_1(x), y_2(x))$ das funções y_1 e

y_2 que são linearmente independentes. Finalmente, integrando com respeito de x em (12) obtemos

$$c_1(x) = - \int \frac{y_2(x)g(x)}{W(y_1(x), y_2(x))} dx, \quad c_2(x) = \int \frac{y_1(x)g(x)}{W(y_1(x), y_2(x))} dx \quad (13)$$

Introduzindo estas funções na expressão (5) obtemos a solução particular desejada.

3 Grau $n \geq 3$

O método da variação dos parâmetros para o caso de uma equação de ordem $n \geq 3$ é totalmente análogo ao descrito na seção anterior para o caso de uma equação de ordem 2.

Consideramos a equação

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x), \quad (14)$$

e supomos que

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \dots + c_ny_n(x),$$

onde c_1, c_2, \dots, c_n são **constantes**, é a solução geral da equação homogênea associada:

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0. \quad (15)$$

Procuramos por uma solução particular de (14) da forma:

$$y_p(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) + \dots + c_n(x)y_n(x), \quad (16)$$

onde agora c_1, c_2, \dots, c_n são **funções**.

Do mesmo jeito que foi feito na seção anterior, começamos calculando y'_p e impomos uma primeira restrição nas funções c_1, c_2, \dots, c_n :

$$c'_1(x)y_1(x) + c'_2(x)y_2(x) + \dots + c'_n(x)y_n(x) = 0, \quad (17)$$

de tal maneira que

$$y_p'(x) = c_1(x)y_1'(x) + c_2(x)y_2'(x) + \cdots + c_n(x)y_n'(x). \quad (18)$$

A seguir calculamos y_p'' e impomos uma segunda restrição nas funções c_1, \dots, c_n :

$$c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) + \cdots + c_n'(x)y_n'(x) = 0, \quad (19)$$

de tal maneira que

$$y_p''(x) = c_1(x)y_1''(x) + c_2(x)y_2''(x) + \cdots + c_n(x)y_n''(x). \quad (20)$$

Continuamos fazendo este processo até obter a seguinte restrição:

$$c_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + c_2'(x)y_2^{(n-1)}(x) + \cdots + c_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) = 0, \quad (21)$$

de tal maneira que

$$y_p^{(n-1)}(x) = c_1(x)y_1^{(n-1)}(x) + c_2(x)y_2^{(n-1)}(x) + \cdots + c_n(x)y_n^{(n-1)}(x). \quad (22)$$

Finalmente, a partir da expressão anterior calculamos $y_p^{(n)}$ e a introduzimos junto com (16), (18), (20), ..., (22) na equação (14). Usando o fato de que y_1, \dots, y_n são soluções de (15), obtemos uma última restrição nas funções c_1, c_2, \dots, c_n , a saber:

$$c_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + c_2'(x)y_2^{(n-1)}(x) + \cdots + c_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) = g(x). \quad (23)$$

Resumindo, procuramos funções c_1, c_2, \dots, c_n que satisfaçam as restrições (17), (19), ..., (21), (23). Isto é,

$$\begin{aligned} c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) + \cdots + c_n'(x)y_n(x) &= 0 \\ c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) + \cdots + c_n'(x)y_n'(x) &= 0 \\ \vdots & \\ c_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + c_2'(x)y_2^{(n-1)}(x) + \cdots + c_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) &= g(x). \end{aligned} \quad (24)$$

Para cada x fixado, (24) é um sistema linear de equações. Este sistema pode ser resolvido, usando a regra de Cramer, da seguinte maneira:

$$c'_i(x) = \frac{(-1)^{n+i}g(x)M_{n,i}(x)}{W(y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x))} \quad \text{para } 1 \leq i \leq n. \quad (25)$$

onde $W(y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x))$ é o Wronskiano das funções y_1, \dots, y_n e $M_{n,i}(x)$ é o determinante da matriz obtida a partir de

$$\begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y'_1(x) & y'_2(x) & \cdots & y'_n(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{bmatrix}$$

tirando a n -ésima linha e a i -ésima coluna. Finalmente, integrando com respeito de x em (25) obtemos

$$c_i(x) = (-1)^{n+i} \int \frac{g(x)M_{n,i}(x)}{W(y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x))} dx \quad \text{para } 1 \leq i \leq n. \quad (26)$$

Introduzindo estas funções na expressão (16) obtemos a solução particular desejada.

Observação 2

Lembre que o nosso objetivo é achar uma solução particular de uma equação linear não homogênea supondo que conhecemos a solução geral da equação homogênea associada. Note que para dar uma expressão explícita de dita solução particular usando método da variação dos parâmetros, precisamos integrar explicitamente as expressões em (13) ou (26). Isto nem sempre é possível, no entanto, sempre podemos expressar a solução particular em termos das antiderivadas (ver Exemplo 3).

4 Exemplos

Exemplo 1

Ache a solução geral de

$$y'' + y = \operatorname{tg} t, \quad 0 < t < \frac{\pi}{2}. \quad (27)$$

Solução

Sabemos que $y_h = c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t$ é solução geral da equação $y'' + y = 0$. Assim, para achar a solução geral de (27) basta achar uma solução particular y_p de dita equação. Usando o método de variação dos parâmetros, sabemos que

$$y_p(t) = c_1(t) \cos t + c_2(t) \operatorname{sen} t, \quad (28)$$

é uma solução particular de (27) sempre que

$$c_1(t) = - \int \frac{\operatorname{sen} t \operatorname{tg} t}{W(\cos t, \operatorname{sen} t)} dt \quad \text{e} \quad c_2(t) = \int \frac{\cos t \operatorname{tg} t}{W(\cos t, \operatorname{sen} t)} dt,$$

onde

$$W(\cos t, \operatorname{sen} t) = \begin{vmatrix} \cos t & \operatorname{sen} t \\ -\operatorname{sen} t & \cos t \end{vmatrix} = 1.$$

Assim,

$$c_1(t) = - \int \operatorname{sen} t \operatorname{tg} t dt = \operatorname{tg} t \cos t - \int \cos t \sec^2 t dt = \operatorname{sen} t - \ln(\sec t + \operatorname{tg} t) + C$$

e

$$c_2(t) = \int \cos t \operatorname{tg} t dt = \int \operatorname{sen} t dt = -\cos t + D.$$

Já que procuramos uma solução particular, podemos tomar $C = D = 0$. Substituindo $c_1(t)$ e $c_2(t)$ em (28) pelas funções acima, obtemos

$$y_p(t) = [\operatorname{sen} t - \ln(\sec t + \operatorname{tg} t)] \cos t - \cos t \operatorname{sen} t = -\ln(\sec t + \operatorname{tg} t) \cos t$$

Logo, uma solução geral de (27) é dada por

$$y(t) = c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t - \ln(\sec t + \operatorname{tg} t) \cos t .$$

□

Exemplo 2

Ache a solução geral de

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^t}{1+t^2}. \quad (29)$$

Solução

Sabemos que $y_h = c_1 e^t + c_2 t e^t$ é solução geral da equação $y'' - 2y' + y = 0$. Assim, para achar a solução geral de (29) basta achar uma solução particular y_p de dita equação. Usando o método de variação dos parâmetros, sabemos que

$$y_p(t) = c_1(t)e^t + c_2(t)te^t, \quad (30)$$

é uma solução particular de (29) sempre que

$$c_1(t) = - \int \frac{te^{2t}}{e^{2t}(1+t^2)} dt \quad \text{e} \quad c_2(t) = \int \frac{e^{2t}}{e^{2t}(1+t^2)} dt ,$$

pois

$$W(e^t, te^t) = \begin{vmatrix} e^t & te^t \\ e^t & e^t(1+t) \end{vmatrix} = e^{2t}.$$

Assim,

$$c_1(t) = - \int \frac{t}{1+t^2} dt = \frac{1}{2} \ln(1+t^2) + C$$

e

$$c_2(t) = \int \frac{1}{1+t^2} dt = \operatorname{arctg} t + D.$$

Fazendo $C = D = 0$ e substituindo $c_1(t)$ e $c_2(t)$ em (30) pelas funções acima, temos que

$$y(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t + \frac{1}{2} \ln(1+t^2) e^t + \operatorname{arctg}(t) t e^t .$$

é uma solução geral de (29). \square

Exemplo 3

Ache a solução geral de

$$y''' - y'' + y' - y = \sec t, \quad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}. \quad (31)$$

Solução

Sabemos que $y_h = c_1 e^t + c_2 \cos t + c_3 \sin t$ é solução geral da equação $y''' - y'' + y' - y = 0$. Assim, para achar a solução geral de (31) basta achar uma solução particular y_p de dita equação. Usando o método de variação dos parâmetros, sabemos que

$$y_p(t) = c_1(t) e^t + c_2(t) \cos t + c_3(t) \sin t, \quad (32)$$

é uma solução particular de (31) sempre que

$$c_1(t) = \frac{1}{2} \int e^{-t} \sec t \, dt, \quad c_2(t) = -\frac{1}{2} \int \sec t (\cos t - \sin t) \, dt$$

e

$$c_3(t) = -\frac{1}{2} \int \sec t (\cos t + \sin t) \, dt,$$

pois

$$W(e^t, \cos t, \sin t) = \begin{vmatrix} e^t & \cos t & \sin t \\ e^t & -\sin t & \cos t \\ e^t & -\cos t & -\sin t \end{vmatrix} = 2e^t,$$

$$M_{3,1}(t) = \begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{vmatrix} = 1, \quad M_{3,2}(t) = \begin{vmatrix} e^t & \sin t \\ e^t & \cos t \end{vmatrix} = e^t (\cos t - \sin t),$$

e

$$M_{3,3}(t) = \begin{vmatrix} e^t & \cos t \\ e^t & -\operatorname{sen} t \end{vmatrix} = -e^t(\cos t + \operatorname{sen} t).$$

Integrando, obtemos que

$$c_2(t) = -\frac{1}{2}[t + \ln(\cos t)] + C$$

e

$$c_3(t) = \frac{1}{2}[\ln(\cos t) - t] + D.$$

Embora a função $h(x) = e^{-t} \sec t$ não possa ser integrada em termos de funções elementares, podemos expressar a solução geral de (31) em termos da primitiva de h . Fazendo $C = D = 0$ e substituindo $c_1(t)$, $c_2(t)$ e $c_3(t)$ em (32) pelas funções acima, temos que

$$y(t) = c_1 e^t + c_2 \cos t + c_3 \operatorname{sen} t + \left(\int_0^t e^{-s} \sec s \, ds \right) e^t \\ - \frac{1}{2}[t + \ln(\cos t)] \cos t + \frac{1}{2}[\ln(\cos t) - t] \operatorname{sen} t .$$

é uma solução geral de (31). \square

5 Exercícios de revisão

Encontre a solução geral das seguintes equações:

1. $y'' + 9y = \sec^2(3t)$ para $0 < t < \frac{\pi}{6}$.
2. $y'' + 4y = 3 \operatorname{csc}(2t)$ para $0 < t < \frac{\pi}{2}$.
3. $y''' + y = \sec t$ para $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$.
4. $y''' - y = \operatorname{csc} t$ para $0 < t < \pi$.

Verifique que as funções dadas são soluções da equação homogênea associada e ache uma solução particular usando o método da variação dos parâmetros.

5. $x^2 y'' - 2y = 3x^2 - 1$ para $x > 0$, onde $y_1(x) = x^2$ e $y_2(x) = x^{-1}$.
6. $x^3 y''' + x^2 y'' - 2xy' + 2y = 2x^4$ para $x > 0$, onde $y_1(x) = x^2$ e $y_2(x) = x^{-1}$.

Aula 29

Equações de Euler-Cauchy

As chamadas equações de *Euler-Cauchy* formam um tipo especial de equação linear com coeficientes não constantes que são de resolução simples. Suas soluções se expressam em termos de funções elementares, o que não ocorre, em geral, para a maioria das EDOs lineares com coeficientes variáveis.

1 Equações de Euler-Cauchy de segunda ordem

As equações de *Euler-Cauchy* de segunda ordem homogêneas são do seguinte tipo

$$ax^2y'' + bxy' + cy = 0, \quad x \neq 0. \quad (1)$$

No entanto, podemos nos restringir ao caso $x > 0$, conforme observação 1 abaixo. Para encontrarmos a solução geral de (1) a ideia é, já que os coeficientes são potências de x , procurarmos soluções do mesmo tipo. Ou seja, procuramos soluções do tipo

$$y = x^m. \quad (2)$$

Assim, derivando (2) e substituindo em (1), obtemos a seguinte igualdade

$$ax^2m(m-1)x^2x^{m-2} + bmx^2x^{m-1} + cx^m = 0, \quad x > 0,$$

donde

$$am(m-1)x^m + bmx^m + cx^m = 0, \quad x > 0.$$

Portanto, $y = x^m$ será solução de (1) se e só m for solução da equação (3) a seguir, dita *equação auxiliar*:

$$am(m-1) + bm + c = 0. \quad (3)$$

Ou equivalentemente,

$$am^2 + (b-a)m + c = 0$$

Note que o procedimento anterior funciona bem, pois a ordem de cada derivada de (1) e o grau do monômio que multiplica cada uma delas são iguais.

Agora, vamos dividir em casos o estudo das raízes de (3), conforme o sinal do $\Delta = (b-a)^2 - 4ac$ associado.

- **As raízes de (3) são reais e distintas.**

Denotando as duas raízes por m_1 e m_2 , encontramos duas soluções distintas e linearmente independentes (calcule o Wronskiano!), a saber, $y_1(x) = x^{m_1}$ e $y_2(x) = x^{m_2}$. Portanto, temos a solução geral de (1), que é dada por

$$y(x) = c_1x^{m_1} + c_2x^{m_2}.$$

- **A raiz de (3) tem multiplicidade 2.**

Seja $m = \frac{a-b}{2a}$ a raiz de (3) com multiplicidade dois. Assim,

$$y_1(x) = x^{\frac{a-b}{2a}}$$

é uma solução de (1). A fim de encontrarmos uma outra solução linearmente independente, vamos lançar mão do *método da redução de ordem*, visto na Aula 25. Neste sentido, a segunda solução y_2 é dada pela fórmula (8) da referida aula e portanto, temos

$$y_2(x) = x^{\frac{a-b}{2a}} \int \frac{e^{-\int \frac{b}{ax} dx}}{x^{\frac{a-b}{a}}} dx = x^{\frac{a-b}{2a}} \int \frac{1}{x} dx = x^{\frac{a-b}{2a}} \ln x, \quad x > 0.$$

Assim, a solução geral de (1) é escrita como

$$y(x) = c_1 x^{\frac{a-b}{2a}} + c_2 x^{\frac{a-b}{2a}} \ln x, \quad x > 0.$$

• **As raízes de (3) são não reais.**

Neste caso temos duas raízes complexas conjugadas, digamos $m_1 = \alpha + i\beta$ e $m_2 = \alpha - i\beta$. Assim, chegamos às soluções complexas

$$z_1(x) = x^{\alpha+i\beta}, \quad z_2(x) = x^{\alpha-i\beta}.$$

Utilizando a fórmula de Euler, podemos escrevê-las como

$$z_1(x) = x^{\alpha+i\beta} = x^\alpha x^{i\beta} = x^\alpha e^{i\beta \ln x} = x^\alpha \cos(\beta \ln x) + ix^\alpha \operatorname{sen}(\beta \ln x),$$

e analogamente

$$z_2(x) = x^\alpha \cos(\beta \ln x) - ix^\alpha \operatorname{sen}(\beta \ln x).$$

Extraímos das partes real e imaginária das soluções complexas anteriores duas soluções reais linearmente independentes (verifique!) da equação de Euler-Cauchy, a saber $y_1 = x^\alpha \cos(\beta \ln x)$ e $y_2 = x^\alpha \operatorname{sen}(\beta \ln x)$. Logo, a solução geral para (1) é

$$y(x) = c_1 x^\alpha \cos(\beta \ln x) + c_2 x^\alpha \operatorname{sen}(\beta \ln x).$$

2 Exemplos

Exemplo 1

Resolva a equação de Euler-Cauchy

$$x^2y'' - 2xy' - 4y = 0, \quad x > 0. \quad (4)$$

Solução

Buscando uma solução do tipo $y = x^m$, obtemos a equação auxiliar

$$m^2 - 3m - 4 = 0,$$

cujas soluções são $m_1 = -1$ e $m_2 = 4$. Portanto, pelo visto anteriormente, a solução geral de (4) é $y(x) = c_1x^{-1} + c_2x^4$. \square

Exemplo 2

Resolva a equação de Euler-Cauchy

$$4x^2y'' + 8xy' + y = 0, \quad x > 0. \quad (5)$$

Solução

Buscando uma solução do tipo $y = x^m$, obtemos a equação auxiliar

$$4m^2 + 4m + 1 = 0,$$

que tem uma raiz real com multiplicidade dois dada por $m = -1/2$. Portanto, pelo visto anteriormente, a solução geral de (5) é $y(x) = c_1x^{-1/2} + c_2x^{-1/2} \ln x$.

\square

Exemplo 3

Resolva a equação de Euler-Cauchy

$$x^2y'' + 3xy' + 3y = 0, \quad x > 0. \quad (6)$$

Solução

A equação auxiliar

$$m^2 + 2m + 3 = 0,$$

tem raízes não reais $m_1 = -1 + i\sqrt{2}$ e $m_2 = -1 - i\sqrt{2}$. Portanto, a solução geral de (6) é dada por $y(x) = c_1x^{-1} \cos(\sqrt{2} \ln x) + c_2x^{-1} \sin(\sqrt{2} \ln x)$. \square

Exemplo 4

Resolva a equação de Euler-Cauchy não homogênea

$$x^2y'' + 3xy' + y = \ln x, \quad x > 0. \quad (7)$$

Solução

Vamos resolver a EDO homogênea associada e usar o método de variação dos parâmetros da Aula 28 para encontrar a solução geral de (7). A equação auxiliar tem $m = -1$ a única raiz real com multiplicidade dois, portanto a solução geral da homogênea associada é $y_h(x) = c_1x^{-1} + c_2x^{-1} \ln x$. Agora, usando a expressão (13) da Aula 28, temos que uma solução particular para (7) é dada por

$$y_p(x) = c_1(x)x^{-1} + c_2(x)x^{-1} \ln x, \quad (8)$$

onde

$$c_1(x) = - \int \frac{x^{-2} \ln x \cdot x^{-1} \ln x}{W(x^{-1} \ln x, x^{-1})} dx, \quad c_2(x) = \int \frac{x^{-2} \ln x \cdot x^{-1}}{W(x^{-1} \ln x, x^{-1})} dx. \quad (9)$$

Logo, calculando o wronskiano, simplificando e integrando por partes as expressões de (9) para $c_1(x)$ e $c_2(x)$, obtemos

$$c_1(x) = -x \ln^2 x + 2x \ln x - 2x \quad e \quad c_2(x) = x \ln x - x. \quad (10)$$

Logo, substituindo (10) em (8), a solução geral de (7) é

$$y(x) = c_1x^{-1} + c_2x^{-1} \ln x + \ln x - 2, \quad x > 0.$$

□

Observação 1

Se $y(x)$ é a solução de uma equação de Euler-Cauchy para $x > 0$, então a função $y(-x)$, para $x < 0$ é a solução geral da mesma equação para valores negativos de x . Portanto, $y(|x|)$ é a solução geral da equação estudada para todo x não nulo. Assim, por exemplo, a solução geral de (6) válida para $x \neq 0$ é $y(x) = c_1|x|^{-1} \cos(\sqrt{2} \ln |x|) + c_2|x|^{-1} \operatorname{sen}(\sqrt{2} \ln |x|)$, que também se escreve como $y(x) = c_1x^{-1} \cos(\sqrt{2} \ln |x|) + c_2x^{-1} \operatorname{sen}(\sqrt{2} \ln |x|)$.

3 Equações de Euler-Cauchy de ordem $n \geq 3$

Em geral, as equações de Euler-Cauchy de ordem n homogêneas são escritas como

$$a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 x y' + a_0 y = 0, x > 0.$$

Para resolvê-las, podemos pensar como na seção anterior e procurar soluções do tipo $y = x^m$, obtendo uma equação auxiliar. Porém, vamos tomar um caminho um pouco diferente e usar a mudança de variável $x = e^t$ que transforma a EDO de Euler-Cauchy, com variável independente $x > 0$, numa EDO linear com os coeficientes constantes, na variável independente t , que já foram estudadas na Aula 26. Esse novo método também pode ser aplicado às equações de Euler-Cauchy de ordem 2.

Por simplicidade, vamos aplicar a mudança de variável $x = e^t$ à equação de Cauchy-Euler de ordem $n = 3$:

$$a_3 x^3 \frac{d^3 y}{dx^3} + a_2 x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + a_1 x \frac{dy}{dx} + a_0 y = 0, x > 0. \quad (11)$$

Sabemos que $x = e^t$ se e só se $t = \ln x$, donde $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}$. Usando a última expressão, vamos escrever as derivadas de y em relação a x em função das

derivadas de y em relação a t e substituir em (11). Assim, temos pela *Regra da Cadeia*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{1}{x}. \quad (12)$$

Derivando novamente e usando (12), temos usando também a *regra da derivada do produto*

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2} \frac{1}{x^2} - \frac{dy}{dt} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2} \left[\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right]. \quad (13)$$

Efetuada a derivada de (13), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d^3y}{dx^3} &= \frac{1}{x^2} \left[\frac{d^3y}{dt^3} \frac{1}{x} - \frac{d^2y}{dt^2} \frac{1}{x} \right] - \frac{2}{x^3} \left[\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right] = \\ &= \frac{1}{x^3} \left[\frac{d^3y}{dt^3} - 3 \frac{d^2y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} \right]. \end{aligned} \quad (14)$$

Substituindo (12), (13) e (14) em (11), obtemos a EDO linear de ordem 3 com variável dependente t , cujos coeficientes são constantes

$$a_3 \frac{d^3y}{dt^3} + (a_2 - 3a_3) \frac{d^2y}{dt^2} + (2a_3 - a_2 + a_1) \frac{dy}{dt} + a_0y = 0, t \in \mathbb{R}. \quad (15)$$

Logo, resolvemos (15) e voltamos à variável x original fazendo $t = \ln x$ na solução geral que encontrarmos para (15). Observe os exemplos a seguir.

Exemplo 5

Resolva a equação de Euler-Cauchy

$$x^3y''' + 6x^2y'' + 7xy' + y = 0, x > 0. \quad (16)$$

Solução

$m = -1$ com multiplicidade 3. Usando a mudança de variável $x = e^t$,

como $a_3 = 1, a_2 = 6, a_1 = 7$ e $a_0 = 1$, de (15), obtemos a EDO na variável t de coeficientes constantes

$$y'''(t) + 3y''(t) + 3y'(t) + y(t) = 0, t \in \mathbb{R}. \quad (17)$$

A equação característica associada à EDO anterior é $z^3 + 3z^2 + 3z + 1 = 0$, que tem $\lambda = -1$ sua única raiz com multiplicidade 3. Portanto, pelo visto na Aula 26 a solução geral de (17) é

$$y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t} + c_3 t^2 e^{-t}, t \in \mathbb{R}.$$

Voltando à variável x via $t = \ln x$, obtemos

$$y(x) = \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x} \ln x + \frac{c_3}{x} \ln^2 x.$$

que é a solução geral de (16) para $x > 0$. \square

Exemplo 6

Resolva a equação de Euler-Cauchy não homogênea

$$x^3 y''' + 3x^2 y'' + xy' - y = \ln x, x > 0. \quad (18)$$

Solução

Fazendo a mudança de variável $x = e^t$, usando (15), obtemos a EDO de coeficientes constantes na variável real t

$$y''' - y = t \quad (19)$$

A equação característica associada à EDO homogênea de (19) é $z^3 - 1 = 0$, que tem raízes $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ e $\lambda_3 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$. Portanto, pelo visto na Aula 26 a solução geral da EDO homogênea associada a (19) é

$$y_h(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + c_3 e^{-t/2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right), t \in \mathbb{R}.$$

Usando o *método dos coeficientes a determinar* da Aula 27, procuramos uma solução particular do tipo $y_p(t) = At + B$, que substituindo em (19) implica em $A = -1$ e $B = 0$. Assim, a solução geral de (19) é

$$y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + c_3 e^{-t/2} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - t, t \in \mathbb{R}.$$

Retornando à variável x , obtemos a solução geral de (18)

$$y(x) = c_1 x + c_2 \frac{1}{\sqrt{x}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x\right) + c_3 \frac{1}{\sqrt{x}} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x\right) - \ln x, x > 0.$$

□

Observação 2

- O problema acima poderia ter sido resolvido na variável x diretamente, procurando soluções do tipo x^m e recorrendo à equação auxiliar

$$m(m-1)(m-2) + 3m(m-1) + m - 1 = (m-1)[m(m-2) + 3m + 1] = 0$$

para determinar a solução geral da EDO homogênea associada. Para finalizar, uma solução particular para (18) seria calculada usando o método de *variação dos parâmetros* da Aula 28.

- Se utilizarmos o método de solução em que procuramos uma potência de x como solução e a equação auxiliar tiver raízes com multiplicidade maior do que um, em vez de multiplicarmos as soluções por potência de x para gerar novas soluções, como foi feito na Aula 26, multiplicamos por potências de $\ln x$. Observe o exemplo 5.

- As equações de Euler-Cauchy aparecem em certos problemas físicos envolvendo a condução de calor num disco. Tais problemas, quando modelados matematicamente, dão origem a uma importante *Equação Diferencial Parcial*, chamada *Equação de Laplace*, sujeita a condições de contorno. Esse problema é conhecido como Problema de Dirichlet e suas soluções são obtidas através do estudo de classes de EDOs, dentre elas as equações de Euler-Cauchy. Para maiores detalhes, consulte o capítulo 10, seção 7 da referência [2].

4 Exercícios de revisão

Resolva as seguintes equações para $x > 0$.

1. $x^2y'' + 12xy' + 9y = 0$.

2. $x^2y'' + 5xy' + 4y = 0$.

3. $2x^2y'' + 3xy' - y = 0$.

4. $x^3y''' - 3x^2y'' + 6xy' - 6y = 0$.

5. $x^3y''' + x^2y'' - 2xy' + 2y = 2x^4$.

6. Resolva a EDO $x^2y'' - 2xy' + 2y = 3x^2 + 2 \ln x$, $x > 0$, usando:

a) a mudança $x = e^t$;

b) a equação auxiliar associada.

7. Resolva a EDO $(x - 1)^2y'' - 2(x - 1)y' + 2y = 0$, $x > 1$, usando:

a) a mudança $t = x - 1$;

b) procurando soluções do tipo $y(x) = (x - 1)^m$.

8. Determine todos os valores de α para os quais todas as soluções de

$$x^2y'' + \alpha xy' + (5/2)y = 0, x \neq 0$$

tendem a zero, quando $x \rightarrow 0$.

Aula 30

Aplicações das Equações de Segunda Ordem

Vamos estudar algumas aplicações das Equações Diferenciais Lineares de segunda ordem.

1 Sistema Massa-Mola

Alguns problemas físicos, quando modelados matematicamente são idênticos. Por exemplo, o movimento de uma massa ligada a uma mola e a corrente elétrica num circuito simples em série são descritos pela solução de um mesmo PVI do tipo

$$ax'' + bx' + cx = g(t), \quad y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y_1.$$

Considere uma massa m suspensa na extremidade de uma mola helicoidal vertical. Suponha que sem a massa o comprimento da mola seja l , veja a Figura 1 a seguir. A massa provoca uma distensão s da mola na direção para baixo, tomada como positiva. No ponto onde a massa se liga à mola há duas forças atuando, uma é o peso P da massa ($P = mg$, com $g \simeq 9,8m/s^2$) e a outra é a força R restauradora da mola, que segundo a *Lei de Hooke*

é oposta ao alongamento e proporcional à distensão s da mola. Ou seja,

$R = -ks$, com $k > 0$ constante de proporcionalidade que caracteriza a mola.

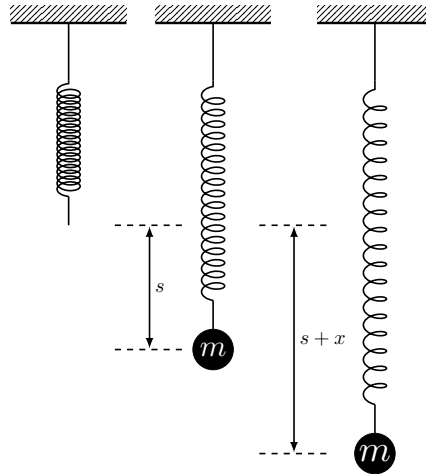


Figura 1: A figura mostra a mola inicialmente sem a massa, depois a massa é presa e a mola sofre uma distensão. Finalmente, o sistema massa-mola é puxado para baixo e sofre distensão total $s + x$.

Quando a massa está em equilíbrio, temos

$$ks = mg. \quad (1)$$

Se deslocarmos a massa m de x unidades de sua posição de equilíbrio e a soltarmos, teremos a posição da massa dada por $x(t)$ e a dinâmica do movimento dada pela 2^a Lei de Newton:

$$F = ma = mx''(t),$$

donde

$$mx''(t) = -k(s + x(t)) + mg + f(t), \quad (2)$$

onde $f(t)$ é uma força qualquer que atua no movimento, além das citadas, e o sinal negativo em $-k(s + x(t))$ se deve ao fato de que esta força é oposta ao movimento. Substituindo (1) em (2), obtemos a EDO do sistema

$$mx''(t) + kx(t) = f(t). \quad (3)$$

Ressaltamos que deslocamentos x abaixo da posição de equilíbrio (origem) será positivo e acima desta posição será negativo.

Agora, vamos estudar (3) para diferentes tipos de funções f .

A- Movimento Livre Não-Amortecido (ou Harmônico Simples).

$$mx''(t) + kx(t) = 0, \quad (4)$$

nesse caso, $f(t) = 0$ e as únicas forças que atuam no sistema são o peso da massa m e a força restauradora da mola. Como $m, k > 0$ (4) tem a seguinte solução geral

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 \cos(\sqrt{k/m}t) + c_2 \operatorname{sen}(\sqrt{k/m}t) \\ &= c_1 \cos \omega t + c_2 \operatorname{sen} \omega t, \end{aligned} \quad (5)$$

onde $\omega = \sqrt{k/m}$ é dita a frequência natural do sistema, $T = 2\pi/\omega$ o período (o tempo que leva para o movimento se repetir) e $f = 1/T$ a frequência de oscilação (o número de ciclos completos por segundo).

Escolhendo ϕ , tal que $\cos \phi = c_1/R$, $c_2 = R \operatorname{sen} \phi$ onde $R = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ e portanto $\operatorname{tg} \phi = c_2/c_1$, podemos reescrever (5), utilizando a fórmula do cosseno da soma, como

$$x(t) = R \cos(\omega t - \phi), \quad (6)$$

em que ϕ é o ângulo de fase (verifique!). De (6) fica claro que R é a amplitude do movimento.

Observação 1

- A equação (4) é irrealista, pois raramente (ou nunca) é atingida na prática, pois sempre há uma força de retardamento ou amplificadora atuando.
- No modelo massa-mola anterior não se levou em conta o desgaste da mola. Em geral, a medida em que a mola é utilizada sua “constante de elasticidade” k pode decrescer com o tempo. Assim, poderemos ter modelos em que $K(t) = ke^{-at}$, $a > 0$. Ou ainda, a “constante de elasticidade” poderá

ser crescente do tipo $K(t) = kt$, $k > 0$, se, por exemplo, o sistema estiver num ambiente em que a temperatura caia rapidamente. Note que nos casos descritos anteriormente as EDOs resultantes possuem coeficientes não constantes e portanto não podemos resolvê-las pelos métodos abordados nesse curso. Em particular, se $K(t) = kt$, vamos obter uma EDO conhecida como *equação diferencial de Airy*, cujas soluções são encontradas usando *séries de potências*. Para maiores informações pode-se consultar a referência [10], capítulos 5 e 6.

Exemplo 1

Resolva e interprete a solução do PVI abaixo:

$$x'' + 4x = 0, \quad x(0) = 8, \quad x'(0) = 0. \quad (7)$$

Solução

Usando a equação característica vista na Aula 26, obtemos a solução geral da EDO em (7)

$$x(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t.$$

Utilizando as condições iniciais dadas, obtemos $c_1 = 8$ e $c_2 = 0$, donde a solução do PVI é

$$x(t) = 8 \cos 2t. \quad (8)$$

Observe que as condições iniciais significam que a mola é puxada 8 unidades abaixo da posição de equilíbrio e é solta com velocidade zero (quando o sistema está em repouso). A equação do movimento do sistema (8) nos mostra que o mesmo permanece em movimento indefinidamente com a massa oscilando entre 8 unidades abaixo da posição de equilíbrio $x = 0$ e 8 unidades acima da posição de equilíbrio. O período de oscilação é $T = 2\pi/2 = \pi$ segundos, como nos mostra a figura (2). \square

Exemplo 2

Uma massa pesando 3kg distende uma mola em 4cm. Se a massa for deslocada de mais 2cm e depois posta em movimento, com um velocidade para

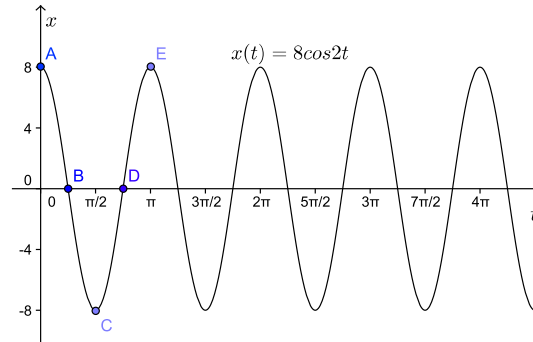


Figura 2: Equação do movimento do exemplo 1. O ponto A é a posição inicial; o B é a primeira vez que a massa passa pelo ponto de equilíbrio; no C a massa está 8 unidades acima da posição de equilíbrio; no D passa novamente pela posição de equilíbrio; no E retorna à posição inicial. O tempo que leva para retornar à posição inicial é o período π do movimento (de A a E).

cima de 20cm/s , determine a posição do corpo nos instantes posteriores, a amplitude, período e a fase do movimento.

Solução

De acordo com (1) podemos calcular a constante k da mola. Então $4k = 3g$, donde $k = \frac{3g}{4} \simeq \frac{29,4}{4} = 7,35\text{N/cm}$. De (2), obtemos a EDO

$$3x''(t) + 7,35x(t) = 0.$$

Aplicando as condições dadas no problema, temos que no instante inicial $x(0) = 2$ e $x'(0) = -20$. Portanto, formamos um PVI cuja solução é (verifique!)

$$x(t) = 2 \cos \sqrt{2,45}t - \frac{20}{\sqrt{2,45}} \text{sen} \sqrt{2,45}t. \quad (9)$$

Agora vamos escrever (9) na forma (6), assim $\omega = \sqrt{2,45} \simeq 1,57$,

$$R = \sqrt{2^2 + (20/\sqrt{2,45})^2} \simeq 12,93, \cos \phi = 2/R > 0 \text{ e } \text{sen} \phi = -20/\sqrt{409,8} < 0.$$

Daí, ϕ é um ângulo do 4º quadrante, tal que $\text{tg} \phi = \frac{-10}{\sqrt{2,45}} \simeq -6,39$, donde

$$\phi = \text{arctg}\left(-\frac{10}{\sqrt{2,45}}\right) \simeq -1,42\text{rad} \text{ (aproximadamente } -81^\circ\text{)}. \text{ Logo, para } R \text{ e}$$

ϕ calculados acima, temos

$$x(t) = R \cos(\omega t - \phi) \simeq 12,93 \cos(1,57t + 1,42), t \geq 0 \quad (10)$$

De (10) temos amplitude $R \simeq 12,93$; o período $T = 2\pi/\omega \simeq 4,01$; a fase $\phi \simeq -1,42rad$. Observe o gráfico de (9) na figura (3). \square

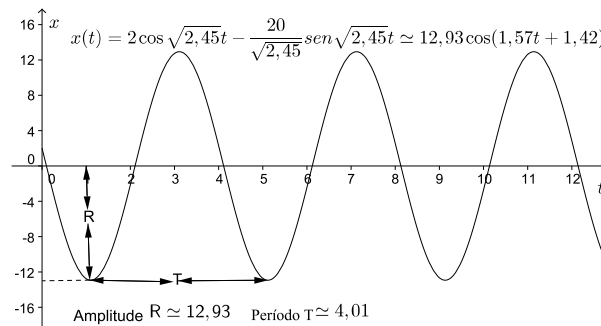


Figura 3: Equação do movimento do exemplo 2. O período é a distância entre dois mínimos (ou máximos) consecutivos. A amplitude é a distância entre o eixo x e um mínimo (ou máximo).

B- Movimento Livre Amortecido.

Neste tipo de sistema há uma força de amortecimento (oposta ao movimento) atuando no sistema. Vamos supor que tal força é proporcional à velocidade da massa, portanto em (3) temos $f(t) = -\gamma x'(t)$, com $\gamma > 0$. Logo, a EDO do sistema é

$$mx''(t) + \gamma x'(t) + kx(t) = 0. \quad (11)$$

As raízes da equação característica associada a (11) são

$$\lambda_1 = \frac{-\gamma + \sqrt{\Delta}}{2m} \quad e \quad \lambda_2 = \frac{-\gamma - \sqrt{\Delta}}{2m}$$

onde

$$\Delta = \gamma^2 - 4km. \quad (12)$$

Dependendo do sinal de (12), a solução geral terá uma das formas que estudaremos a seguir.

1º Caso: sistema superamortecido, $\Delta > 0$.

$$x(t) = c_1 e^{(-\frac{\gamma+\sqrt{\Delta}}{2m})t} + c_2 e^{(-\frac{\gamma-\sqrt{\Delta}}{2m})t} = e^{-\frac{\gamma t}{2m}} [c_1 e^{t\frac{\sqrt{\Delta}}{2m}} + c_2 e^{-t\frac{\sqrt{\Delta}}{2m}}]$$

O termo $e^{-\frac{\gamma t}{2m}}$ junto com o fato de que $\gamma > \sqrt{\Delta}$ implicam num amortecimento suave sem oscilação. No limite, quando $t \rightarrow \infty$, temos $x(t) \rightarrow 0$.

2º Caso: sistema subamortecido, $\Delta < 0$.

$$x(t) = e^{-\frac{\gamma t}{2m}} [c_1 \cos\left(t\frac{\sqrt{-\Delta}}{2m}\right) + c_2 \sin\left(t\frac{\sqrt{-\Delta}}{2m}\right)].$$

Como as funções seno e cosseno são limitadas e $\gamma > 0$, temos que $x(t) \rightarrow 0$, quando $t \rightarrow \infty$. Porém, o movimento é oscilatório, com a amplitude diminuindo a medida em que o tempo passa e tende a parar.

3º Caso: sistema criticamente amortecido, $\Delta = 0$.

$$x(t) = c_1 e^{-\frac{\gamma t}{2m}} + c_2 t e^{-\frac{\gamma t}{2m}}.$$

As soluções passam novamente pelo ponto de equilíbrio no máximo uma vez, pois possuem no máximo um extremo local para $t > 0$. Neste caso, qualquer decréscimo na força de amortecimento resulta em um movimento oscilatório e o sistema fica subamortecido, já que se γ diminuir, o Δ associado fica negativo. Analogamente, se a força de amortecimento aumentar, teremos um sistema superamortecido. Por isso, o comportamento do sistema é dito crítico.

Observação 2

Em muitas aplicações a força de amortecimento é proporcional ao quadrado da velocidade. Note que em tal caso, a EDO que se obtém é não linear.

Exemplo 3

(Sistema superamortecido) Resolva e interprete a solução do PVI abaixo:

$$x'' + 6x' + \frac{11}{4}x = 0, \quad x(0) = 5, \quad x'(0) = 1. \quad (13)$$

Solução

Utilizando a equação característica, vemos que as soluções são $\lambda_1 = -1/2$ e $\lambda_2 = -11/2$. Logo, a solução geral da EDO (13) é dada por

$$x(t) = c_1 e^{-t/2} + c_2 e^{-11t/2}.$$

Impondo as condições iniciais, a solução do PVI (13) é

$$x(t) = \frac{57}{10} e^{-t/2} - \frac{7}{10} e^{-11t/2}.$$

A solução acima representa o movimento de um sistema massa-mola em que a massa é liberada inicialmente de uma posição 5 unidades abaixo da posição de equilíbrio a uma velocidade de 1 unid/seg para baixo. O gráfico pode ser traçado estudando o sinal das derivadas primeira e segunda, onde também podemos verificar que a massa não passa mais pela posição de equilíbrio, porém tende à mesma após um intervalo suficientemente grande de tempo, veja a figura (4) a seguir. \square

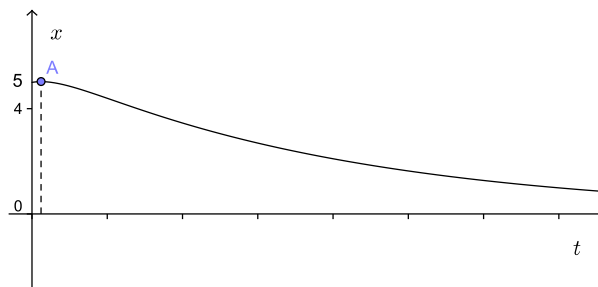


Figura 4: Gráfico da equação do movimento do exemplo 3. O ponto A tem abscissa $t = \frac{\ln 77/57}{5}$ e indica o máximo absoluto da função, isto é, sua ordenada $x \simeq 5,01$ é a amplitude máxima do movimento, que ocorre abaixo da posição de equilíbrio.

Exemplo 4

(Sistema subamortecido) Resolva e interprete a solução do PVI abaixo:

$$x'' + 2x' + 10x = 0, \quad x(0) = -2, \quad x'(0) = 0. \quad (14)$$

Solução

Utilizando a equação característica, vemos que as soluções são $\lambda_1 = -1 + 3i$ e $\lambda_2 = -1 - 3i$. Logo, a solução geral da EDO (14) é dada por

$$x(t) = e^{-t}[c_1 \cos 3t + c_2 \sin 3t].$$

Impondo as condições iniciais, a solução do PVI (14) é

$$x(t) = e^{-t}\left[-2 \cos 3t - \frac{2}{3} \sin 3t\right],$$

ou alternativamente, procedendo como em (6), podemos escrever

$$x(t) = \frac{2\sqrt{10}}{3} e^{-t} \cos(3t - \phi),$$

onde $\phi = \arctg(1/3) + \pi \simeq 3,46$ é um ângulo do 3º quadrante. A mola é comprimida de 2 unidades e solta com velocidade nula. A figura 5 mostra que a solução oscila passando pelo ponto de equilíbrio infinitas vezes com a amplitude diminuindo a medida em que o tempo passa, tendendo a parar.

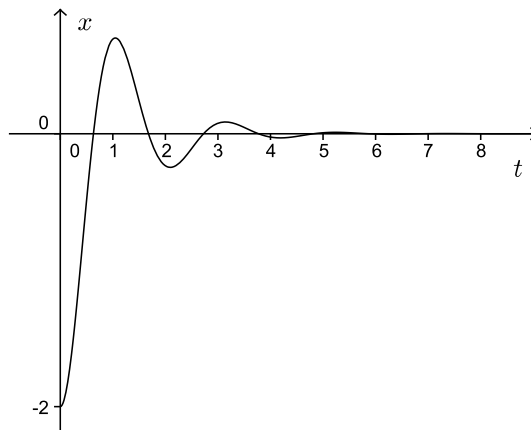


Figura 5: Gráfico da equação do movimento do exemplo 4.

□

Exemplo 5

(Sistema criticamente amortecido) Resolva e interprete a solução do PVI abaixo:

$$x'' + 6x' + 9x = 0, \quad x(0) = 3, \quad x'(0) = -15. \quad (15)$$

Solução

A equação característica possui uma única raiz com multiplicidade dois, a saber $\lambda = -3$. Logo, a solução geral da EDO (15) é dada por

$$x(t) = e^{-3t}[c_1 + c_2t]. \quad (16)$$

Impondo as condições iniciais em (16), a solução do PVI é

$$x(t) = e^{-3t}[3 - 6t].$$

A mola é distendida de 3 unidades e solta com velocidade de 15 unidades por segundo para cima. A solução se anula se e só se $3 - 6t = 0$, ou seja, quando $t = 1/2$, já que $e^{-3t} > 0$. E tende a zero quando $t \rightarrow \infty$, confira a figura 6.

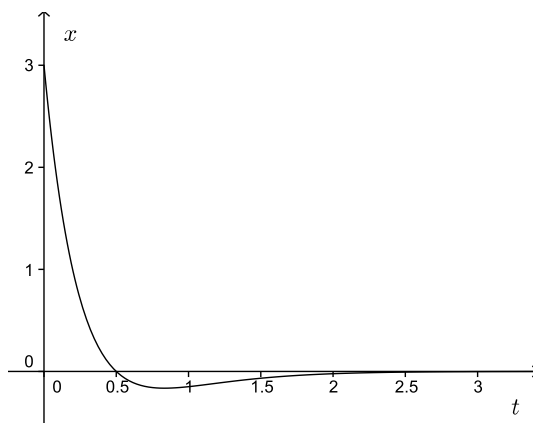


Figura 6: Gráfico da equação do movimento do exemplo 5.

□

C- Movimento Forçado.

Esse tipo de movimento ocorre quando há uma força externa $g(t)$ agindo no sistema, causando uma oscilação vertical no suporte da mola. Portanto, de (3) a EDO do sistema se escreve como

$$mx''(t) + \gamma x'(t) + kx(t) = g(t),$$

onde γ pode ser nula, se não houver força de amortecimento atuando.

Exemplo 6

(Movimento forçado e amortecido) Resolva e interprete a solução do PVI abaixo:

$$x'' + 6x' + 10x = 15 \cos 4t, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0. \quad (17)$$

Solução

A EDO homogênea associada a (17) possui como solução geral

$$x_h(t) = e^{-3t}(c_1 \cos t + c_2 \sin t).$$

Utilizando o método dos coeficientes a determinar da Aula 27, procuramos uma solução particular do tipo

$$x_p(t) = A \cos 4t + B \sin 4t. \quad (18)$$

Derivando (18) duas vezes e substituindo em (17), obtemos $A = -5/34$ e $B = 10/17$, donde $x_p(t) = -5/34 \cos 4t + 10/17 \sin 4t$. Assim, a solução geral da EDO em (17) é

$$x(t) = e^{-3t}(c_1 \cos t + c_2 \sin t) - 5/34 \cos 4t + 10/17 \sin 4t.$$

Impondo as condições iniciais, obtemos a solução do PVI (17)

$$x(t) = e^{-3t}\left(\frac{39}{34} \cos t + \frac{109}{34} \sin t\right) - \frac{5}{34} \cos 4t + \frac{10}{17} \sin 4t. \quad (19)$$

A solução anterior é composta por dois termos, o primeiro

$$e^{-3t}\left(\frac{39}{34} \cos t + \frac{109}{34} \sin t\right)$$

fica bem próximo de zero para $t > 2$ e tende a zero quando $t \rightarrow \infty$ e por isso é chamado de *transiente* (ou *transitório*). O segundo termo

$$-\frac{5}{34} \cos 4t + \frac{10}{17} \sin 4t$$

é oscilatório e periódico, dito termo *estacionário*. Observe o gráfico a seguir que mostra a solução (19) do PVI (17) em preto e em vermelho o gráfico da parte estacionária da solução $x_p(t)$. Após um tempo $t = 2$, por exemplo, os dois gráficos são quase iguais, sendo portanto desprezível a ação do termo transiente.

□

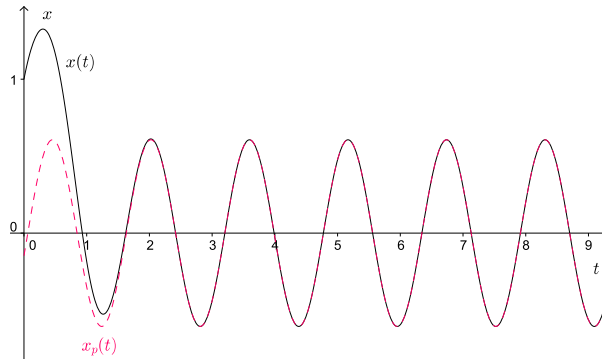


Figura 7: Gráfico da equação do movimento do exemplo 6 em preto e o gráfico da solução particular estacionária $x_p(t)$ em vermelho e pontilhado.

Exemplo 7

(Movimento forçado sem amortecimento) Resolva o PVI abaixo:

$$x'' + \omega^2 x = F_0 \sin \beta t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0, \quad (20)$$

onde F_0 é constante e $\omega \neq \beta$

Solução

A EDO homogênea associada a (20) possui como solução geral

$$x_h(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t.$$

Utilizando o método dos coeficientes a determinar da Aula 27, procuramos uma solução particular do tipo

$$x_p(t) = A \cos \beta t + B \sin \beta t, \quad (21)$$

pois $\omega \neq \beta$. Derivando (21) duas vezes e substituindo em (20), obtemos

$$A = 0 \text{ e } B = \frac{F_0}{\omega^2 - \beta^2}, \text{ donde}$$

$$x_p(t) = \frac{F_0}{\omega^2 - \beta^2} \sin \beta t.$$

Assim, a solução geral da EDO em (20) é

$$x(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t + \frac{F_0}{\omega^2 - \beta^2} \sin \beta t.$$

Impondo as condições iniciais, segue que a solução do PVI é

$$x(t) = \frac{F_0}{\omega(\omega^2 - \beta^2)} [\omega \sin \beta t - \beta \sin \omega t].$$

□

Exemplo 8

(Ressonância pura) Resolva a EDO em que a frequência de vibração livre do sistema ($\omega/2\pi$) é igual à frequência da força externa aplicada ($\beta/2\pi$).

$$x'' + \omega^2 x = F_0 \sin \omega t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0, \quad (22)$$

onde F_0 é constante.

Solução

A EDO homogênea associada a (22) possui como solução geral

$$x_h(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t.$$

Utilizando o método dos coeficientes a determinar da Aula 27, procuramos uma solução particular do tipo

$$x_p(t) = At \cos \omega t + Bt \sin \omega t, \quad (23)$$

Derivando (23) e substituindo em (22), obtemos $A = -\frac{F_0}{2\omega}$ e $B = 0$. Assim, a solução geral da EDO em (22) é igual a

$$x(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t - \frac{F_0}{2\omega} t \cos \omega t.$$

Utilizando as condições iniciais, obtemos $c_1 = 0$ e $c_2 = \frac{F_0}{2\omega^2}$. Logo, a solução do PVI é

$$x(t) = \frac{F_0}{2\omega^2} \sin \omega t - \frac{F_0}{2\omega} t \cos \omega t.$$

Neste caso, quando $t \rightarrow \infty$, temos que os deslocamentos da mola se tornam grandes, crescendo sem limite ($|x(2\pi/\omega)| \rightarrow \infty$). Tal fato caracteriza uma quebra do sistema mecânico, fenômeno conhecido como *ressonância pura*. Veja um gráfico típico desta situação a seguir. \square

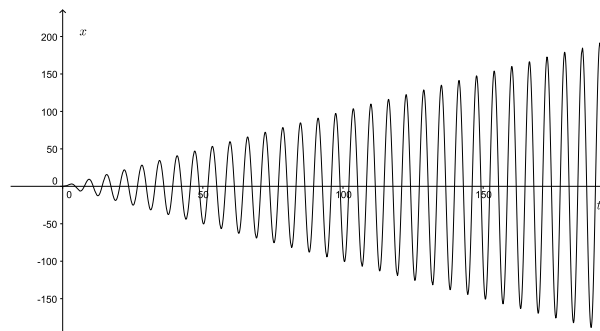


Figura 8: O gráfico mostra o estado do sistema do exemplo 8 em ressonância.

Observação 3

- Note que utilizando a Regra de L'Hospital, a solução do exemplo 8 é igual ao limite da solução do exemplo 7, quando $\beta \rightarrow \omega$. Esse processo de limite é análogo a sintonizar a frequência da força externa com a frequência de vibrações livres.
- Exemplos históricos de efeitos destrutivos causados pela ressonância são a queda de dois aviões nos Estados Unidos, entre 1959 e 1960, devido a oscilações descontroladas das asas, o que culminou com a perda das mesmas em pleno vôo. Também, soldados não passam marchando sobre pontes, para evitar qualquer possibilidade de ressonância. Para maiores informações, veja o capítulo 5 e o ensaio sobre “O colapso da ponte Tacoma Narrows” da referência [10].
- O fenômeno de ressonância nem sempre é destrutivo. Por exemplo, num circuito elétrico o fenômeno de ressonância é o que permite sintonizarmos o rádio na nossa estação preferida!

2 Exercícios de revisão

Interprete fisicamente cada problema nos itens de 1 a 3 e sua solução.

1. $x'' + 25x = 0$, $x(0) = -2$, $x'(0) = 10$.
2. $0,1x'' + 10x = 0$, $x(0) = x'(0) = 1$
3. $\frac{1}{16}x'' + 2x' + x = 0$, $x(0) = 0$, $x'(0) = -3/2$.
4. Uma massa de 125g é atada a uma mola de constante elástica igual a $2N/m$. O meio oferece uma resistência ao movimento do peso de módulo igual à velocidade instantânea. Se a massa parte de um ponto 0,5m acima da posição de equilíbrio com uma velocidade de $8m/s$ para baixo, determine o instante em que a massa passa pela primeira vez pela posição de equilíbrio. Determine o instante em que a massa atinge

seu deslocamento extremo em relação ao ponto de equilíbrio. Qual a posição da massa nesse instante?

5. Um peso de $312,5\text{g}$ é atado a uma mola cuja constante de elasticidade é igual a 5N/m . A massa está acoplada a um dispositivo de amortecimento que oferece uma resistência igual a $\beta > 0$ vezes a velocidade instantânea. Determine os valores da constante β que produzem um movimento a) superamortecido; b) subamortecido; c) criticamente amortecido.
6. Uma massa de 1kg é presa a uma mola que tem constante de elasticidade igual a 5N/m . A massa é solta 10cm abaixo da posição de equilíbrio com uma velocidade de 5cm/s para baixo. O meio em que o sistema está imerso oferece uma força de resistência numericamente igual ao dobro da velocidade instantânea.
- a) Encontre a equação de movimento se a massa sofre a ação de uma força externa igual a $f(t) = 12 \cos 2t + 3 \sin 2t$;
- b) Esboce os gráficos das soluções transiente e estacionária no mesmo eixo coordenado.
7. A equação $Lq'' + \frac{1}{C}q = 0$ descreve um sistema L-C (com indutor e capacitor), em que $q(t)$ é a carga no capacitor para $t > 0$. Sabendo que a corrente elétrica $i(t)$ é igual à derivada da carga no capacitor, determine a carga e a corrente no circuito. Suponha que inicialmente a carga é igual a 1 coulomb e não há corrente circulando no circuito.
8. Num pêndulo simples o deslocamento angular θ é descrito pela equação não linear

$$\theta'' + \frac{g}{l} \sin \theta = 0,$$

em que l é o comprimento da haste do pêndulo e g a aceleração da gravidade. Para pequenas oscilações pode-se aproximar o $\sin \theta$ por θ e considerar a EDO linear

$$\theta'' + \frac{g}{l} \theta = 0,$$

o que mostra que o pêndulo apresenta movimento harmônico simples. Resolva a EDO linear acima e mostre que o período de oscilação do pêndulo para pequenas oscilações é igual a $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

Bibliografia

[1.] Anton, Howard. Cálculo, um novo horizonte: Vol 1; Editora Bookman, 6^a edição, 2000.

[2.] Boyce, William E. e DiPrima, Richard C. Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valor de Contorno, Editora LTC, 6^a edição, 1998.

[3.] Braun, Martin. Differential Equations and their Aplications, Editora Springer-Verlag, 4 th. edition, 1993.

[4.] Figueiredo, Djairo Guedes de, Neves, A. Freiria. Equações Diferenciais Aplicadas, Coleção Projeto Euclides, IMPA, 1997.

[5.] Guidorizzi, H.L., Um Curso de Cálculo, vol.1 e vol.2, Editora Ao Livro Técnico S.A., 1986.

[6.] Leithold L., Cálculo com Geometria Analítica, Vol. 1, Editora Harbra, 3^a edição, 1994.

[7.] Stewart, James; Cálculo; Vol. 1; Editora Pioneira Thomson Learning, 4^a edição, 2001.

[8.] Thomas, Georges Brinton; Finney, Ross L.; Weir, Maurice D.; Giordano, Frank R. Cálculo, Vol. 1, Editora Addison Wesley, 10^a edição, 2002.

[9.] Zill, Dennis G., Equações Diferenciais com Aplicações em Modelagem, Editora Cengage Learning, edição 2011.

[10.] Zill, Dennis G. Cullen, Equações Diferenciais, Vol. 1, Editora Makrow Books, 3^a edição, 2005.