



Cálculo III-A – Módulo 1

Prezado aluno,

Seja bem-vindo à nossa disciplina. Este texto possui - salvo algumas modificações - o mesmo conteúdo do material preparado pela professora Rioco para o curso de Cálculo IV do Cederj.

Boa sorte!

Rioco K. Barreto e M. Lucia S. Menezes

Coordenadoras de Cálculo III-A

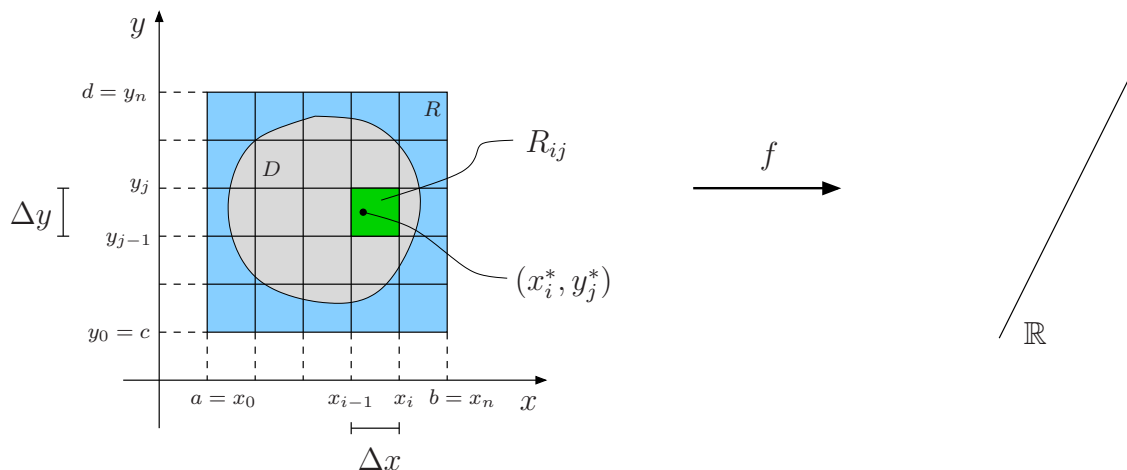
Aula 1 – Integrais Duplas

Objetivos

- Compreender a noção de integral dupla;
- Estudar algumas de suas propriedades;
- Estudar o Teorema de Fubini para retângulos.

Em Cálculo II-A, você aprendeu as integrais definidas. Agora, em Cálculo III-A, pretendemos que você compreenda as integrais duplas e triplas de funções de duas ou três variáveis.

Então consideremos uma função $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, onde D é um conjunto fechado e limitado (também conhecido como conjunto compacto). Como D é limitado, então existe um retângulo $R = [a, b] \times [c, d]$, tal que $D \subset R$.



Vamos dividir o retângulo R em subretângulos R_{ij} da seguinte maneira: dividimos os intervalos $[a, b]$ e $[c, d]$ em n subintervalos de mesmo comprimento $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ e $\Delta y = \frac{d-c}{n}$, respectivamente;

traçamos retas verticais e horizontais pelas extremidades desses subintervalos. Vamos escolher $(x_i^*, y_j^*) \in R_{ij}$, para formarmos a soma

$$S_n = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n f(x_i^*, y_j^*) \Delta x \Delta y = \sum_{i,j=1}^n f(x_i^*, y_j^*) \Delta A$$

onde $f(x_i^*, y_j^*) = 0$ se $(x_i^*, y_j^*) \notin D$.

Esta soma é dita *soma de Riemann de f* . Se existir o $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = L$, dizemos que f é integrável e que o número L é dito integral de f sobre D e é indicado por $\iint_D f(x, y) dx dy$ ou $\iint_D f(x, y) dA$

ou $\iint_D f dA$. Assim,

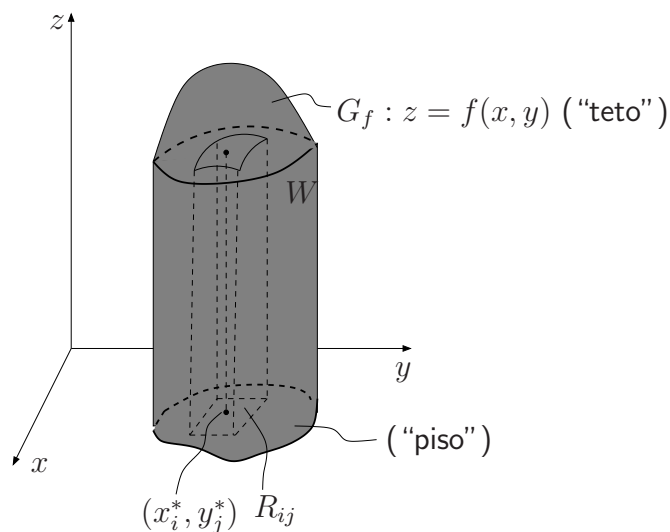
$$\iint_D f(x, y) dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i,j=1}^n f(x_i^*, y_j^*) \Delta x \Delta y.$$

OBS.:

1. Prova-se que se f é contínua em D , então f é integrável.
2. Se $f(x, y) \geq 0$ é contínua em D , então o gráfico de f (G_f) está acima do plano xy . Então o volume do sólido W que está abaixo de G_f e acima de D é dado por

$$V(W) = \iint_D f(x, y) dx dy.$$

Logo, para encontrar o volume do sólido W , integramos $f(x, y)$ (o "teto") sobre D (o "piso").



3. Se $f(x, y) = 1$ em D então

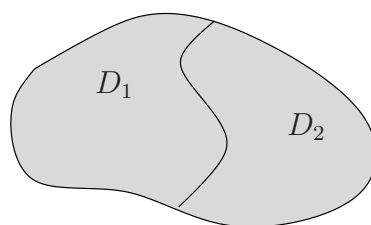
$$\iint_D 1 \, dx dy = \iint_D dx dy = A(D) = \text{área de } D.$$

4. Propriedades

$$(i) \iint_D (f + g) \, dA = \iint_D f \, dA + \iint_D g \, dA$$

$$(ii) \iint_D k f \, dA = k \iint_D f \, dA, \quad k \in \mathbb{R}$$

$$(iii) D = D_1 \cup D_2 \Rightarrow \iint_D f \, dA = \iint_{D_1} f \, dA + \iint_{D_2} f \, dA$$



Um Método Prático para Calcular Integrais Duplas

Teorema de Fubini: Se $f(x, y)$ é contínua no retângulo $D = [a, b] \times [c, d]$, então

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) \, dy \right] dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) \, dx \right] dy$$

ou

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy = \underbrace{\int_a^b \int_c^d f(x, y) \, dy dx}_{\text{integrais iteradas ou repetidas}} = \int_c^d \int_a^b f(x, y) \, dx dy$$

Exemplo 1

Calcule $\iint_D xy^2 \, dx dy$, sendo $D = [0, 1] \times [-1, 0]$.

Solução:

Temos

$$\iint_D xy^2 dx dy = \int_0^1 \int_{-1}^0 xy^2 dy dx.$$

Primeiro, calculamos a integral interna. Logo,

$$\iint_D xy^2 dx dy = \int_0^1 x \left[\frac{y^3}{3} \right]_{-1}^0 = \frac{1}{3} \int_0^1 x [0 - (-1)] dx = \frac{1}{3} \int_0^1 x dx = \frac{1}{3} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{6}.$$

Aula 2 – Cálculo de Integrais Duplas em Regiões mais Gerais

Objetivos

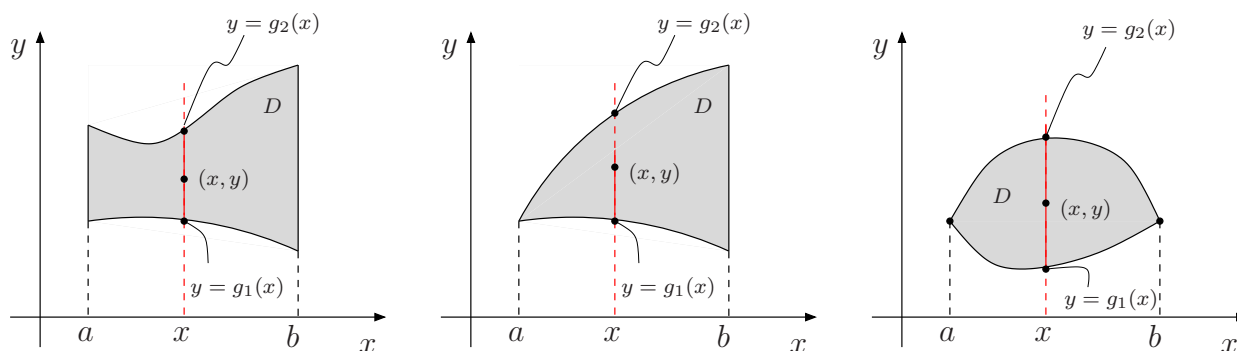
- Estudar uma versão mais geral do Teorema de Fubini;
- Calcular área e volume.

Suponhamos agora, que D seja diferente do retângulo $[a, b] \times [c, d]$. Então vamos definir dois tipos de região.

Definição 1

Dizemos que D é uma *região do tipo I* ou uma *região simples vertical* se D for limitada à esquerda pela reta vertical $x = a$, à direita pela reta vertical $x = b$, inferiormente pela curva de equação $y = g_1(x)$ e superiormente pela curva $y = g_2(x)$, onde g_1 e g_2 são contínuas.

As figuras que se seguem ilustram regiões do tipo I.



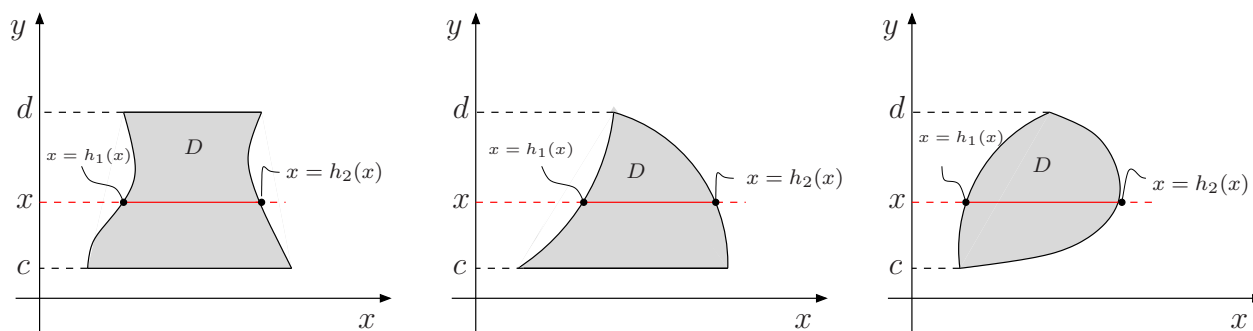
Logo, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; a \leq x \leq b \text{ e } g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$. Prova-se que:

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) \, dy dx .$$

Definição 2

Dizemos que D é uma *região do tipo II* ou uma *região simples horizontal*, se D for limitada inferiormente e superiormente pelas retas horizontais $y = c$ e $y = d$, respectivamente, à esquerda pela curva $x = h_1(y)$ e à direita pela curva $x = h_2(y)$, onde h_1 e h_2 são contínuas.

As figuras que se seguem ilustram regiões do tipo II:



Logo, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; c \leq y \leq d \text{ e } h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$. Prova-se que:

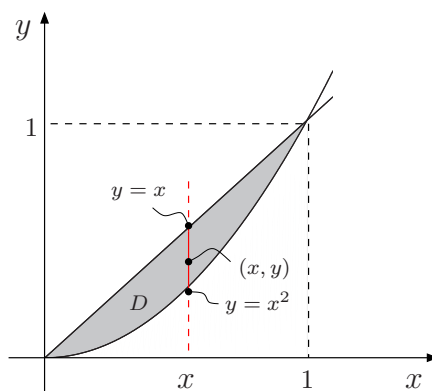
$$\iint_D f(x, y) \, dx dy = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) \, dx dy .$$

Exemplo 1

Calcule por meio dos dois métodos a integral de $f(x, y) = xy$ sobre a região D limitada pelas curvas $y = x$ e $y = x^2$.

Solução:

As curvas se interceptam quando $x^2 = x$ ou $x(x - 1) = 0$. Então $x = 0$ ou $x = 1$. Assim, os pontos de interseção são $(0, 0)$ e $(1, 1)$. Logo, o esboço de D é:

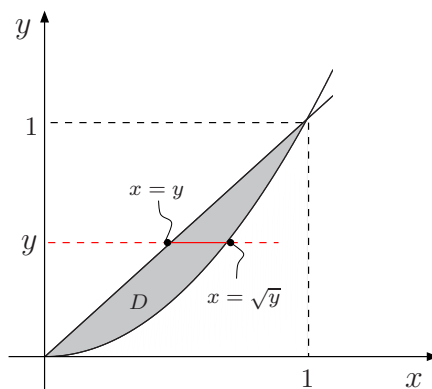


Método 1

Enquadrando D como tipo I, temos $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 1 \text{ e } x^2 \leq y \leq x\}$. Então:

$$\begin{aligned} \iint_D xy \, dx \, dy &= \int_0^1 \int_{x^2}^x xy \, dy \, dx = \int_0^1 x \left[\frac{y^2}{2} \right]_{x^2}^x dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x(x^2 - x^4) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (x^3 - x^5) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{6} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{6} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right) \\ &= \frac{1}{24}. \end{aligned}$$

Método 2



Enquadrando D como tipo II, temos $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq y \leq 1 \text{ e } y \leq x \leq \sqrt{y}\}$. Então,

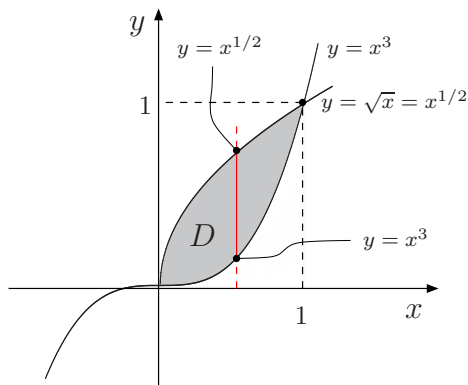
$$\begin{aligned} \iint_D xy \, dx \, dy &= \int_0^1 \int_y^{\sqrt{y}} xy \, dx \, dy = \int_0^1 y \left[\frac{x^2}{2} \right]_y^{\sqrt{y}} dy = \frac{1}{2} \int_0^1 y(y - y^2) dy = \frac{1}{2} \int_0^1 (y^2 - y^3) dy \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) \\ &= \frac{1}{24}. \end{aligned}$$

Exemplo 2

Calcule, por meio de integral dupla, a área da região plana D limitada pelas curvas $y = x^3$ e $y = \sqrt{x}$.

Solução:

O esboço de D é:



Podemos descrever D por

$$D : \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ x^3 \leq y \leq x^{1/2} \end{cases}$$

Então,

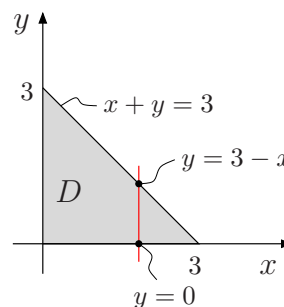
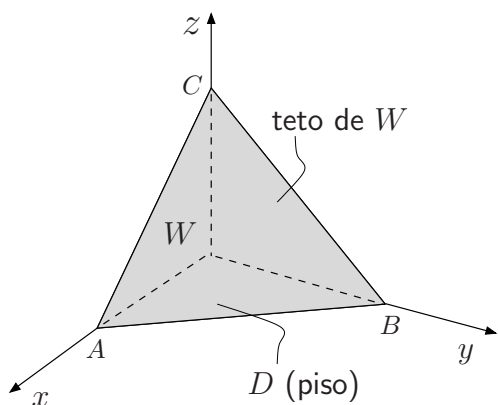
$$A(D) = \iint_D dx dy = \int_0^1 \int_{x^3}^{x^{1/2}} dy dx = \int_0^1 (x^{1/2} - x^3) dx = \left[\frac{2}{3} x^{3/2} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{5}{12} \text{ u.a.}$$

Exemplo 3

Calcule o volume do tetraedo W com faces nos planos coordenados e no plano $x + y + z = 3$.

Solução:

O plano $x + y + z = 3$ passa pelos pontos $A = (3, 0, 0)$, $B = (0, 3, 0)$ e $C = (0, 0, 3)$. Assim, o esboço de W é:



Observemos que o teto de W é a porção do plano $x + y + z = 3$ ou $z = 3 - x - y = f(x, y)$ e que o piso de W é o triângulo D . Então,

$$\begin{aligned}
 V(W) &= \iint_D f(x, y) \, dx \, dy \\
 &= \iint_D (3 - x - y) \, dx \, dy \\
 &= \int_0^3 \int_0^{3-x} (3 - x - y) \, dy \, dx \\
 &= \int_0^3 \left[3y - xy - \frac{y^2}{2} \right]_0^{3-x} \, dx \\
 &= \int_0^3 \left[3(3-x) - x(3-x) - \frac{(3-x)^2}{2} \right] \, dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^3 (9 - 6x + x^2) \, dx \\
 &= \frac{1}{2} \left[9x - 3x^2 + \frac{x^3}{3} \right]_0^3 \\
 &= \frac{9}{2} \text{ u.v.}
 \end{aligned}$$

Exercício 1: Calcule as integrais iteradas:

$$\text{a) } \int_1^2 \int_1^2 ye^{xy} \, dx \, dy \qquad \text{b) } \int_1^2 \int_1^x \frac{x^2}{y^2} \, dy \, dx$$

Exercício 2: Esboce a região de integração e calcule as integrais:

$$\text{a) } \iint_D xy^3 \, dx \, dy, \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2x\};$$

b) $\iint_D f(x, y) \, dx dy$, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; |x| \leq \pi/2, 0 \leq y \leq \cos x\}$, $f(x, y) = y \operatorname{sen} x$.

Exercício 3: Esboce a região de integração e inverta a ordem das integrais iteradas em:

a) $\int_0^1 \int_0^y f(x, y) \, dx dy$ c) $\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) \, dy dx$

b) $\int_0^1 \int_y^{\sqrt{y}} f(x, y) \, dx dy$ d) $\int_0^1 \int_x^{3x} f(x, y) \, dy dx$

Exercício 4: Calcule $\int_0^1 \int_{2y}^2 4e^{x^2} \, dx dy$.

Exercício 5: Calcule $\int_1^5 \int_x^5 \frac{y}{x \ln y} \, dy dx$.

Exercício 6: Use a integral dupla para calcular a área da região D limitada pelas curvas $y = 4x - x^2$ e $y = x$.

Exercício 7: Encontre o volume do sólido W limitado pelos planos $y = 0$, $z = 0$, $y = 4$ e pelo cilindro parabólico $z = 4 - x^2$.

Exercício 8: Encontre o volume do sólido W limitado pelas superfícies $z = 1 - y^2$, $z \geq 0$, $x = 0$, $z = 0$ e $x - y = 2$.

Cálculo IV – EP2

Aula 3 – Mudança de Variáveis na Integral Dupla

Objetivo

- Aprender a fazer mudança de variáveis em integrais duplas.

No Cálculo II, você aprendeu a fórmula da mudança de variável para uma função de uma variável:

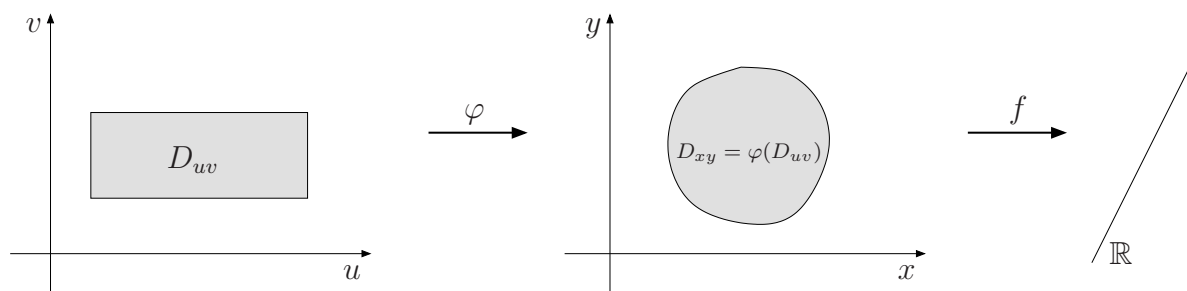
$$\int_a^b f(x) dx = \int_c^d f(g(u)) g'(u) du.$$

Para as integrais duplas, temos uma fórmula análoga.

Uma mudança de variáveis num subconjunto do \mathbb{R}^2 é dada por uma transformação

$$\begin{aligned} \varphi : D_{uv} \subset \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (u, v) &\longmapsto (x, y) = \varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v)) \end{aligned}$$

de classe C^1 e injetora no interior de D_{uv} .



Suponhamos que o jacobiano de φ , $J\varphi(u, v)$, seja diferente de 0, isto é,

$$J = J\varphi(u, v) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Prova-se que $dx dy = |J| du dv$.

Seja $D_{xy} = \varphi(D_{uv})$. Então se $f(x, y)$ é contínua em D_{xy} , temos:

$$\iint_{D_{xy}} f(x, y) dx dy = \iint_{D_{uv}} f(x(u, v), y(u, v)) |J| du dv.$$



OBS.: Pelo teorema da função inversa, o jacobiano de φ^{-1} é dado por

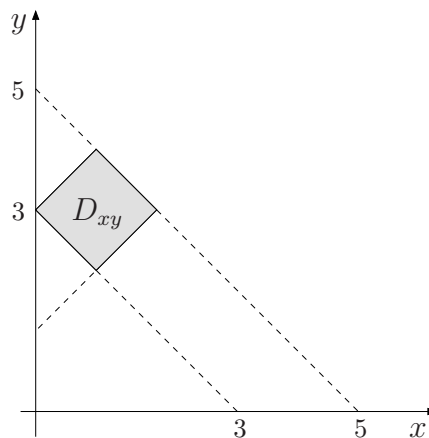
$$J\varphi^{-1}(x, y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = (J\varphi(u, v))^{-1} = \frac{1}{J(\varphi(u, v))}.$$

Exemplo 1

Calcule, utilizando uma mudança de variáveis conveniente, a integral $\iint_{D_{xy}} \frac{(x+y)^6}{y-x} dx dy$, sendo D_{xy} a região limitada pelas retas $y+x=3$, $y+x=5$, $y-x=1$ e $y-x=3$.

Solução:

O esboço de D_{xy} é:



Façamos $u = x + y$, $v = y - x$, que nos dá

$$\begin{cases} u + v = 2y \\ u - v = 2x \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = \frac{u-v}{2} \\ y = \frac{u+v}{2} \end{cases}$$

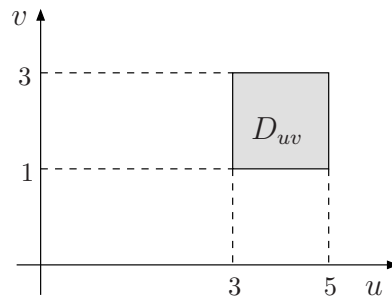
Temos:

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Como $dx dy = |J| du dv$, temos $dx dy = \frac{1}{2} du dv$.

A seguir, vamos determinar D_{uv} .

Como D_{xy} é limitado por $y+x=3$, $y+x=5$, $y-x=1$ e $y-x=3$, então D_{uv} é limitado por $u=3$, $u=5$, $v=1$ e $v=3$.



Segue da fórmula da mudança de variáveis que:

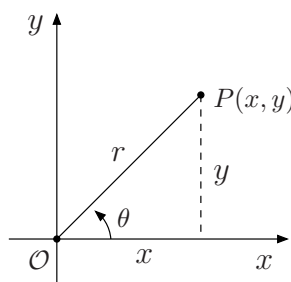
$$\begin{aligned}
 \iint_{D_{xy}} \frac{(x+y)^6}{y-x} dx dy &= \iint_{D_{uv}} \frac{u^6}{v} \cdot \frac{1}{2} du dv = \frac{1}{2} \iint_{D_{uv}} \frac{u^6}{v} du dv \\
 &= \frac{1}{2} \int_3^5 u^6 \int_1^3 \frac{1}{v} dv du \\
 &= \frac{1}{2} \int_3^5 u^6 [\ln v]_1^3 du \\
 &= \frac{\ln 3}{2} \int_3^5 u^6 du \\
 &= \frac{\ln 3}{2} \left[\frac{u^7}{7} \right]_3^5 \\
 &= (5^7 - 3^7) \frac{\ln 3}{14}.
 \end{aligned}$$

Aula 4 – Integrais Duplas em Coordenadas Polares

Objetivo

- Estudar uma mudança de variáveis bastante usada: coordenadas polares.

No Cálculo II, você aprendeu coordenadas polares (r, θ) , onde r é a distância de um ponto $P = (x, y)$ à origem e θ é o ângulo (em radianos) formado pelo eixo x positivo e o raio polar OP .



Da figura, vemos que $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ donde $x^2 + y^2 = r^2$.

Então consideremos a mudança de variáveis dada por

$$\varphi : \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

onde $r \geq 0$ e $\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0 + 2\pi$, para algum $\theta_0 \in \mathbb{R}$.

O jacobiano de φ é dado por

$$J = J_\varphi = \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta = r.$$

Então

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy = \iint_{D_{r\theta}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r \, dr d\theta.$$

OBS.:

1. O termo $dx dy$ não é substituído por $dr d\theta$, mas por $r dr d\theta$.
2. A área de D em coordenadas polares é dada por

$$A(D) = \iint_{D_{r\theta}} r \, dr d\theta.$$

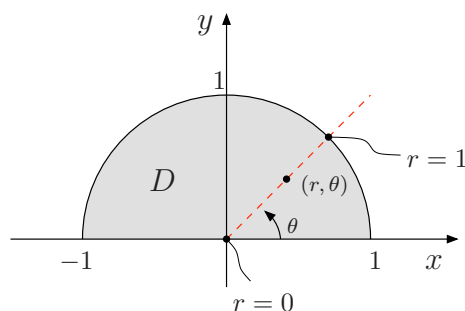


Exemplo 1

Calcule $\iint_D e^{x^2+y^2} \, dx dy$, onde D é a região limitada pela curva $y = \sqrt{1-x^2}$ e o eixo x .

Solução:

O esboço de D é:



Passando para coordenadas polares, temos:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ dx dy = r dr d\theta \\ x^2 + y^2 = r^2 \end{cases}$$

Observemos que em D o ângulo θ varia de 0 (no eixo polar = eixo x positivo) a π (no ponto $(-1, 0)$). Fixado θ , tal que $0 \leq \theta \leq \pi$, o raio polar r varia de 0 a 1. Então, $D_{r\theta}$ é dado por:

$$D_{r\theta} : \begin{cases} 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq r \leq 1 \end{cases} .$$

Logo,

$$\iint_D e^{x^2+y^2} dx dy = \iint_{D_{r\theta}} e^{r^2} r dr d\theta = \int_0^1 \int_0^\pi e^{r^2} r d\theta dr = \pi \int_0^1 e^{r^2} r dr .$$

Temos $d(r^2) = 2r dr$, donde $r dr = \frac{1}{2}d(r^2)$. Então,

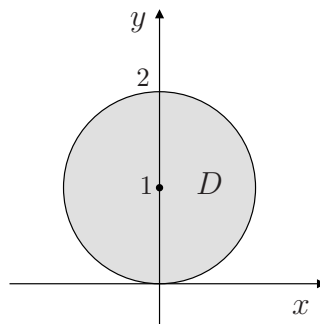
$$\iint_D e^{x^2+y^2} dx dy = \frac{\pi}{2} \int_0^1 e^{r^2} d(r^2) = \frac{\pi}{2} [e^{r^2}]_0^1 = \frac{\pi}{2}(e - 1) .$$

Exemplo 2

Calcule $I = \iint_D y dx dy$, onde D é limitado por $x^2 + y^2 = 2y$.

Solução:

Completando quadrado em $x^2 + y^2 = 2y$, temos $x^2 + (y - 1)^2 = 1$. Logo, temos uma circunferência de centro $(0, 1)$ e raio 1. Assim, o esboço de D é:



Calcular I , enquadrando D como tipo I ou tipo II, é uma tarefa difícil (verifique), então passemos para coordenadas polares. Temos:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ dx dy = r dr d\theta \\ x^2 + y^2 = r^2 \end{cases}$$

Passando $x^2 + y^2 = 2y$ para coordenadas polares, temos $r^2 = 2r \sin \theta$ ou $r = 2 \sin \theta$. Observemos que como o eixo x é tangente à circunferência na origem, então θ varia de 0 a π . Fixando θ , tal que $0 \leq \theta \leq \pi$, o raio polar r varia de 0 a $2 \sin \theta$. Logo, o conjunto $D_{r\theta}$ é dado por

$$D_{r\theta} : \begin{cases} 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq r \leq 2 \sin \theta \end{cases}$$

Então,

$$\begin{aligned}
 I &= \iint_{D_{r\theta}} r \operatorname{sen} \theta \cdot r \, dr d\theta \\
 &= \iint_{D_{r\theta}} r^2 \operatorname{sen} \theta \, dr d\theta \\
 &= \int_0^\pi \operatorname{sen} \theta \int_0^{2 \operatorname{sen} \theta} r^2 \, dr d\theta \\
 &= \int_0^\pi \operatorname{sen} \theta \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^{2 \operatorname{sen} \theta} d\theta \\
 &= \frac{8}{3} \int_0^\pi \operatorname{sen}^4 \theta \, d\theta.
 \end{aligned}$$

Vale a pena lembrar que

$$\begin{cases} \operatorname{sen}^4 \theta = (\operatorname{sen}^2 \theta)^2 = \left(\frac{1 - \cos 2\theta}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} (1 - 2 \cos 2\theta + \cos^2 2\theta) \\ \int \cos^2 u \, du = \frac{1}{2} \left(u + \frac{\operatorname{sen} 2u}{2} \right) + C \end{cases}$$

Então,

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{2}{3} \int_0^\pi (1 - 2 \cos 2\theta + \cos^2 2\theta) \, d\theta \\
 &= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \int_0^\pi (1 - 2 \cos 2\theta + \cos^2 2\theta) \, d(2\theta) \\
 &= \frac{1}{3} \left[2\theta - 2 \operatorname{sen} 2\theta + \frac{1}{2} \left(2\theta + \frac{\operatorname{sen} 4\theta}{2} \right) \right]_0^\pi \\
 &= \frac{1}{3} \left[3\theta - 2 \operatorname{sen} 2\theta + \frac{\operatorname{sen} 4\theta}{4} \right]_0^\pi \\
 &= \pi.
 \end{aligned}$$

Até a próxima semana.

Rioco K. Barreto

Coordenadora de Cálculo IV

Exercício 1: Calcule $\iint_D \frac{x-y}{x+y} \, dA$ onde D é a região compreendida pelas retas $x-y=0$, $x-y=1$, $x+y=1$ e $x+y=3$.

Exercício 2: Use a transformação $u = \frac{y}{x}$ e $v = xy$ para determinar $\iint_D xy^3 \, dA$ da região D do primeiro quadrante, limitada por $y=x$, $y=3x$, $xy=1$ e $xy=4$.

Exercício 3: Calcule a integral dupla $\iint_D e^{-(x^2+y^2)} \, dA$ onde D é a região contida na circunferência $x^2 + y^2 = 1$.

Exercício 4: Calcule $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$ onde D é o disco centrado fora da origem, dado pela desigualdade $x^2 + y^2 \leq 2y$ ou $x^2 + (y - 1)^2 \leq 1$.

Exercício 5: Calcule $\iint_D \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} dA$ onde D é a região no primeiro quadrante fora da circunferência $r = 2$ e dentro do cardióide $r = 2(1 + \cos \theta)$.

Exercício 6: Calcule as integrais transformando-as em coordenadas polares.

$$\text{a) } \int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x^2 + y^2)^{3/2} dy dx \quad \text{b) } \int_0^3 \int_x^{\sqrt{18-x^2}} \text{sen}(x^2 + y^2 + 1) dy dx$$

Exercício 7: Determine o volume do sólido W limitado pelo parabolóide $z = 4 - x^2 - y^2$ e pelo plano xy .

Exercício 8: Determine o volume do sólido W no interior da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ e do cilindro $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ e acima do plano $z = 0$.

Cálculo IV – EP3

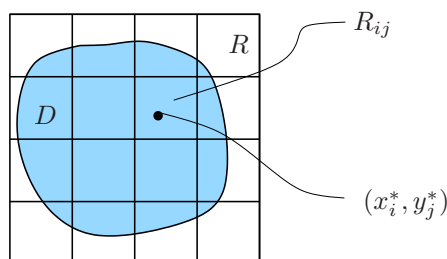
Aula 5 – Aplicações da Integrais Duplas

Objetivo

- Estudar algumas aplicações físicas como massa, centro de massa e momento de inércia.

1. Massa

Seja $D \subset \mathbb{R}^2$, uma região compacta, representando uma lâmina plana delgada. Suponhamos que a função contínua e positiva $\delta : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ representa a densidade superficial de massa (massa por unidade de área).



Considerando-se n^2 subretângulos R_{ij} de algum retângulo R que contém D e uma escolha $(x_i^*, y_j^*) \in R_{ij}$, observamos que a soma

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \delta(x_i^*, y_j^*) \Delta A$$

é uma aproximação da massa M de D , onde $\delta(x_i^*, y_j^*) = 0$ se $(x_i^*, y_j^*) \notin D$. Logo, é razoável definir a massa M de D com

$$M = \iint_D \delta(x, y) \, dx \, dy.$$



OBS.: Se $\delta(x, y)$ for constante e igual a k , então a massa M será igual a $kA(D)$. Neste caso, dizemos que a lâmina D é homogênea.

2. Centro de Massa

a) Seja um sistema finito de partículas $P_1 = (x_1, y_1), P_2 = (x_2, y_2), \dots, P_n = (x_n, y_n)$, com massas $m_i, i = 1, \dots, n$, respectivamente. Lembrando da Física que os momentos de massa desse sistema, em relação aos eixos x e y , são definidos por:

$$M_x = \sum_{i=1}^n m_i y_i \quad \text{e} \quad M_y = \sum_{i=1}^n m_i x_i.$$

O centro de massa do sistema é o ponto (\bar{x}, \bar{y}) que se comporta como se a massa total $M = \sum_{i=1}^n m_i$ do sistema estivesse concentrada nesse ponto. Logo,

$$M\bar{x} = M_y \quad \text{e} \quad M\bar{y} = M_x$$

ou

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \quad \text{e} \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{\sum_{i=1}^n m_i}.$$

b) Se considerarmos no lugar de um sistema finito de partículas, uma lâmina plana D com densidade superficial de massa dada por uma função contínua e positiva $\delta(x, y)$, fazemos uma partição de algum retângulo R contendo D , obtendo subretângulos R_{ij} . Escolhemos $(x_i^*, y_j^*) \in R_{ij}$. Logo, a massa de R_{ij} pode ser aproximada por $\delta(x_i^*, y_j^*) \Delta A$, onde $\delta(x_i^*, y_j^*) = 0$ se $(x_i^*, y_j^*) \notin D$. Então

$$M_x \simeq \sum_{i,j=1}^n y_j^* \delta(x_i^*, y_j^*) \Delta A \quad \text{e} \quad M_y \simeq \sum_{i,j=1}^n x_i^* \delta(x_i^*, y_j^*) \Delta A.$$

Logo, definimos M_x e M_y por

$$M_x = \iint_D y \delta(x, y) \, dA \quad \text{e} \quad M_y = \iint_D x \delta(x, y) \, dA.$$

O centro de massa (\bar{x}, \bar{y}) da lâmina D é definido por

$$\bar{x} = \frac{\iint_D x \delta(x, y) \, dA}{M} \quad \text{e} \quad \bar{y} = \frac{\iint_D y \delta(x, y) \, dA}{M}.$$

OBS.: Se $\delta(x, y) = k$, k constante, o ponto (\bar{x}, \bar{y}) é dito centróide e temos as seguintes fórmulas

$$\bar{x} = \frac{\iint_D x \, dx dy}{\iint_D dx dy} \quad \text{e} \quad \bar{y} = \frac{\iint_D y \, dx dy}{\iint_D dx dy}.$$



3. Momento de Inércia

O momento de inércia de uma lâmina D em relação a um eixo E é dado por

$$I_E = \iint_D r^2(x, y) \delta(x, y) \, dx dy$$

onde $r(x, y)$ é a distância de (x, y) ao eixo E .

Assim, os momentos de inércia de D em relação aos eixos x e y , respectivamente, são dados por

$$I_x = \iint_D y^2 \delta(x, y) \, dx dy \quad \text{e} \quad I_y = \iint_D x^2 \delta(x, y) \, dx dy.$$

O momento de inércia polar em relação à origem é dado por

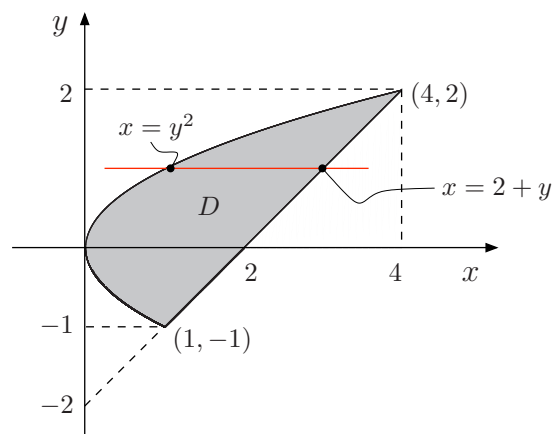
$$I_0 = \iint_D (x^2 + y^2) \delta(x, y) \, dx dy = I_x + I_y.$$

Exemplo 1

Determine o centro de massa e o momento de inércia em relação ao eixo x , da região D limitada por $x = y^2$ e $x - y = 2$, sendo $\delta(x, y) = 3$.

Solução:

As curvas se interceptam quando $y^2 - y - 2 = 0$, logo $y = -1$, $y = 2$. Assim, o esboço de D é:



Descrevemos D como tipo II : $D = \{(x, y) \mid -1 \leq y \leq 2, y^2 \leq x \leq 2 + y\}$. A massa de D é:

$$\begin{aligned} M &= \iint_D \delta(x, y) \, dA = \iint_D 3 \, dA = 3 \int_{-1}^2 \int_{y^2}^{2+y} dx dy = 3 \int_{-1}^2 (2 + y - y^2) dy \\ &= 3 \left[2y + \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right]_{-1}^2 \\ &= 3 \left[\left(4 + 2 - \frac{8}{3} \right) - \left(-2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) \right] \\ &= \frac{27}{2}. \end{aligned}$$

O centro de massa (\bar{x}, \bar{y}) é dado por

$$\bar{x} = \frac{\iint_D x \delta(x, y) dA}{M}, \quad \bar{y} = \frac{\iint_D y \delta(x, y) dA}{M}.$$

Cálculo de $\iint_D x \delta(x, y) dA$:

$$\begin{aligned} \iint_D x \delta(x, y) dA &= 3 \int_{-1}^2 \int_{y^2}^{2+y} x dx dy = 3 \int_{-1}^2 \left[\frac{x^2}{2} \right]_{y^2}^{2+y} dy = \frac{3}{2} \int_{-1}^2 (4 + 4y + y^2 - y^4) dy \\ &= \frac{3}{2} \left[4y + 2y^2 + \frac{y^3}{3} - \frac{y^5}{5} \right]_{-1}^2 \\ &= \frac{3}{2} \left[\left(8 + 8 + \frac{8}{3} - \frac{32}{5} \right) - \left(-4 + 2 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \right) \right] \\ &= \frac{3}{2} \times \frac{72}{5} = \frac{108}{5}. \end{aligned}$$

Cálculo de $\iint_D y \delta(x, y) dA$:

$$\begin{aligned} \iint_D y \delta(x, y) dA &= 3 \int_{-1}^2 \int_{y^2}^{2+y} y dx dy = 3 \int_{-1}^2 y (2 + y - y^2) dy = 3 \int_{-1}^2 (2y + y^2 - y^3) dy \\ &= 3 \left[y^2 + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} \right]_{-1}^2 \\ &= 3 \left[\left(4 + \frac{8}{3} - 4 \right) - \left(1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) \right] \\ &= \frac{27}{4}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\bar{x} = \frac{\frac{108}{5}}{\frac{27}{2}} = \frac{8}{5}, \quad \bar{y} = \frac{\frac{27}{4}}{\frac{27}{2}} = \frac{1}{2}.$$

Assim, o centro de massa (\bar{x}, \bar{y}) está localizado em $(\frac{8}{5}, \frac{1}{2})$.

O momento de inércia em relação ao eixo x é:

$$\begin{aligned} I_x &= \iint_D y^2 \delta(x, y) dA = 3 \iint_D y^2 dA = 3 \int_{-1}^2 \int_{y^2}^{2+y} y^2 dx dy = 3 \int_{-1}^2 y^2 (2 + y - y^2) dy \\ &= 3 \int_{-1}^2 (2y^2 + y^3 - y^4) dy \\ &= 3 \left[\frac{2y^3}{3} + \frac{y^4}{4} - \frac{y^5}{5} \right]_{-1}^2 \\ &= 3 \left[\left(\frac{16}{3} + 4 - \frac{32}{5} \right) - \left(-\frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \right) \right] \\ &= \frac{189}{20}. \end{aligned}$$

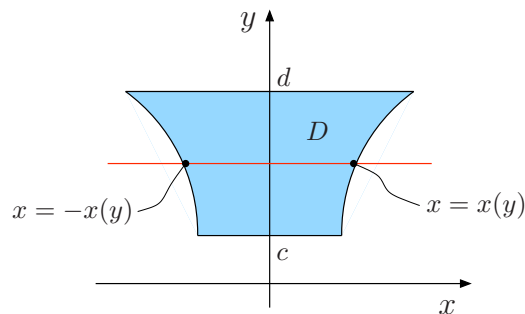
Aula 6 – Simetria em Integral Dupla

Objetivo

- Explorar simetrias em integrais duplas.

Simetria em Integral Dupla

1) Seja $D \subset \mathbb{R}^2$, simétrica em relação ao eixo y e $f(x, y)$ ímpar na variável x , isto é, $f(-x, y) = -f(x, y)$. Então, $\iint_D f(x, y) dx dy = 0$. Com efeito, como D tem simetria em relação ao eixo y , observamos que D está limitada à direita pela curva $x = x(y)$ e à esquerda pela curva $x = -x(y)$. Supondo que a projeção de D sobre o eixo y seja o intervalo $[c, d]$, temos o seguinte esboço para D :



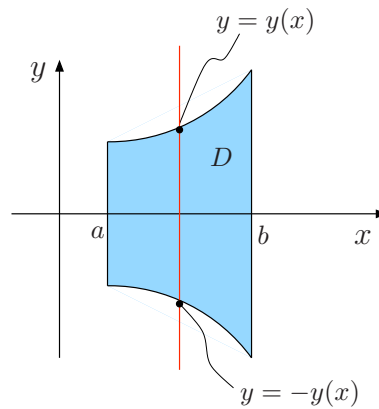
Então,

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d \underbrace{\left[\int_{-x(y)}^{x(y)} f(x, y) dx \right]}_{= 0 (*)} dy = \int_c^d 0 dy = 0.$$

(*) Aqui, usamos um fato do Cálculo II:

$$\int_{-a}^a g(x) dx = 0 \text{ se } g(x) \text{ é uma função ímpar.}$$

2) Analogamente, se D tem simetria em relação ao eixo x e $f(x, y)$ é ímpar na variável y , então $\iint_D f(x, y) dx dy = 0$. Veja o esboço para D na figura a seguir.



Exemplo 1

Calcule

$$I = \iint_D (xy^6 + (x^4 + y^4) \operatorname{sen} y + 1) \, dx dy,$$

onde D é o disco $x^2 + y^2 \leq a^2$, ($a > 0$).

Solução:

Por propriedade, temos que

$$I = \underbrace{\iint_D xy^6 \, dx dy}_{I_1} + \underbrace{\iint_D (x^4 + y^4) \operatorname{sen} y \, dx dy}_{I_2} + \underbrace{\iint_D dx dy}_{I_3}.$$

- Como $f(x, y) = xy^6$ é ímpar na variável x e D tem simetria em relação ao eixo y , então $I_1 = 0$.
- Como $g(x, y) = (x^4 + y^4) \operatorname{sen} y$ é ímpar na variável y e D tem simetria em relação ao eixo x , então $I_2 = 0$.
- Como $\iint_D dx dy = A(D)$, então $I_3 = \pi a^2$. Logo,

$$I = 0 + 0 + \pi a^2 = \pi a^2.$$

RECOMENDAÇÃO

Nas integrais duplas, busque as simetrias e as funções ímpares. Não calcule cegamente!!!

OBS.:

1. Se a densidade $\delta(x, y)$ é uma função par na variável x (isto é, $\delta(-x, y) = \delta(x, y)$), então $x\delta(x, y)$ é ímpar na variável x . Se D tem simetria em relação ao eixo y , então $\iint_D x\delta(x, y) dx dy = 0$ e portanto, $\bar{x} = 0$.

Analogamente, se $\delta(x, y)$ é uma função par na variável y e se D tem simetria em relação ao eixo x , então $\bar{y} = 0$.

2. Se D é uma lâmina homogênea e tem simetria em relação ao eixo y , então $\bar{x} = 0$.

Analogamente, se D é homogênea e tem simetria em relação ao eixo x , então $\bar{y} = 0$.



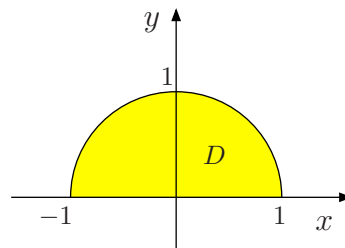
Exemplo 2

Uma lâmina delgada D ocupa a região $x^2 + y^2 \leq 1$, $y \geq 0$, de modo que a densidade em qualquer ponto é proporcional à distância do ponto à origem. Determine

- a) a massa M de D
- b) o centro de massa

Solução:

O esboço de D é:



Como a distância de (x, y) à origem é $\sqrt{x^2 + y^2}$ então a densidade é dada por

$$\delta(x, y) = k\sqrt{x^2 + y^2}$$

onde k é uma constante.

a) Como $M = \iint_D \delta(x, y) dx dy$, então $M = k \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$. Passando para coordenadas polares, temos:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ dx dy = r dr d\theta \\ x^2 + y^2 = r^2 \end{cases} .$$

Além disso, $D_{r\theta}$ é dado por:

$$D_{r\theta} : \begin{cases} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq \pi \end{cases} .$$

Então,

$$M = k \iint_{D_{r\theta}} r \cdot r \, dr d\theta = k \iint_{D_{r\theta}} r^2 \, dr d\theta = k \int_0^1 r^2 \int_0^\pi d\theta dr = k\pi \int_0^1 r^2 \, dr = \frac{k\pi}{3} \text{ u.m.}$$

b) Como $\delta(x, y)$ é uma função par e D tem simetria em relação ao eixo y , então $\bar{x} = 0$. Sabemos que

$$\bar{y} = \frac{\iint_D y\delta(x, y) \, dx dy}{M},$$

onde

$$\begin{aligned} \iint_D y\delta(x, y) \, dx dy &= k \iint_D y\sqrt{x^2 + y^2} \, dx dy \\ &= k \iint_{D_{r\theta}} r \sin \theta \cdot r \cdot r \, dr d\theta \\ &= k \iint_{D_{r\theta}} r^3 \sin \theta \, dr d\theta \\ &= k \int_0^1 r^3 \int_0^\pi \sin \theta \, d\theta dr \\ &= k [-\cos \theta]_0^\pi \int_0^1 r^3 \, dr \\ &= 2k \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^1 \\ &= \frac{k}{2}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\bar{y} = \frac{\frac{k}{2}}{\frac{k\pi}{3}} = \frac{3}{2\pi}.$$

Portanto, o centro de massa está localizado em $(0, \frac{3}{2\pi})$.

Até a próxima aula.

Rioco K. Barreto

Coordenadora de Cálculo IV

Exercício 1: Calcule a massa total M , o centro da massa (\bar{x}, \bar{y}) de uma lâmina triangular com vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(0, 2)$ se a função densidade é $\delta(x, y) = 1 + 3x + y$.

Exercício 2: A densidade em qualquer ponto de uma lâmina semicircular é proporcional à distância do centro do círculo. Determine o centro de massa da lâmina.

Exercício 3: Determine os momentos de inércia I_x , I_y e I_0 do disco homogêneo D com densidade $\delta(x, y) = \delta$, centro na origem e raio a .

Exercício 4: Uma lâmina delgada tem a forma da região D que é interior à circunferência $(x - 2)^2 + y^2 = 4$ e exterior à circunferência $x^2 + y^2 = 4$. Calcule a massa da lâmina se a densidade é dada por $\delta(x, y, z) = (x^2 + y^2)^{-1/2}$.

Exercício 5: Uma placa fina é limitada pela circunferência $x^2 + y^2 = a^2$ e tem densidade $\delta(x, y) = \frac{a^2}{a^2 + x^2 + y^2}$. Mostre que o seu momento de inércia polar é dado por $I_0 = Ma^2 \left(\frac{1 - \ln 2}{\ln 2} \right)$, onde M é a sua massa.

Exercício 6: Uma lâmina tem a forma semicircular $x^2 + y^2 \leq a^2$, com $y \geq 0$. A densidade é diretamente proporcional à distância do eixo x . Ache o momento de inércia em relação ao eixo x .

Exercício 7: Uma lâmina tem a forma de um triângulo retângulo isósceles com lados iguais de comprimento a . Ache a massa, se a densidade em um ponto P é diretamente proporcional ao quadrado da distância de P ao vértice oposto à hipotenusa.

Cálculo IV – EP4

Aula 7 – Integrais Triplas

Objetivo

- Compreender a noção de integral tripla.

Na aula 1, você aprendeu a noção de integral dupla. agora, você verá o conceito de integral tripla.

Seja $f : W \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, onde W é uma região sólida do \mathbb{R}^3 (região limitada e fechada de \mathbb{R}^3). Como W é limitada, então existe um paralelepípedo (ou caixa) $R = [a, b] \times [c, d] \times [p, q]$, contendo W . Dividimos R em n^3 subcaixas R_{ijk} , por planos paralelos aos planos coordenados, todas de mesmo volume $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$, escolhamos $(x_i^*, y_j^*, z_k^*) \in R_{ijk}$ e formamos a soma

$$S_n = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n f(x_i^*, y_j^*, z_k^*) \Delta V$$

onde $f(x_i^*, y_j^*, z_k^*) = 0$ se $(x_i^*, y_j^*, z_k^*) \notin W$, dita *soma de Riemann de f* .

Se existir $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = L$, dizemos que f é integrável e o número L é dito integral tripla de f sobre o sólido W e é indicado por

$$\begin{aligned} & \iiint_W f(x, y, z) \, dx dy dz \quad \text{ou} \\ & \iiint_W f(x, y, z) \, dV \quad \text{ou} \\ & \iiint_W f \, dV. \end{aligned}$$

OBS.:

- 1) Se f é contínua em W então f é integrável.
- 2) Se $f(x, y, z) = 1$ em W , então $\iiint_W dx dy dz = V(W)$.
- 3) $\iiint_W (f + g) \, dV = \iiint_W f \, dV + \iiint_W g \, dV$.



$$4) \iiint_W kf \, dV = k \iiint_W f \, dV, \quad k \in \mathbb{R}.$$

5) Se $\delta(x, y, z)$ é contínua e positiva em W , e representa a densidade volumétrica de massa (massa por unidade de volume), então a massa M de W é dada por

$$M = \iiint_W \delta(x, y, z) \, dx dy dz.$$

6) O centro de massa $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ é dado por

$$\bar{x} = \frac{\iiint_W x \cdot \delta(x, y, z) \, dV}{M}$$

$$\bar{y} = \frac{\iiint_W y \cdot \delta(x, y, z) \, dV}{M}$$

$$\bar{z} = \frac{\iiint_W z \cdot \delta(x, y, z) \, dV}{M}.$$

7) O momento de inércia em relação a um eixo E é dado por

$$I_E = \iiint_W r^2(x, y, z) \cdot \delta(x, y, z) \, dV$$

onde $r(x, y, z) =$ distância de (x, y, z) ao eixo E .

$$\text{Se eixo } E = \text{eixo } z, \text{ então } I_z = \iiint_W (x^2 + y^2) \delta(x, y, z) \, dV.$$

$$\text{Se eixo } E = \text{eixo } y, \text{ então } I_y = \iiint_W (x^2 + z^2) \delta(x, y, z) \, dV.$$

$$\text{Se eixo } E = \text{eixo } x, \text{ então } I_x = \iiint_W (y^2 + z^2) \delta(x, y, z) \, dV.$$

Aula 8 – Redução do Cálculo de uma Integral Tripla a uma Integral Dupla.

Objetivo

- Reduzir o cálculo de uma integral tripla a uma integral dupla.

Observamos que um domínio de integração pode ser descrito como uma reunião de regiões dadas por:

$$W_1 = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D_{xy} \text{ e } z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y)\}$$

onde $D_{xy} = \text{proj}_{xOy}^{W_1}$ (projeção de W_1 sobre o plano xy) e $z_1(x, y)$, $z_2(x, y)$ contínuas;

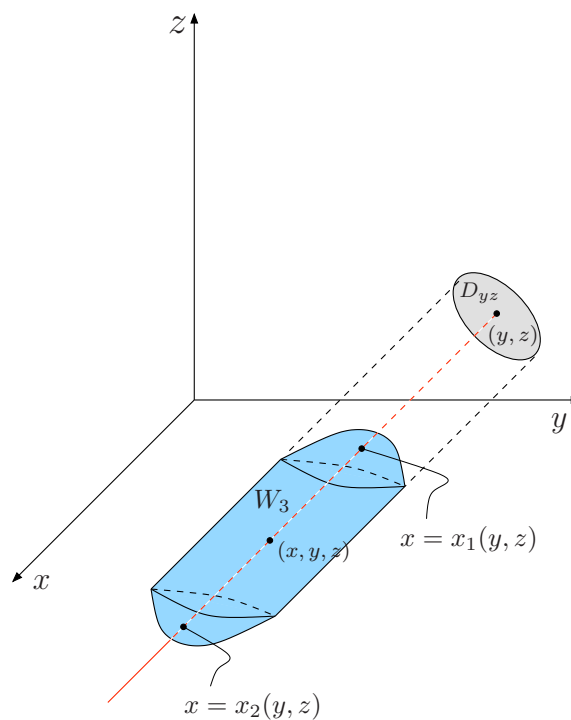
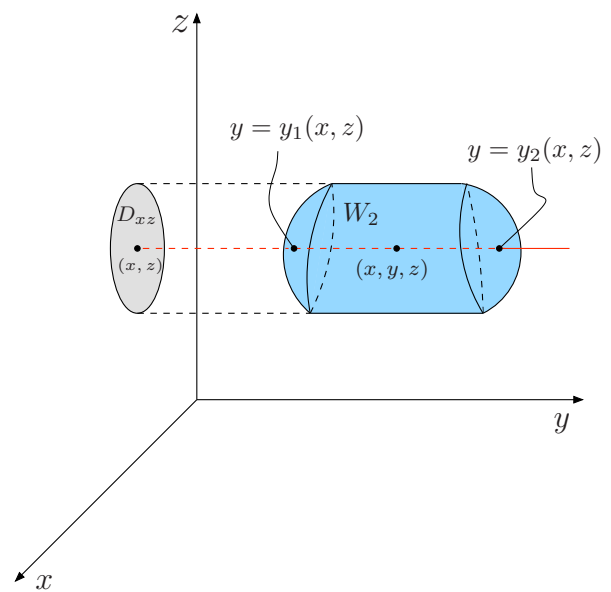
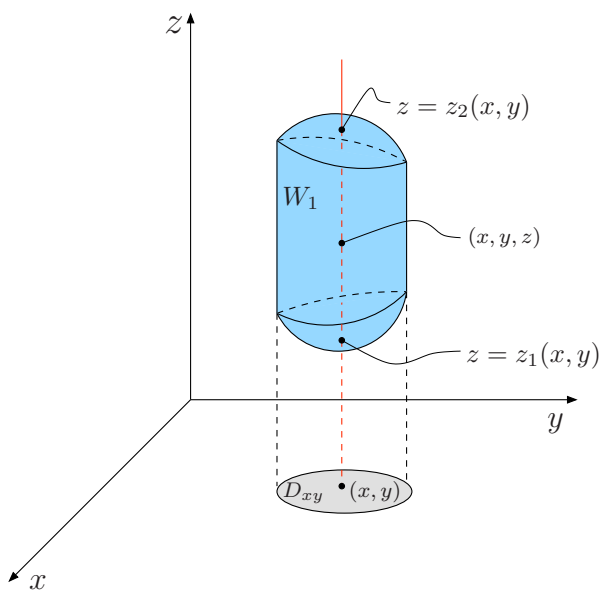
$$W_2 = \{(x, y, z) \mid (x, z) \in D_{xz} \text{ e } y_1(x, z) \leq y \leq y_2(x, z)\}$$

onde $D_{xz} = \text{proj}_{xOz}^{W_2}$ e $y_1(x, z)$, $y_2(x, z)$ contínuas;

$$W_3 = \{(x, y, z) \mid (y, z) \in D_{yz} \text{ e } x_1(y, z) \leq x \leq x_2(y, z)\}$$

onde $D_{yz} = \text{proj}_{yOz}^{W_3}$ e $x_1(y, z)$, $x_2(y, z)$ contínuas.

Os esboços de W_1 , W_2 e W_3 são:



Prova-se que

$$\begin{aligned} \iiint_{W_1} f(x, y, z) \, dx dy dz &= \iint_{D_{xy}} \left[\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z) \, dz \right] dx dy \\ \iiint_{W_2} f(x, y, z) \, dx dy dz &= \iint_{D_{xz}} \left[\int_{y_1(x,z)}^{y_2(x,z)} f(x, y, z) \, dy \right] dx dz \\ \iiint_{W_3} f(x, y, z) \, dx dy dz &= \iint_{D_{yz}} \left[\int_{x_1(y,z)}^{x_2(y,z)} f(x, y, z) \, dx \right] dy dz . \end{aligned}$$

Exemplo 1

Calcule $\iiint_W e^{x^2} \, dx dy dz$ onde W é o conjunto $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq x$ e $0 \leq z \leq 1$.

Solução:

Definimos W por:

$$W = \{(x, y, z) \mid (x, z) \in D_{xz} \text{ e } 0 \leq y \leq x\}$$

onde $D_{xz} = [0, 1] \times [0, 1]$. Logo:

$$\begin{aligned} \iiint_W e^{x^2} \, dx dy dz &= \iint_{D_{xz}} \left[\int_0^x e^{x^2} \, dy \right] dx dz \\ &= \iint_{D_{xz}} x e^{x^2} \, dx dz \\ &= \int_0^1 \int_0^1 x e^{x^2} \, dx dz \\ &= \left[\frac{e^{x^2}}{2} \right]_0^1 \int_0^1 dz \\ &= \frac{e-1}{2} . \end{aligned}$$

Exemplo 2

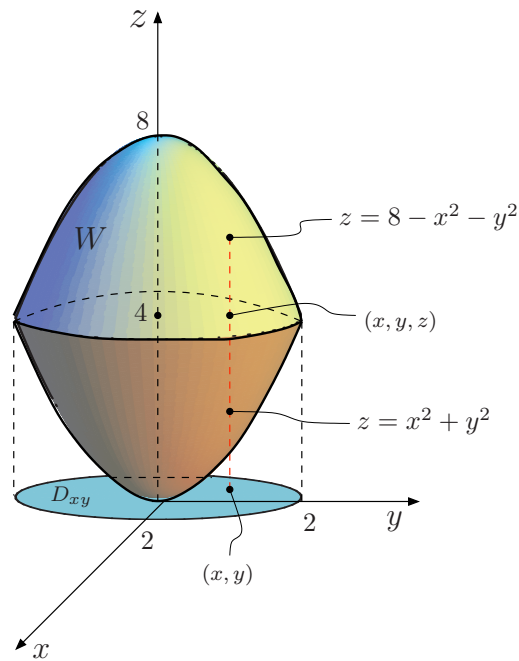
Calcule o volume do sólido limitado pelos parabolóides $z = x^2 + y^2$ e $z = 8 - x^2 - y^2$.

Solução:

Inicialmente, calculemos a interseção das superfícies:

$$\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z = 8 - x^2 - y^2 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 8 - x^2 - y^2 \Leftrightarrow 2(x^2 + y^2) = 8 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4 .$$

Logo, a interseção dos parabolóides é a circunferência $x^2 + y^2 = 4$, situada no plano $z = 4$.



Descrevemos W por:

$$W = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D_{xy} \text{ e } x^2 + y^2 \leq z \leq 8 - x^2 - y^2\}$$

onde D_{xy} é o disco $x^2 + y^2 \leq 4$.

Como $V(W) = \iiint_W dx dy dz$, então

$$V(W) = \iint_{D_{xy}} \left[\int_{x^2+y^2}^{8-x^2-y^2} dz \right] dx dy = \iint_{D_{xy}} [8 - 2(x^2 + y^2)] dx dy.$$

Passando para coordenadas polares, temos:

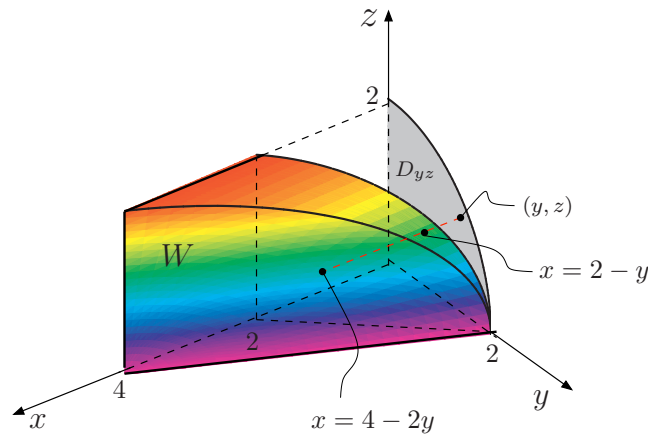
$$\begin{aligned} V(W) &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} (8 - 2r^2)r \, d\theta dr \\ &= 2\pi \int_0^2 (8r - 2r^3) \, dr \\ &= 2\pi \left[4r^2 - \frac{r^4}{2} \right]_0^2 \\ &= 2\pi(16 - 8) \\ &= 16\pi \text{ u.v.} \end{aligned}$$

Exemplo 3

Calcule a massa do sólido W , no primeiro octante, limitado pelos planos $y = 0$, $z = 0$, $x + y = 2$, $x + 2y = 4$ e o cilindro $y^2 + z^2 = 4$, sendo a densidade igual à distância de (x, y, z) ao plano xz .

Solução:

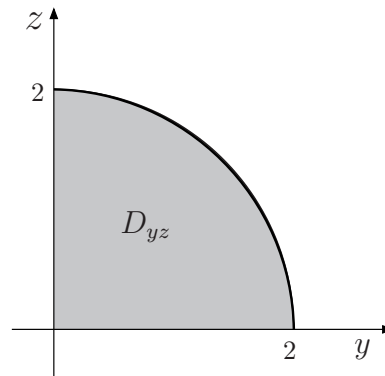
O esboço de W é:



Podemos definir W por:

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (y, z) \in D_{yz} \text{ e } 2 - y \leq x \leq 4 - 2y\}$$

onde D_{yz} é tal que $y^2 + z^2 \leq 4$, $y \geq 0$ e $z \geq 0$.



Como $M = \iiint_W \delta(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$, onde $\delta(x, y, z) = |y| = y$, pois $y \geq 0$, então:

$$\begin{aligned} M &= \iiint_W y \, dx \, dy \, dz \\ &= \iint_{D_{yz}} \left[\int_{2-y}^{4-2y} y \, dx \right] \, dy \, dz \\ &= \iint_{D_{yz}} y(4 - 2y - 2 + y) \, dy \, dz \\ &= \iint_{D_{yz}} (2y - y^2) \, dy \, dz. \end{aligned}$$

Passando para coordenadas polares, temos:

$$\begin{cases} y = r \cos \theta \\ z = r \sin \theta \\ dydz = r dr d\theta \end{cases}$$

e $D_{r\theta}$ é dado por:

$$D_{r\theta} : \begin{cases} 0 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq \pi/2 \end{cases}$$

Então:

$$\begin{aligned} M &= \int_0^{\pi/2} \int_0^2 (2r \cos \theta - r^2 \cos^2 \theta) r dr d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \int_0^2 (2r^2 \cos \theta - r^3 \cos^2 \theta) dr d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \left[\frac{2r^3}{3} \cos \theta - \frac{r^4}{4} \cos^2 \theta \right]_0^2 d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \left(\frac{16}{3} \cos \theta - 4 \cos^2 \theta \right) d\theta \\ &= \left[\frac{16}{3} \sin \theta - \frac{4}{2} \left(\theta + \frac{\sin 2\theta}{2} \right) \right]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{16}{3}(1 - 0) - 2 \cdot \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{16}{3} - \pi \text{ u.m.} \end{aligned}$$

Até a próxima semana.

Rioco K. Barreto

Coordenadora de Cálculo IV

Exercício 1: Calcule a integral iterada $\int_0^3 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-z^2}} z e^y dx dz dy$.

Exercício 2: Calcule $\iiint_W e^{x^2} dx dy dz$, onde W é o conjunto $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq x$ e $0 \leq z \leq 1$.

Exercício 3: Escreva as seis integrais triplas iteradas para o volume do sólido W limitado pelos planos $y + z = 1$, $y = x$, $x = 0$ e $z = 0$. Calcule uma das integrais.

Exercício 4: Esboce o sólido W cujo volume é dado pela integral iterada

$$I = \int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \int_0^{1-y^2} dz dy dx$$

e reescreva na ordem $dx dy dz$.

Exercício 5: Use a integral tripla para encontrar o volume do sólido

- a) W limitado pelo cilindro $x = y^2$ e os planos $z = 0$ e $x + z = 1$;
 - b) W limitado pelos planos $z + y = 8$, $z - y = 8$, $x = 0$, $x = 4$ e $z = 0$.
-

Exercício 6: Calcule a massa do sólido W no primeiro octante limitado por $y = x^2$, $y = 9$, $z = 0$, $x = 0$ e $y + z = 9$ se a densidade é dada por $\delta(x, y, z) = x$.

Exercício 7: Seja W um sólido limitado pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$, com $z \geq 0$ e pelos planos $y = z$ e $z = 0$ com função densidade $\delta(x, y, z) = y$. Calcule:

- a) A massa de W .
 - b) O momento de inércia em relação ao eixo z .
-

Exercício 8: Um sólido tem a forma de um cilindro circular reto de raio de base a e altura h . Determine o momento de inércia do sólido em relação ao eixo de simetria se a densidade no ponto P é proporcional à distância de P até a base do sólido.

Cálculo IV – EP5

Aula 9 – Mudança de Variáveis na Integral Tripla

Objetivo

- Aprender a fazer mudança de variáveis em integrais triplas.
- Estudar a mudança de variáveis cilíndricas.

Aqui temos um resultado similar à mudança de variáveis em integral dupla:

$$\iiint_W f(x, y, z) \, dx dy dz = \iiint_{W_{uvw}} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) |J| \, du dv dw$$

onde

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0$$

é o jacobiano da mudança de variáveis

$$\varphi(u, v, w) = (x, y, z) = (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))$$

e $W_{uvw} = \varphi(W)$.

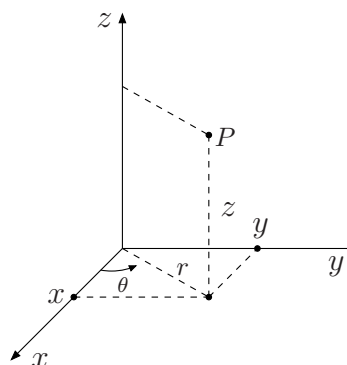
Um caso particular de mudança de variáveis

Coordenadas cilíndricas

As coordenadas cilíndricas (r, θ, z) são definidas por

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases} \quad \therefore \quad x^2 + y^2 = r^2$$

com $r \geq 0$, $\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0 + 2\pi$, para algum θ_0 e $z \in \mathbb{R}$.



As coordenadas r e θ são as mesmas que as coordenadas polares e, portanto, as suas variações são encontradas na projeção de W no plano xy . A variação de z é encontrada diretamente no sólido. Supondo que $z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y)$, então a variação de z será

$$z_1(r \cos \theta, r \sin \theta) \leq z \leq z_2(r \cos \theta, r \sin \theta).$$

Calculando o jacobiano da transformação cilíndrica, encontramos

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} = r \quad (\text{Verifique!})$$

Logo:

$$\iiint_W f(x, y, z) \, dx dy dz = \iiint_{W_{r\theta z}} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r \, dr d\theta dz$$

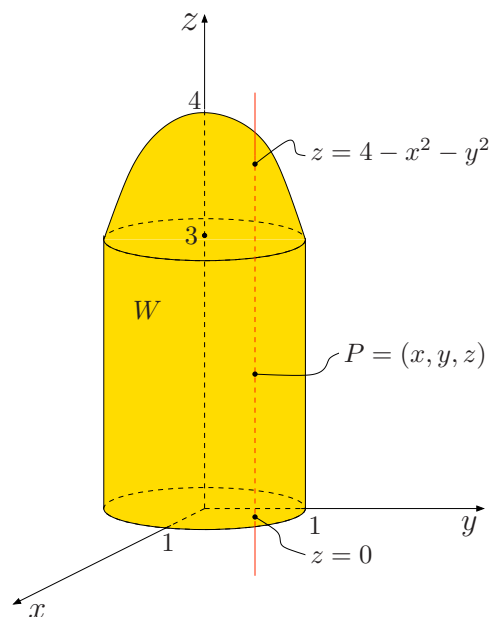
é a fórmula da integral tripla em coordenadas cilíndricas.

Exemplo 1

Calcule $\iiint_W (zx^2 + zy^2) \, dx dy dz$, sendo W o sólido limitado pelo cilindro $x^2 + y^2 \leq 1$, pelo plano $z = 0$ e pelo parabolóide $z = 4 - x^2 - y^2$.

Solução:

De $z = 4 - x^2 - y^2$ e $x^2 + y^2 = 1$, temos $z = 3$. Isto significa que as superfícies apresentam interseção no plano $z = 3$. O esboço de W é:



Passando para coordenadas cilíndricas, temos

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \operatorname{sen} \theta \\ z = z \\ dx dy dz = r dr d\theta dz \\ x^2 + y^2 = r^2 \end{cases} .$$

Seja $P = (x, y, z) \in W$. Uma reta por P , paralela ao eixo z , intercepta a fronteira de W em $z = 0$ e $z = 4 - x^2 - y^2 = 4 - r^2$. Logo, $0 \leq z \leq 4 - r^2$. Como a projeção de W no plano xy é o disco $x^2 + y^2 \leq 1$, então $0 \leq r \leq 1$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Logo o conjunto $W_{r\theta z}$ é dado por:

$$W_{r\theta z} : \begin{cases} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq z \leq 4 - r^2 \end{cases} .$$

Temos,

$$\begin{aligned} \iiint_W (zx^2 + zy^2) dx dy dz &= \iiint_W z(x^2 + y^2) dx dy dz \\ &= \iiint_{W_{r\theta z}} zr^2 \cdot r dr d\theta dz \\ &= \iiint_{W_{r\theta z}} zr^3 dr d\theta dz \\ &= \int_0^1 r^3 \int_0^{2\pi} \int_0^{4-r^2} z dz d\theta dr \\ &= \int_0^1 r^3 \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^{4-r^2} \int_0^{2\pi} d\theta dr \\ &= \pi \int_0^1 r^3 (4 - r^2)^2 dr \\ &= \pi \int_0^1 (16r^3 - 8r^5 + r^7) dr \\ &= \pi \left[4r^4 - \frac{4r^6}{3} + \frac{r^8}{8} \right]_0^1 \\ &= \frac{67\pi}{24} . \end{aligned}$$

Aula 10 – Integral Tripla em Coordenadas Esféricas.

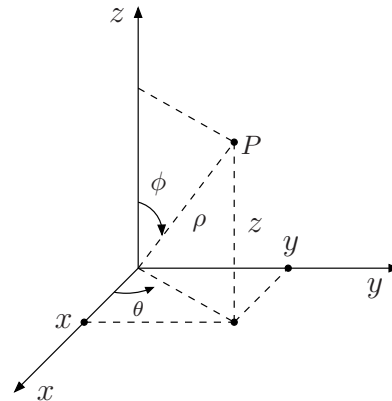
Objetivo

- Estudar a mudança de variáveis esféricas.

As coordenadas esféricas (ρ, ϕ, θ) são definidas por

$$\begin{cases} x = \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta \\ y = \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \\ z = \rho \cos \phi \end{cases} \quad \therefore x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$$

com $\rho \geq 0$, $0 \leq \phi \leq \pi$, $\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0 + 2\pi$, para algum θ_0 .



A coordenada ρ mede a distância do ponto P à origem (portanto $\rho \geq 0$). A coordenada θ é a mesma que a coordenada cilíndrica e sua variação é encontrada na projeção de W no plano xy . A coordenada ϕ é o ângulo entre o eixo z positivo (onde $\phi = 0$) e a semireta OP . A variação máxima de ϕ é $0 \leq \phi \leq \pi$.

Calculando o jacobiano da transformação esférica, temos:

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \phi, \theta)} = \rho^2 \operatorname{sen} \phi \quad (\text{Verifique!})$$

Logo:

$$\iiint_W f(x, y, z) dV = \iiint_{W_{\rho\phi\theta}} f(\rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta, \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta, \rho \cos \phi) \rho^2 \operatorname{sen} \phi d\rho d\phi d\theta$$

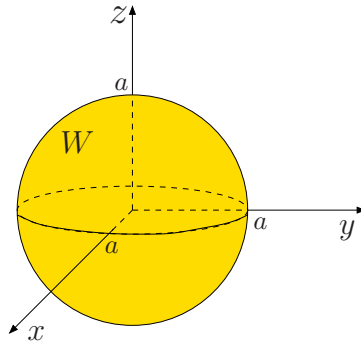
é a fórmula da integral tripla em coordenadas esféricas.

Exemplo 1

Calcule o volume da esfera $W : x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$, ($a > 0$).

Solução:

O esboço de W é:



Passando para coordenadas esféricas, temos

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta \\ y = \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \\ z = \rho \cos \phi \\ dV = dx dy dz = \rho^2 \operatorname{sen} \phi d\rho d\phi d\theta \\ x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2 \end{array} \right. .$$

A equação da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ fica $\rho = a$. Logo, o conjunto $W_{\rho\phi\theta}$ é dado por:

$$W_{\rho\phi\theta} : \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq \rho \leq a \\ 0 \leq \phi \leq \pi \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{array} \right. .$$

Como $V(W) = \iiint_W dx dy dz$ então:

$$\begin{aligned} V(W) &= \iiint_{W_{\rho\phi\theta}} \rho^2 \operatorname{sen} \phi d\rho d\phi d\theta \\ &= \int_0^a \rho^2 \int_0^\pi \operatorname{sen} \phi \int_0^{2\pi} d\theta d\phi d\rho \\ &= 2\pi \int_0^a \rho^2 \int_0^\pi \operatorname{sen} \phi d\phi d\rho \\ &= 2\pi [-\cos \phi]_0^\pi \int_0^a \rho^2 d\rho \\ &= 4\pi \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_0^a \\ &= \frac{4\pi a^3}{3} \text{ u.v.} \end{aligned}$$

Exemplo 2

Calcule o volume do elipsóide $W : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$, ($a, b, c > 0$).

Solução:

Façamos a mudança de variáveis

$$\begin{cases} x = au \\ y = bv \\ z = cw \end{cases}$$

Temos

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = abc \neq 0.$$

Logo,

$$dxdydz = |J| dudvdw = abc dudvdw.$$

O elipsóide $W : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$ é transformado na esfera $W_{uvw} : u^2 + v^2 + w^2 \leq 1$. Como $V(W) = \iiint_W dxdydz$, então:

$$V(W) = \iiint_{W_{uvw}} |J| dudvdw = abc \iiint_{W_{uvw}} dudvdw = abc V(W_{uvw}) = abc \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 1^3 = \frac{4}{3} \pi abc.$$

Até a próxima semana.

Rioco K. Barreto

Coordenadora de Cálculo IV

Exercício 1: Calcule $\iiint_W (x^2 + y^2) dV$, onde W é a região interior ao cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e à esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

Exercício 2: Calcule $\iiint_W \sqrt{x^2 + y^2} dV$, onde W é a região limitada por $z = x^2 + y^2 - 4$ e $z = 4 - x^2 - y^2$.

Exercício 3: Use a integral tripla para calcular o volume do sólido W acima do parabolóide $z = x^2 + y^2$ e abaixo do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Exercício 4: Calcule $\iiint_W (x^2 + y^2 + z^2) dV$, sendo W a região limitada superiormente pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ e inferiormente pelo cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Exercício 5: Calcule o volume do sólido W que está dentro da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, acima do plano $z = 0$ e abaixo do cone $z = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{3}}$.

Exercício 6: Faça o esboço do sólido W cujo volume é dado pela integral

$$\int_0^{\pi/3} \int_0^{2\pi} \int_0^{\sec \phi} \rho^2 \sin \phi \, d\rho d\theta d\phi$$

e calcule essa integral.

Exercício 7: Verificar que o centro de massa de uma esfera de raio 1 coincide com o seu centro, sabendo-se que a sua distribuição de massa é homogênea.

Exercício 8: Calcule o momento de inércia em relação ao eixo z do sólido limitado por $z = 4 - x^2 - y^2$ e $z = 0$, sabendo que a densidade em um ponto é proporcional à distância de P ao plano xy .



Cálculo III-A – Módulo 6

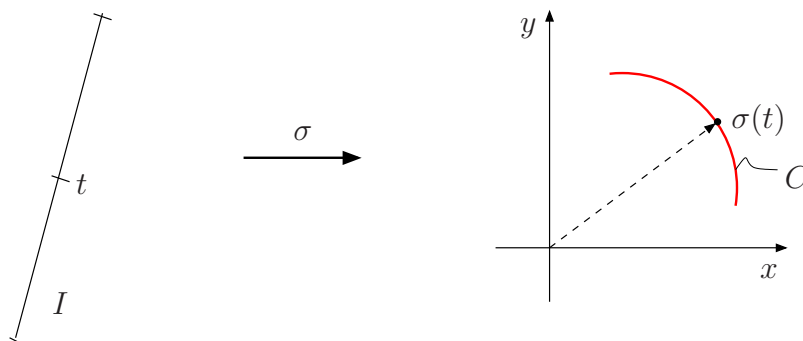
Aula 11 – Curvas Parametrizadas

Objetivo

- Parametrizar curvas planas e espaciais.
-

Parametrização de curvas

Parametrizar uma curva $C \subset \mathbb{R}^n$ ($n = 2$ ou 3) consiste em apresentar uma função vetorial $\sigma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($n = 2$ ou 3), onde I é um intervalo e $\sigma(I) = C$.



Exemplo 1

Seja $A, B \in \mathbb{R}^n$ ($n = 2$ ou 3), parametrize o segmento de reta C de extremidade inicial A e final B .

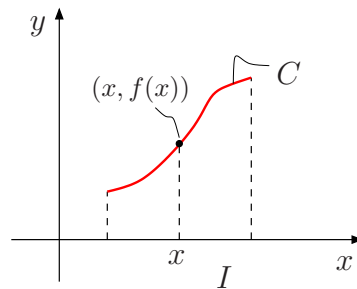
Solução:

Se $P \in C$, então $\vec{OP} = \vec{OA} + t\vec{AB}$, $0 \leq t \leq 1$ ou $P - A = B - A + t(B - A)$, $0 \leq t \leq 1$ ou $P = A + t(B - A)$, $0 \leq t \leq 1$. Logo, uma parametrização do segmento C é dada por

$$\sigma(t) = A + t(B - A), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Exemplo 2

Seja $C \subset$ plano xy , o gráfico de uma função $y = f(x)$, $x \in I$.

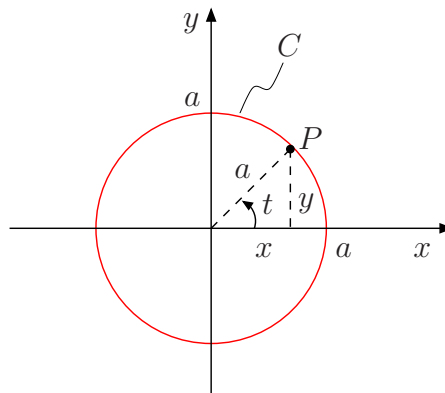


Então, uma parametrização de C é dada por

$$\sigma(t) = (t, f(t)), t \in I.$$

Exemplo 3

Seja C a circunferência $x^2 + y^2 = a^2$, $a > 0$; $P = (x, y) \in C$ e t o ângulo em radianos entre o eixo positivo x e a semirreta OP .



Observe que quando t aumenta de 0 a 2π , o ponto $P = (x, y) = (a \cos t, a \sin t)$ se move, uma vez sobre C no sentido anti-horário a partir do ponto $(a, 0)$. Logo, uma parametrização de C é

$$\sigma_1(t) = (a \cos t, a \sin t), 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Observe que $\sigma_2(t) = (a \sin t, a \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$ é também uma parametrização de C , pois $x^2 + y^2 = a^2$. Neste caso, quando t aumenta de 0 a 2π , o ponto P se move uma vez ao longo de C no sentido horário, a partir do ponto $(0, a)$.

Observe que $\sigma_3(t) = (a \cos(2\pi - t), a \sin(2\pi - t)) = (a \cos t, -a \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$ é outra parametrização de C , e P se move ao longo de C no sentido horário a partir do ponto $(a, 0)$.

Exemplo 4

Seja a circunferência $C : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = a^2$, de centro (x_0, y_0) e raio a . Efetuando uma mudança de variáveis $u = x - x_0$ e $v = y - y_0$, temos

$$u^2 + v^2 = a^2$$

que é uma circunferência no plano uv , de centro $(0, 0)$ e raio a . Logo,

$$\begin{cases} u = a \cos t \\ v = a \sin t \end{cases}, 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Substituindo acima, temos

$$\begin{cases} x = x_0 + a \cos t \\ y = y_0 + a \sin t \end{cases}, 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Assim, uma parametrização diferenciável de C é dada por

$$\sigma(t) = (x_0 + a \cos t, y_0 + a \sin t), 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Exemplo 5

Seja uma elipse $C : \frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$. Fazendo $u = \frac{x-x_0}{a}$ e $v = \frac{y-y_0}{b}$, mostramos que

$$\sigma(t) = (x_0 + a \cos t, y_0 + b \sin t), 0 \leq t \leq 2\pi$$

é uma parametrização de C .

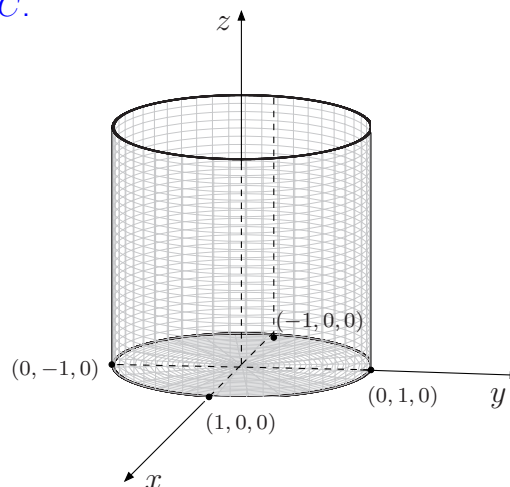
Exemplo 6

Seja C uma curva do espaço dada pela interseção do cilindro $x^2 + y^2 = 1$ com o plano $x + z = 2$.

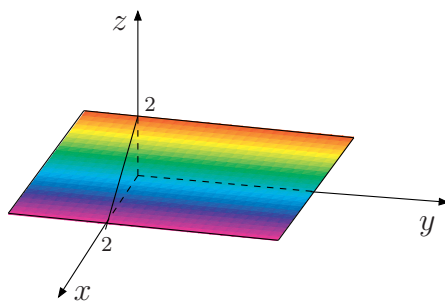
- Esboce C .
- Apresente uma parametrização diferenciável para C .

Solução:

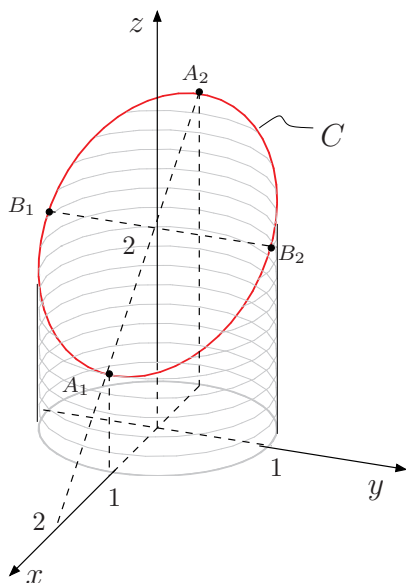
a) Inicialmente, façamos o esboço do cilindro $x^2 + y^2 = 1$. Desenhemos, no plano xy , a circunferência $x^2 + y^2 = 1$. Pelos pontos $(1, 0, 0)$, $(-1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, -1, 0)$ tracemos paralelas ao eixo z .



Para esboçar o plano $x + z = 2$, traçamos a reta $x + z = 2$ no plano xz . Observe que a equação do plano não contém a variável y . Por isso, por pontos da reta traçamos paralelas ao eixo y .



Agora, juntemos as duas figuras, procurando destacar alguns pontos de interseção. A reta $x + z = 2$ intercepta o cilindro nos pontos A_1 e A_2 . Por outro lado, a reta do plano, paralela ao eixo y , passando por $(0, 0, 2)$, intercepta o cilindro nos pontos B_1 e B_2 . A curva C passa por A_1 , B_1 , A_2 e B_2 .



b) Seja $(x, y, z) \in C$. Logo, x e y satisfazem $x^2 + y^2 = 1$. Assim, $x = \cos t$, $y = \sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Como $z = 2 - x$, então $z = 2 - \cos t$. Logo,

$$\sigma(t) = (\cos t, \sin t, 2 - \cos t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

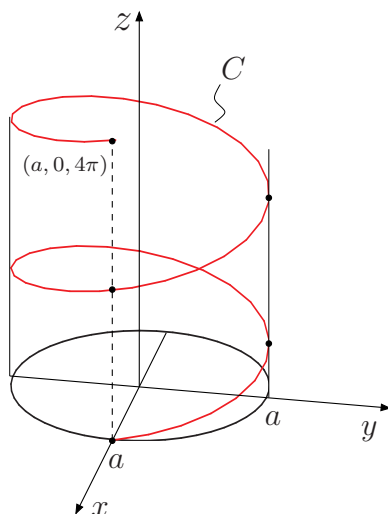
é uma parametrização de C .

Exemplo 7

Seja C a curva no espaço representada pela função vetorial $\sigma(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$, $0 \leq t \leq 4\pi$, $a > 0$, $b > 0$. Esboce C , dita hélice circular.

Solução:

De $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, temos $x^2 + y^2 = a^2$. Isso significa que C está contida no cilindro $x^2 + y^2 = a^2$. Como $z = bt$, quando t vai de 0 a 4π , o ponto (x, y, z) percorre a hélice contida no cilindro.

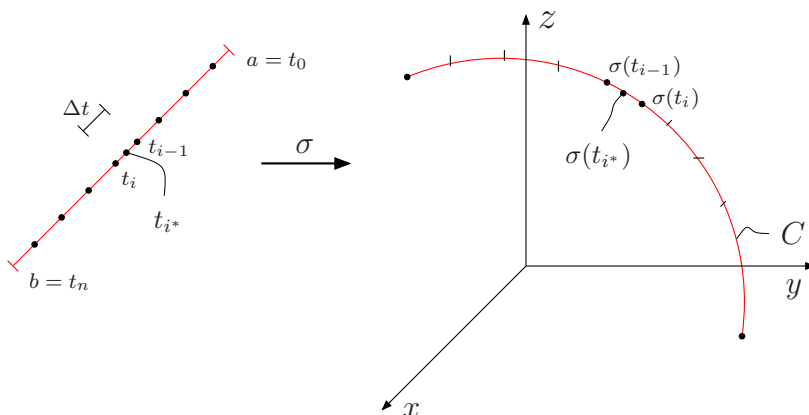


Aula 12 – Integral de Linha de Campo Escalar

Objetivo

- Compreender a noção de integral de linha de campo escalar;
- Estudar algumas propriedades.

Nesta aula definiremos uma integral similar a uma integral definida. Sejam dados um campo escalar em \mathbb{R}^3 ou uma função real de três variáveis $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ e uma curva C em \mathbb{R}^3 , dada por $\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in [a, b]$, com σ de classe C^1 .



Dividimos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos I_i , $i = 1, \dots, n$, de mesmo comprimento $\Delta t = \frac{b-a}{n}$. Logo, a curva C fica dividida em n subarcs de comprimento $\Delta s_1, \Delta s_2, \dots, \Delta s_n$, onde $\Delta s_i \simeq \|\sigma'(t_i^*)\| \Delta t$ para algum $t_i^* \in I_i$. Formemos a soma

$$\sum_{i=1}^n f(\sigma(t_i^{**})) \Delta s_i = \sum_{i=1}^n f(\sigma(t_i^{**})) \|\sigma'(t_i^*)\| \Delta t,$$

Definimos a integral de linha de f sobre C por

$$\int_C f ds = \int_C f(x, y, z) ds = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\sigma(t_i^{**})) \|\sigma'(t_i^*)\| \Delta t$$

se o limite existir.

OBS.:

1) Se f é uma função contínua, então o limite existe e portanto

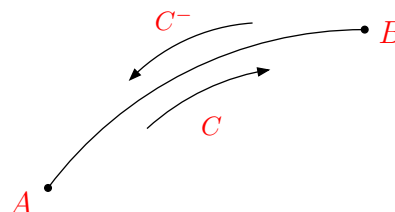
$$\begin{aligned} \int_C f(x, y, z) ds &= \int_a^b f(\sigma(t)) \underbrace{\|\sigma'(t)\|}_{ds} dt = \\ &= \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt. \end{aligned}$$

2) Se $f(x, y)$ é uma função contínua em \mathbb{R}^2 e C uma curva em \mathbb{R}^2 , dada por $\sigma(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [a, b]$, com σ de classe C^1 , então definimos

$$\begin{aligned} \int_C f ds &= \int_C f(x, y) ds = \int_a^b f(\sigma(t)) \underbrace{\|\sigma'(t)\|}_{ds} dt = \\ &= \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt. \end{aligned}$$

3) Se $f(x, y) = 1$ (ou $f(x, y, z) = 1$), então

$$\int_C f ds = \text{comprimento de } C.$$



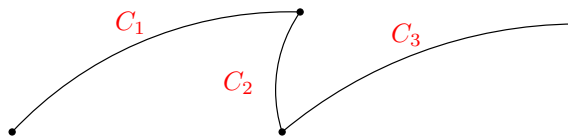
- 4) A integral de linha de um campo escalar f não depende da parametrização de C e nem de sua orientação, isto é, denotando por C^- a curva C percorrida em outro sentido, então

$$\int_{C^-} f ds = - \int_C f ds.$$

- 5) Se C é uma curva dada por uma parametrização $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($n = 2$ ou 3), C^1 por partes, isto é, σ é contínua e existe uma partição $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ de $[a, b]$ de modo que $\sigma_i = \sigma|_{[t_{i-1}, t_i]}$ é de classe C^1 , $i = 1, \dots, n$, então

$$\int_C f ds = \sum_{i=1}^n \int_{C_i} f ds$$

onde $C_i = \sigma_i([t_{i-1}, t_i])$.



Exemplo 1

Seja C a interseção do cilindro parabólico $x = y^2$ com a parte do plano $z = y$, tal que $0 \leq y \leq 1$. Calcule $\int_C y ds$.

Solução:

Façamos $y = t$. Logo, $x = t^2$ e $z = t$. Como $0 \leq y \leq 1$, então $0 \leq t \leq 1$. Assim, uma parametrização de C é dada por $\sigma(t) = (t^2, t, t)$, $0 \leq t \leq 1$, logo $\sigma'(t) = (2t, 1, 1)$. Como, $ds = \|\sigma'(t)\| dt$, então $ds = \sqrt{4t^2 + 1 + 1} dt = \sqrt{2 + 4t^2} dt$. Logo,

$$\int_C y ds = \int_0^1 t \sqrt{2 + 4t^2} dt = \int_0^1 (2 + 4t^2)^{1/2} t dt.$$

Observe que $d(2 + 4t^2) = 8t dt$, portanto $t dt = \frac{d(2+4t^2)}{8}$. Logo,

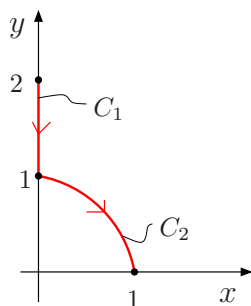
$$\int_C y ds = \frac{1}{8} \int_0^1 (2 + 4t^2)^{1/2} d(2 + 4t^2) = \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{3} (2 + 4t^2)^{3/2} \Big|_0^1 = \frac{1}{12} (6^{3/2} - 2^{3/2}) = \frac{1}{6} (3\sqrt{6} - \sqrt{2}).$$

Exemplo 2

Calcule $\int_C x \, ds$, onde C é formado pelo segmento de reta C_1 de $(0, 2)$ a $(0, 1)$, seguido do arco C_2 da parábola $y = 1 - x^2$ de $(0, 1)$ a $(1, 0)$.

Solução:

O esboço de C está representado na figura que se segue.



Como $C = C_1 \cup C_2$, temos:

$$\int_C x \, ds = \int_{C_1} x \, ds + \int_{C_2} x \, ds = \int_{C_1^-} x \, ds + \int_{C_2} x \, ds.$$

Cálculo de $\int_{C_1^-} x \, ds$

Uma parametrização de C_1^- é dada por $\sigma(t) = (0, t)$, $1 \leq t \leq 2$. Logo, $\sigma'(t) = (0, 1)$, logo $\|\sigma'(t)\| = 1$ e, portanto, $ds = \|\sigma'(t)\| \, dt = dt$.

Assim,

$$\int_{C_1^-} x \, ds = \int_1^2 0 \, dt = 0.$$

Cálculo de $\int_{C_2} x \, ds$

Uma parametrização de C_2 é dada por $\sigma(t) = (t, 1 - t^2)$, $0 \leq t \leq 1$, portanto $\sigma'(t) = (1, -2t)$. Logo $ds = \|\sigma'(t)\| \, dt = \sqrt{1 + 4t^2} \, dt$. Então,

$$\int_{C_2} x \, ds = \int_0^1 t \sqrt{1 + 4t^2} \, dt = \int_0^1 (1 + 4t^2)^{1/2} \, dt.$$

Observe que $t \, dt = \frac{d(1+4t^2)}{8}$. Logo,

$$\int_{C_2} x \, ds = \frac{1}{8} \int_0^1 (1 + 4t^2)^{1/2} \, d(1 + 4t^2) = \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{3} (1 + 4t^2)^{3/2} \Big|_0^1 = \frac{1}{12} (5\sqrt{5} - 1).$$

Portanto,

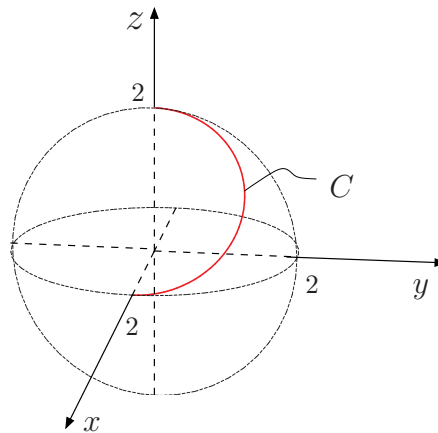
$$\int_C x \, ds = \frac{1}{12} (5\sqrt{5} - 1).$$

Exemplo 3

Seja a curva C obtida como interseção da semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4, y \geq 0$ com o plano $x + z = 2$. Calcule $\int_C f(x, y, z) \, ds$, onde $f(x, y, z)$ é dada por $f(x, y, z) = xy$.

Solução:

O esboço de C é:



Seja $(x, y, z) \in C$. Então $x^2 + y^2 + z^2 = 4, y \geq 0$ e $x + z = 2$. Logo, $x^2 + y^2 + (2 - x)^2 = 4, y \geq 0$ ou $2x^2 - 4x + y^2 = 0, y \geq 0$ ou $2(x - 1)^2 + y^2 = 2, y \geq 0$ ou $(x - 1)^2 + \frac{y^2}{2} = 1, y \geq 0$. Logo, a projeção de C sobre o plano xy é a semi-elipse de centro $(1, 0)$ e semi-eixos 1 e $\sqrt{2}$. Então,

$$\begin{cases} x = 1 + \cos t \\ y = \sqrt{2} \operatorname{sen} t \\ z = 2 - (1 + \cos t) = 1 - \cos t \end{cases}.$$

Como $y \geq 0, \sqrt{2} \operatorname{sen} t \geq 0$, portanto $0 \leq t \leq \pi$. Logo, uma parametrização para C é dada por

$$\sigma(t) = (1 + \cos t, \sqrt{2} \operatorname{sen} t, 1 - \cos t), 0 \leq t \leq \pi.$$

Temos

$$\sigma'(t) = (-\operatorname{sen} t, \sqrt{2} \cos t, \operatorname{sen} t)$$

portanto

$$ds = \|\sigma'(t)\| \, dt = \sqrt{\operatorname{sen}^2 t + 2 \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t} \, dt = \sqrt{2} \, dt.$$

Então,

$$\begin{aligned}\int_C f(x, y, z) ds &= \int_C xy ds = \int_0^\pi (1 + \cos t) (\sqrt{2} \sin t) \sqrt{2} dt = 2 \int_0^\pi (\sin t + \sin t \cos t) dt \\ &= 2 \left[-\cos t + \frac{\sin^2 t}{2} \right]_0^\pi \\ &= 4.\end{aligned}$$

Exercício 1: Apresente uma parametrização diferenciável para as seguintes curvas planas:

- a) C é o segmento de $(1, 2)$ a $(-2, 8)$.
- b) C é a parte da parábola $y = 3x^2$ de $(-1, 3)$ a $(2, 12)$.
- c) C é o gráfico de $y^3 = x$ de $(0, 0)$ a $(1, 1)$.
- d) C é a elipse $3x^2 + 8y^2 = 24$.
- e) C é o gráfico de $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$.
- f) C é o arco de circunferência $x^2 + y^2 = 4$, com $x \geq 0$.
- g) C é a curva $2x^2 + 2y^2 - 6x + 4y - 16 = 0$.
- h) C é a curva $16x^2 + 9y^2 + 64x - 18y - 71 = 0$.

Exercício 2: Apresente uma parametrização diferenciável para a curva C em \mathbb{R}^3 , interseção das superfícies dadas por

- a) $x^2 + y^2 = 1$ e $y + z = 2$.
- b) $x^2 + y^2 = 4$ e $x^2 + z^2 = 4$, situada no primeiro octante.
- c) $4x^2 + 9y^2 = 36$ e $x + z = 1$.
- d) $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ e $x + y = 1$.
- e) $x^2 + y^2 = z^2$, $z \geq 0$ e $x = y^2$ do ponto $(0, 0, 0)$ a $(1, 1, \sqrt{2})$.
- f) $z = 1 - y^2$, $z \geq 0$ e $2x + 3z = 6$ de $(3, 1, 0)$ a $(3, -1, 0)$.
- g) $z = 3x^2 + y^2$ e $z + 6x = 9$.
- h) $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, com $z \geq 0$.

Exercício 3: Calcule $\int_C (xy + y + z) ds$ ao longo da curva $\vec{r}(t) = 2t\vec{i} + t\vec{j} + (2 - 2t)\vec{k}$, com $0 \leq t \leq 1$.

Exercício 4: Calcule $\int_C (x + \sqrt{4y}) ds$, onde C é o triângulo de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(0, 1)$.

Exercício 5: Calcule a integral $\int_C (x^2 + y^2) ds$, onde C é a quarta parte da circunferência $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $y = x$, situada no primeiro octante.

Exercício 6: Calcule a integral $\int_C \sqrt{3}xyz ds$, onde C é a curva de interseção das superfícies $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, $x^2 + y^2 = 4$, situada no primeiro octante.

Cálculo IV – EP7 – Aluno

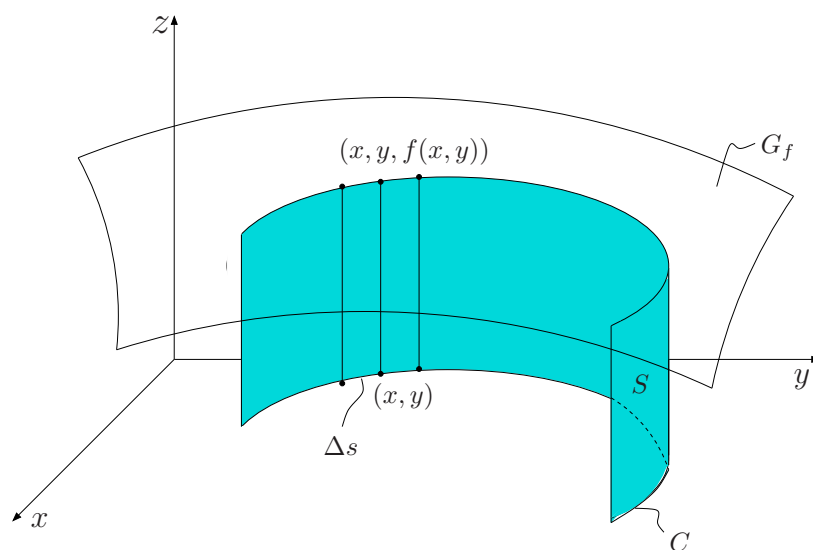
Aula 13 – Aplicações da Integral de Linha de Campo Escalar

Objetivo

- Apresentar uma interpretação geométrica.
 - Apresentar algumas aplicações à Física.
-

Interpretação geométrica no plano

Seja $f(x, y) \geq 0$ e contínua. Então o gráfico de f , G_f , está acima do plano xy .



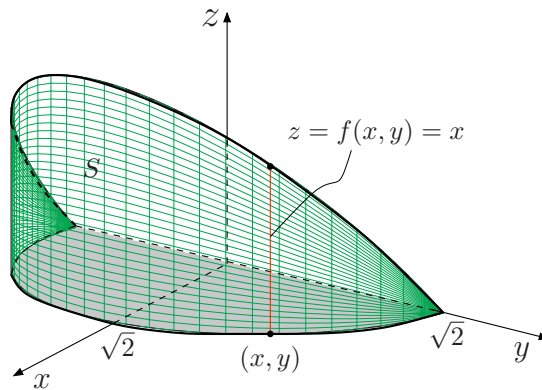
A partir da curva $C \subset$ plano xy , construa a superfície S de base C e “altura” $f(x, y)$ em $(x, y) \in C$.
A integral $\int_C f(x, y) ds$ representa a área de um lado da superfície S .

Exemplo 1

A base de uma superfície é dada por $x^2 + y^2 = 2$, $x \geq 0$. Se a altura da superfície em (x, y) é $f(x, y) = x$, $x \geq 0$, achar a área de um lado da superfície.

Solução:

O esboço de S é:



A área de um lado de S é dada por $\int_C f(x, y) ds = \int_C x ds$, onde C é parametrizado por $\sigma(t) = (\sqrt{2} \cos t, \sqrt{2} \sin t)$, $-\pi/2 \leq t \leq \pi/2$ (pois $x \geq 0$).

Se $\sigma'(t) = (-\sqrt{2} \sin t, \sqrt{2} \cos t)$, então $\|\sigma'(t)\| = \sqrt{2 \sin^2 t + 2 \cos^2 t} = \sqrt{2}$ donde,

$$ds = \|\sigma'(t)\| dt = \sqrt{2} dt.$$

Então

$$\int_C x ds = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\sqrt{2} \cos t) \sqrt{2} dt = 2 \sin t \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 4 \text{ u.a.}$$

Interpretação Física

Se $\delta(x, y)$ representa a densidade (massa por unidade de comprimento) de um arame $C \subset \mathbb{R}^2$, então $\int_C \delta(x, y) ds$ representa a massa total do arame:

$$M = \int_C \delta(x, y) ds.$$

OBS.:

1. O centro de massa (\bar{x}, \bar{y}) do arame é dado por

$$M\bar{x} = \int_C x \delta(x, y) ds$$

$$M\bar{y} = \int_C y \delta(x, y) ds$$

2. O momento de inércia de $C \subset \mathbb{R}^2$ em relação a um eixo E é dado por

$$I_E = \int_C r^2(x, y) \delta(x, y) ds$$

onde $r(x, y) =$ distância de (x, y) ao eixo E .



3. Seja uma curva $C \subset \mathbb{R}^3$, representando um arame de densidade $\delta = \delta(x, y, z)$ em $(x, y, z) \in C$. Então, observe as seguintes fórmulas:

(i) Comprimento do arame: $L = \int_C ds$

(ii) Massa do arame: $M = \int_C \delta(x, y, z) ds$

(iii) Centro de massa do arame $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, onde

$$M\bar{x} = \int_C x\delta(x, y, z) ds$$

$$M\bar{y} = \int_C y\delta(x, y, z) ds$$

$$M\bar{z} = \int_C z\delta(x, y, z) ds$$

(iv) Momento de inércia do arame em relação a um eixo E :

$$I_E = \int_C r^2(x, y, z)\delta(x, y, z) ds$$

onde $r(x, y, z) =$ distância de (x, y, z) ao eixo E .

Exemplo 1

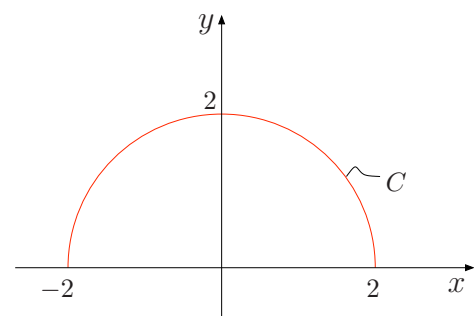
Um arame fino tem a forma de uma semicircunferência $x^2 + y^2 = 4, y \geq 0$. Se a densidade linear é uma constante k , determine a massa e o centro de massa do arame.

Solução:

O esboço de C está representado ao lado. Temos

$$\bar{x} = \frac{\int_C xk ds}{\int_C k ds} = \frac{\int_C x ds}{\int_C ds}$$

$$\bar{y} = \frac{\int_C y ds}{\int_C ds}$$



onde $\int_C ds = L = \frac{1}{2} \cdot 2\pi r = 2\pi$, pois $r = 2$. Como $M = \int_C k ds$ então $M = k \int_C ds = 2k\pi$. Uma parametrização de C é dado por:

$$\sigma(t) = (2 \cos t, 2 \sin t), \quad 0 \leq t \leq \pi.$$

Se $\sigma'(t) = (-2 \operatorname{sen} t, 2 \operatorname{cos} t, 0)$ então $\|\sigma'(t)\| = \sqrt{4 \operatorname{sen}^2 t + 4 \operatorname{cos}^2 t} = 2$. Como $ds = \|\sigma'(t)\| dt$, então $ds = 2 dt$. Temos:

$$\int_C x ds = \int_0^\pi (2 \operatorname{cos} t) 2 dt = 4 [\operatorname{sen} t]_0^\pi = 0$$

$$\int_C y ds = \int_0^\pi (2 \operatorname{sen} t) 2 dt = 4 [-\operatorname{cos} t]_0^\pi = 8$$

Logo,

$$\bar{x} = 0 \text{ e } \bar{y} = \frac{8}{2\pi} = \frac{4}{\pi}.$$

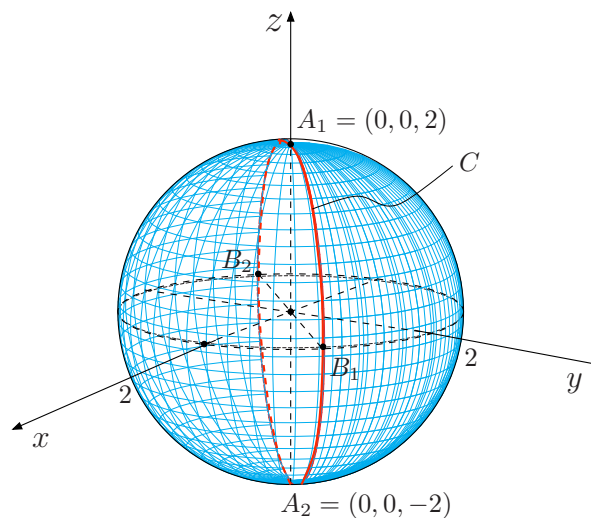
Portanto, $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 4/\pi)$.

Exemplo 2

Calcule o momento de inércia em relação ao eixo z de um arame C cuja forma é a interseção das superfícies $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ e $y = x$, sabendo que sua densidade é uma constante.

Solução:

Como a interseção de uma esfera com um plano é uma circunferência, segue que C é uma circunferência contida no plano $y = x$. Para esboçá-la procuremos encontrar pontos de interseção das suas superfícies. Observe que o plano $x = y$ contém o eixo z . Logo, os pontos $A_1 = (0, 0, 2)$ e $A_2 = (0, 0, -2)$ estão em C . Por outro lado, a reta $y = x$ do plano xy intercepta a esfera em dois pontos: B_1 e B_2 . Ligando os pontos A_1, A_2, B_1 e B_2 , encontramos a curva C .



Para parametrizar C , resolvemos o sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ y = x \end{cases}.$$

Temos $2x^2 + z^2 = 4$ ou $x^2/2 + z^2/4 = 1$, que representa a projeção de C no plano xz . Portanto, se $(x, y, z) \in C$, então x e z satisfazem a elipse $x^2/2 + z^2/4 = 1$. Logo, $x = \sqrt{2} \operatorname{cos} t$ e $z = 2 \operatorname{sen} t$, com $0 \leq t \leq 2\pi$. Como $y = x$, então $y = \sqrt{2} \operatorname{cos} t$. Portanto,

$$\sigma(t) = (\sqrt{2} \operatorname{cos} t, \sqrt{2} \operatorname{cos} t, 2 \operatorname{sen} t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

é uma parametrização de C .

Se $\sigma'(t) = (-\sqrt{2}\sin t, -\sqrt{2}\sin t, 2\cos t)$ então $\|\sigma'(t)\| = \sqrt{2\sin^2 t + 2\sin^2 t + 4\cos^2 t} = 2$. Assim, $ds = \|\sigma'(t)\| dt = 2 dt$. O momento de inércia em relação ao eixo z é dado por

$$\begin{aligned} I_z &= \int_C (x^2 + y^2) \delta(x, y) ds = k \int_C (x^2 + y^2) ds = k \int_0^{2\pi} (2\cos^2 t + 2\cos^2 t) 2 dt \\ &= 8k \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt \\ &= 8k \cdot \frac{1}{2} \left[t + \frac{\sin 2t}{2} \right]_0^{2\pi} \\ &= 8k\pi. \end{aligned}$$

Aula 14 – Campos Vetoriais

Objetivo

- Apresentar os campos vetoriais.
- Estudar alguns operadores diferenciais.

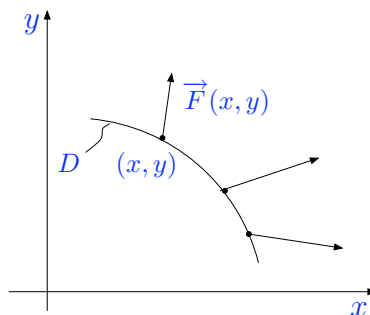
Definição de um campo vetorial

Definição:

Sejam P e Q funções reais de x e y , definidas em $D \subset \mathbb{R}^2$. A função vetorial $\vec{F} : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$\vec{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$$

é chamada de campo vetorial definido em $D \subset \mathbb{R}^2$.



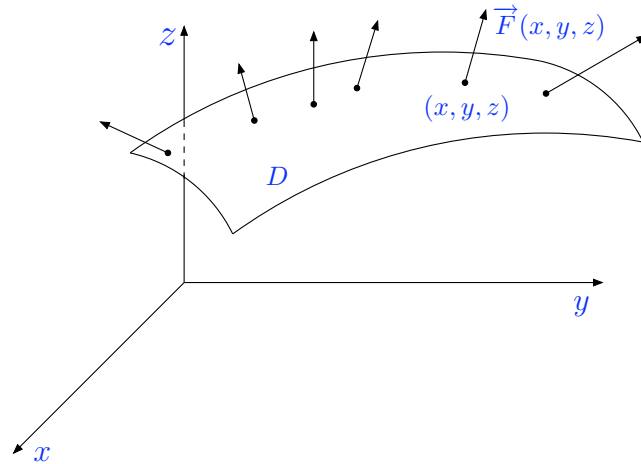
Outra notação: $\vec{F}(x, y) = (P, Q)$.

Definição:

Sejam P , Q e R funções reais de x , y e z , definidas em $D \subset \mathbb{R}^3$. Temos que a função vetorial $\vec{F} : D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$\vec{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)) = P(x, y, z) \vec{i} + Q(x, y, z) \vec{j} + R(x, y, z) \vec{k}$$

é chamada de campo vetorial definido em $D \subset \mathbb{R}^3$.

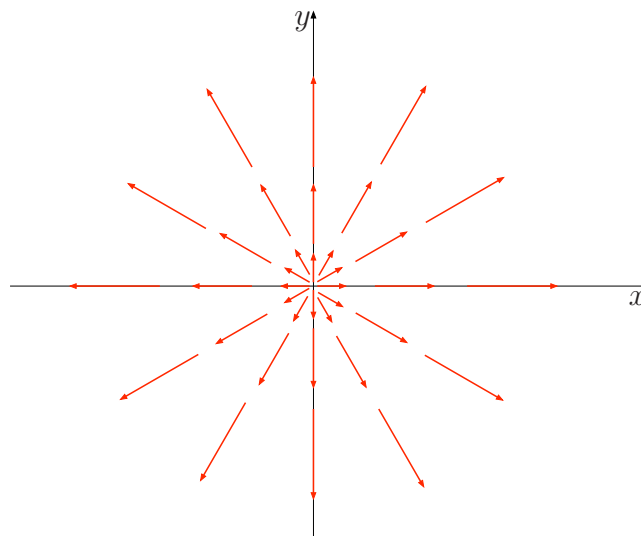


Os campos vetoriais são úteis para representar os campos de forças, campos de velocidades e campos elétricos.

Geometricamente, visualizamos um campo vetorial \vec{F} no plano esboçando vetores $\vec{F}(x, y)$ com origem em (x, y) .

Exemplo 1

O campo vetorial $\vec{F}(x, y) = (x, y) = x \vec{i} + y \vec{j}$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, está representado por:

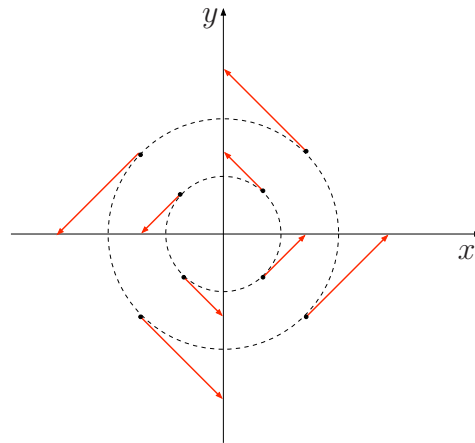


Exemplo 2

Faça a representação geométrica do campo vetorial $\vec{F}(x, y) = (-y, x) = -y\vec{i} + x\vec{j}$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Solução:

Observemos que $\|\vec{F}(x, y)\| = \sqrt{y^2 + x^2} = \|(x, y)\|$, isto é, os vetores $\vec{F}(x, y)$ e (x, y) têm mesmo comprimento. Além disso, $\vec{F}(x, y) \cdot (x, y) = (-y, x) \cdot (x, y) = -yx + xy = 0$, donde $\vec{F}(x, y) \perp (x, y)$. Então o esboço do campo é:



Definição:

Dizemos que o campo vetorial \vec{F} é contínuo, de classe C^k , $k \in \mathbb{N}^*$ ou C^∞ se as funções componentes P e Q (ou P, Q, R) são contínuas, de classe C^k ou C^∞ , respectivamente.

Operadores diferenciais

Se $\vec{F} = (P, Q, R)$ é campo vetorial diferenciável em um conjunto aberto D do \mathbb{R}^3 , então o divergente de \vec{F} é um *campo escalar* definido por

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \quad (1)$$

Se $\vec{F} = (P, Q)$ é de classe C^1 em um aberto D do \mathbb{R}^2 , então $\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$.

O rotacional de \vec{F} é um campo vetorial definido por

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k} \quad (2)$$

Vamos expressar (1) e (2) usando a notação de operador. Então, consideremos o operador diferencial vetorial ∇ ("del") dado por

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

O operador ∇ sobre uma função escalar f (ou um campo escalar) produz o gradiente de f :

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right).$$

Consideremos o “produto vetorial” de ∇ pelo campo vetorial $\vec{F} = (P, Q, R)$:

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{F} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ P & Q & R \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ Q & R \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} \partial/\partial x & \partial/\partial z \\ P & R \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} \partial/\partial x & \partial/\partial y \\ P & Q \end{vmatrix} \vec{k} \\ &= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} - \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k} \\ &= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k} \\ &= \text{rot } \vec{F}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\text{rot } \vec{F} = \nabla \times \vec{F}.$$

Consideremos o “produto interno” de ∇ pelo campo \vec{F} :

$$\nabla \cdot \vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (P, Q, R) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \text{div } \vec{F}.$$

Assim,

$$\text{div } \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F}.$$

Exemplo 1

Calcule o divergente e o rotacional do campo vetorial $\vec{F}(x, y, z) = xy \vec{i} + yz \vec{j} + zx \vec{k}$.

Solução:

Temos

$$\text{div } \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}(xy) + \frac{\partial}{\partial y}(yz) + \frac{\partial}{\partial z}(zx) = y + z + x.$$

e

$$\text{rot } \vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ xy & yz & zx \end{vmatrix} = (0-y) \vec{i} + (0-z) \vec{j} + (0-x) \vec{k} = -y \vec{i} - z \vec{j} - x \vec{k}.$$

A seguir, apresentaremos algumas propriedades para o rotacional e o divergente.

Se f e \vec{F} são de classe C^2 , então

- (i) $\text{rot}(\text{grad} f) = \vec{0}$ ou $\nabla \times (\nabla f) = \vec{0}$
- (ii) $\text{div}(\text{rot} \vec{F}) = 0$ ou $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = 0$
- (iii) $\text{div}(\text{grad} f) = \text{lap} f$ ou $\nabla \cdot (\nabla f) = \nabla^2 f$ onde $\text{lap} f = \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ é dito *laplaciano de f* .
- (iv) $\nabla \cdot (f \vec{F}) = f \nabla \cdot \vec{F} + \nabla f \cdot \vec{F}$.

As demonstrações de (i) e (ii) seguem das definições e do Teorema de Schwartz. A demonstração de (iii) segue das definições. Demonstraremos a propriedade (iv). Escrevendo $\vec{F} = (P, Q, R)$, temos $f \vec{F} = (fP, fQ, fR)$. Então

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (f \vec{F}) &= \frac{\partial}{\partial x}(fP) + \frac{\partial}{\partial y}(fQ) + \frac{\partial}{\partial z}(fR) = f \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot P + f \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot Q + f \frac{\partial R}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot R \\ &= f \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) \cdot (P, Q, R) \\ &= f \nabla \cdot \vec{F} + \nabla f \cdot \vec{F}. \end{aligned}$$

como queremos demonstrar.



OBS.: Se $\vec{F}(x, y) = P(x, y) \vec{i} + Q(x, y) \vec{j}$, então:

$$\text{rot} \vec{F} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k}.$$

Até a próxima aula.

Rioco K. Barreto

Coordenadora de Cálculo IV

Exercício 1: Use a integral de linha para encontrar a área da superfície lateral sobre a curva C e abaixo da superfície $z = f(x, y)$, onde

- a) $C : x^2 + y^2 = 1$, com $y \geq 0$ de $(1, 0)$ a $(0, 1)$ e $f(x, y) = xy$
- b) $C : y = 1 - x^2$ de $(1, 0)$ a $(0, 1)$ e $f(x, y) = x$

Exercício 2: Determine a massa de um fio com a forma da curva $y = \ln x$, com $\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8}$, se a densidade em cada ponto é igual ao quadrado da abscissa do ponto.

Exercício 3: Determine a massa de uma quarta parte da circunferência $x^2 + y^2 = a^2$, situada no primeiro quadrante se a densidade em cada ponto é igual a ordenada desse ponto.

Exercício 4: Calcule o centro de massa do fio C parametrizado por $\vec{r}(t) = (t, t, t)$, com $0 \leq t \leq 1$, com densidade linear $\delta(x, y, z) = xyz$.

Exercício 5: Seja C um fio delgado com a forma da interseção da superfície $x^2 + y^2 + z^2 = 5$, com $z \geq 0$ com o plano $x + y = 1$. Calcule o momento de inércia de C em relação ao eixo z , se a densidade em cada ponto é proporcional à sua distância ao plano xy .

Exercício 6: Calcule a massa de um arame fino com o formato da hélice $x = 3 \cos t$, $y = 3 \sin t$ e $z = 4t$, com $0 \leq t \leq \pi/2$, se a densidade for $\delta(x, y, z) = \frac{kx}{1+y^2}$, com $k > 0$.

Exercício 7: Calcule $\text{div } \vec{F}$ e $\text{rot } \vec{F}$ sendo:

a) $\vec{F}(x, y, z) = (2z - 3y, 3x - z, y - 2x)$

b) $\vec{F}(x, y, z) = (z + \sin y) \vec{i} - (z - x \cos y) \vec{j}$

Exercício 8: Se $\vec{r} = (x, y, z)$ e \vec{a} é um vetor constante, demonstre que $\text{rot}(\vec{a} \times \vec{r}) = 2\vec{a}$ e $\text{div}(\vec{a} \times \vec{r}) = 0$.

Cálculo IV – EP9

Aula 15 – Integral de Linha de Campo Vetorial

Objetivo

- Definir integrais de linha.
- Estudar algumas propriedades.

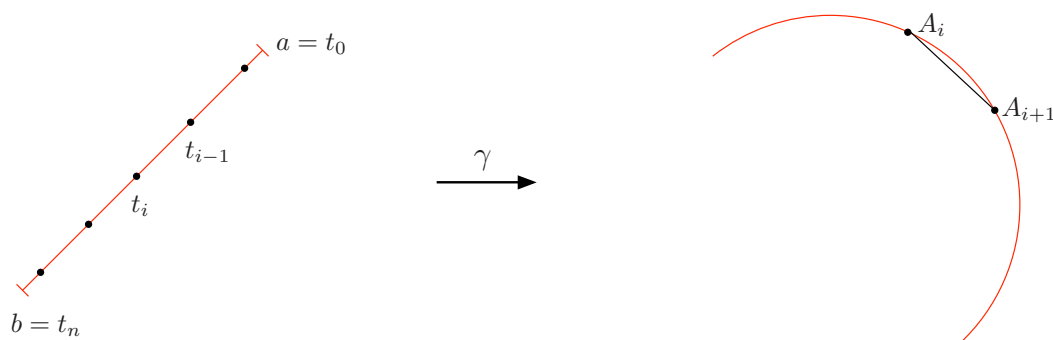
Integral de Linha de Campo Vetorial

Motivação

Considere uma partícula que se move ao longo de uma curva $C : \gamma(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [a, b]$, sob a ação de um campo de forças $\vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$. Queremos calcular o trabalho realizado pela força \vec{F} quando a partícula se desloca de $A = \gamma(a)$ até $B = \gamma(b)$.

Da física, temos que no caso em que \vec{F} é constante e C é um segmento de reta, o trabalho é dado pelo produto escalar $W = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB}$.

No caso geral, dividimos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos $[t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, \dots, n$, de mesmo comprimento $\Delta t = t_i - t_{i-1}$. Temos n subarcs $\gamma([t_{i-1}, t_i]) = C_i$ e n segmentos $[A_{i-1}, A_i]$, $A_i = \gamma(t_i) = (x(t_i), y(t_i))$, com $i = 1, \dots, n$.



Supondo \vec{F} constante ao longo do segmento $[A_{i-1}, A_i]$, o trabalho ao longo de C_i é aproximadamente igual ao produto escalar

$$W_i \cong \vec{F}(\gamma(t_i)) \cdot \overrightarrow{A_{i-1}A_i} = \vec{F}(\gamma(t_i)) \cdot (A_i - A_{i-1}) = P(x(t_i), y(t_i))\Delta x + Q(x(t_i), y(t_i))\Delta y$$

onde $\Delta x = x(t_i) - x(t_{i-1})$ e $\Delta y = y(t_i) - y(t_{i-1})$.

Pelo Teorema do Valor Médio, temos $\Delta x = x'(t_i^*) \Delta t$, com $t_i^* \in]t_{i-1}, t_i[$ e $\Delta y = y'(t_i^{**}) \Delta t$, com $t_i^{**} \in]t_{i-1}, t_i[$. Logo,

$$W_i \cong \left[P(x(t_i), y(t_i))x'(t_i^*) + Q(x(t_i), y(t_i))y'(t_i^{**}) \right] \Delta t$$

donde

$$W \cong \sum_{i=1}^n \left[P(x(t_i), y(t_i))x'(t_i^*) + Q(x(t_i), y(t_i))y'(t_i^{**}) \right] \Delta t = S_n.$$

Assim, definimos $W = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} S_n$. Então

$$W = \int_a^b \left[P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t) \right] dt.$$

Esta motivação sugere a definição que se segue.

Definição:

Seja $C \subset \mathbb{R}^3$, uma curva regular, dada por uma parametrização $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ de classe C^1 , tal que $\gamma'(t) \neq 0$, para todo $t \in]a, b[$. Seja $\vec{F} = (P, Q, R)$ um campo vetorial contínuo sobre C . Então a integral de linha do campo \vec{F} ao longo de C , denotado por $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, é definida por

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \\ &= \int_a^b \left[P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) + R(x(t), y(t), z(t))z'(t) \right] dt. \end{aligned}$$

OBS.:

1. Seja C uma curva regular por partes: $C = C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_n$. Então

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \dots + \int_{C_n} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

2. A integral de linha de um campo vetorial \vec{F} , $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, não depende da parametrização de C , desde que não se inverta sua orientação. Isto é, denotando por C^- a curva C percorrida em outro sentido, então

$$\int_{C^-} \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

3. Se C é uma curva fechada ($\gamma(a) = \gamma(b)$) e está orientada no sentido anti-horário, denotamos a integral de linha por $\oint_{C^+} \vec{F} \cdot d\vec{r}$. Caso contrário, denotamos por $\oint_{C^-} \vec{F} \cdot d\vec{r}$.



Exemplo 1

Seja $\vec{F}(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Temos que a integral de linha \vec{F} ao longo de uma hélice $C : \gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$, com $0 \leq t \leq 2\pi$ é dada por

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot (\gamma'(t)) dt = \int_0^{2\pi} (\cos t, \sin t, t) \cdot (-\sin t, \cos t, 1) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-\cos t \sin t + \sin t \cos t + t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} t dt \\ &= \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^{2\pi} \\ &= 2\pi^2. \end{aligned}$$

Uma outra notação

Sabemos que $dx = x'(t) dt$, $dy = y'(t) dt$ e $dz = z'(t) dt$. Se usarmos a convenção $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k} = (dx, dy, dz)$, temos

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_C (P, Q, R) \cdot (dx, dy, dz) \\ &= \int_C P dx + Q dy + R dz \\ &= \int_a^b \left[P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) + R(x(t), y(t), z(t))z'(t) \right] dt. \end{aligned}$$

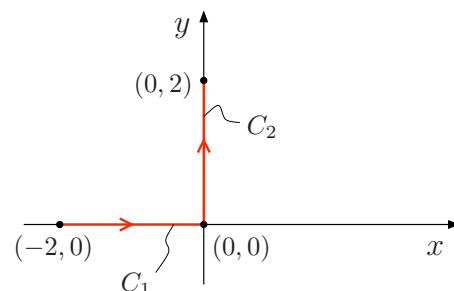
Logo, uma outra notação é $\int_C P dx + Q dy + R dz$.

Exemplo 2

Calcule $\int_C y dx + (x^2 + y^2) dy$, onde C é formado pelos segmentos que ligam $(-2, 0)$ a $(0, 0)$ e $(0, 0)$ a $(0, 2)$.

Solução:

O esboço de $C = C_1 \cup C_2$ está representado na figura ao lado.



C_1 e C_2 podem ser parametrizadas por

$$C_1 : \begin{cases} x = t \\ y = 0, \end{cases} \quad -2 \leq t \leq 0, \quad \text{donde } dx = dt \text{ e } dy = 0.$$

$$C_2 : \begin{cases} x = 0 \\ y = t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2, \quad \text{donde } dx = 0 \text{ e } dy = dt.$$

Temos

$$\int_{C_1} y \, dx + (x^2 + y^2) \, dy = \int_{-2}^0 0 \, dt + (t^2 + 0^2) \cdot 0 = 0$$

$$\int_{C_2} y \, dx + (x^2 + y^2) \, dy = \int_0^2 t \cdot 0 + (0^2 + t^2) \, dt = \int_0^2 t^2 \, dt = \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^2 = \frac{8}{3}.$$

Logo,

$$\int_C y \, dx + (x^2 + y^2) \, dy = 0 + \frac{8}{3} = \frac{8}{3}.$$

Aula 16 – Campos Conservativos

Objetivo

- Estudar uma classe de campos vetoriais que tem a propriedade de que a integral de linha não depende do caminho.
- Cálculo de funções potenciais.

Campos Conservativos

Dizemos que $\vec{F} : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, ($n = 2, 3$) é um **campo conservativo** ou um **campo gradiente** se existir um campo escalar diferenciável $\varphi : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $\nabla\varphi = \vec{F}$ em D .

O campo escalar $\varphi : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é dito função potencial de \vec{F} em D .

Exemplo

O campo vetorial $\vec{F}(x, y, z) = (2x + 3yz)\vec{i} + 3xz\vec{j} + 3xy\vec{k}$ é um campo conservativo em \mathbb{R}^3 , pois existe $\varphi(x, y, z) = x^2 + 3xyz$ diferenciável em \mathbb{R}^3 , tal que $\nabla\varphi = \vec{F}$ em \mathbb{R}^3 .

A seguir apresentaremos alguns resultados dos campos conservativos.

Teorema 1: Seja $\vec{F} : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, ($n = 2, 3$) um campo vetorial de classe C^1 . Se \vec{F} é conservativo, então $\text{rot } \vec{F} = \vec{0}$.

Demonstração:

Suponhamos $n = 3$. Então $\vec{F} = (P, Q, R)$. Se \vec{F} é conservativo, então existe $\varphi : D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\nabla\varphi = \vec{F}$. Logo, $\text{rot } \vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \nabla \times (\nabla\varphi) = \vec{0}$ por propriedade dos operadores diferenciais.

■

Mais adiante veremos um exemplo de um campo vetorial, não conservativo, com rotacional nulo.



OBS.: O Teorema 1 também pode ser enunciado da seguinte maneira:

“Se $\text{rot } \vec{F} \neq \vec{0}$ em D então \vec{F} não é conservativo em D ”.

Exemplo 1

Temos que $\vec{F}(x, y) = \frac{2x}{x^2+y^2} \vec{i} + \frac{2y}{x^2+y^2} \vec{j}$ é um campo conservativo em $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ pois existe $\varphi(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ tal que $\nabla\varphi = \vec{F}$ em $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$.

Exemplo 2

Temos que $\vec{F}(x, y) = -2y \vec{i} + 2x \vec{j}$ não é um campo conservativo. Ora, temos que

$$\text{rot } \vec{F}(x, y) = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k} = (2 - (-2)) \vec{k} = 4 \vec{k} \neq \vec{0}.$$

Teorema 2: Seja $\vec{F} : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, ($n = 2, 3$) de classe C^2 . Se \vec{F} é conservativo, isto é, $\vec{F} = \nabla\varphi$ em D , e se C é qualquer curva regular por partes com ponto inicial A e ponto final B , então

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C \nabla\varphi \cdot d\vec{r} = \varphi(B) - \varphi(A).$$

Demonstração:

A demonstração segue da definição de integral de linha e da regra da cadeia (ver Teorema 6.2 do livro).

■

Este resultado é conhecido como Teorema Fundamental do Cálculo para Integrais de Linha. É dele que concluímos que a integral de linha de um campo conservativo só depende dos pontos A e B e não depende da trajetória que os une.

Teorema 3: Se $\vec{F} : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, ($n = 2, 3$) é conservativo, então $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ qualquer que seja o caminho fechado.

Demonstração:

A demonstração segue do Teorema 2 pois C sendo um caminho fechado, tem-se que o ponto final B coincide com o ponto inicial A , donde $\varphi(B) - \varphi(A) = 0$ e, portanto a integral de linha é zero. ■

Este Teorema também pode ser enunciado da seguinte maneira:

"Se $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} \neq 0$ para alguma curva fechada C então \vec{F} não é conservativo".

Exemplo 3

Calcule $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, onde $\vec{F}(x, y) = x\vec{i} + y\vec{j}$ e C é dada por $\gamma(t) = (\arctg t, \cos t^4)$, $0 \leq t \leq 1$.

Solução:

Observemos que \vec{F} é um campo conservativo em \mathbb{R}^2 com função potencial $\varphi(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$. Assim

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \varphi(\gamma(1)) - \varphi(\gamma(0)) = \varphi(\arctg 1, \cos 1) - \varphi(\arctg 0, \cos 0) \\ &= \varphi\left(\frac{\pi}{4}, \cos 1\right) - \varphi(0, 1) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\pi^2}{16} + \cos^2 1 \right) - \frac{1}{2} (0^2 + 1^2) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\pi^2}{16} - 1 + \cos^2 1 \right). \end{aligned}$$

A seguir exibiremos um campo vetorial não conservativo com rotacional $\vec{0}$, o que mostra que a recíproca do Teorema 1 é falsa.

Exemplo 4

Seja $\vec{F}(x, y) = \frac{-y}{x^2+y^2}\vec{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\vec{j}$, $(x, y) \in D = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$. Como $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ (verifique!) então $\text{rot } \vec{F} = \vec{0}$ em D . Calculemos $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, onde C é a circunferência $\gamma(t) = (a \cos t, a \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Temos

$$\begin{aligned}
\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_C \frac{-y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy = \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{-a \sin t}{a^2} \right) (-a \sin t) + \left(\frac{a \cos t}{a^2} \right) (a \cos t) \right] dt \\
&= \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt \\
&= 2\pi \neq 0 \tag{1}
\end{aligned}$$

Se \vec{F} fosse conservativo, teríamos encontrado, pelo Teorema 3, que $\oint_{C^+} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$, o que contradiz (1). Logo, \vec{F} não é conservativo.

Na aula 18, veremos para o caso $n = 2$, que impondo certas condições ao domínio de \vec{F} , prova-se que a recíproca do Teorema 1 é verdadeira.

Cálculo de Funções Potenciais

Exemplo 5

Sabe-se que $\vec{F}(x, y) = (2xy^2 - y^3, 2x^2y - 3xy^2 + 2)$ é um campo gradiente. Determine uma função potencial.

Solução:

Para determinar uma função potencial $\varphi(x, y)$ devemos ter

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 2xy^2 - y^3 \tag{2}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 2x^2y - 3xy^2 + 2 \tag{3}$$

Integrando (2) em relação a x , temos

$$\varphi(x, y) = x^2y^2 - xy^3 + f(y) \tag{4}$$

Integrando (3) em relação a y , temos

$$\varphi(x, y) = x^2y^2 - xy^3 + 2y + g(x) \tag{5}$$

De (4) e (5), vemos que tomando $f(y) = 2y$ e $g(x) = 0$, segue que uma função potencial é

$$\varphi(x, y) = x^2y^2 - xy^3 + 2y.$$

Exemplo 6

Sabe-se que $\vec{F}(x, y, z) = 2xy \vec{i} + (x^2 + z \cos(yz)) \vec{j} + y \cos(yz) \vec{k}$ é um campo conservativo. Determine uma função potencial.

Solução:

Devemos ter:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 2xy \quad (6)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = x^2 + z \cos(yz) \quad (7)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = y \cos(yz) \quad (8)$$

Integrando (6), (7) e (8) em relação a x , y e z respectivamente, temos

$$\varphi(x, y, z) = x^2 y + f(y, z) \quad (9)$$

$$\varphi(x, y, z) = x^2 y + \text{sen}(yz) + g(x, z) \quad (10)$$

$$\varphi(x, y, z) = \text{sen}(yz) + h(x, y) \quad (11)$$

De (9), (10) e (11), devemos ter $f(y, z) = \text{sen}(yz)$, $g(x, z) = 0$ e $h(x, y) = x^2 y$. Logo,

$$\varphi(x, y, z) = x^2 y + \text{sen}(yz)$$

é uma função potencial de \vec{F} .

Até a próxima semana,

Rioco K. Barreto

Coordenadora de Cálculo IV

Exercício 1: Calcule $\int_C x \, dx + x^2 \, dy$ de $(-1, 0)$ a $(1, 0)$

- ao longo do eixo x
- ao longo de $C : \vec{r}(t) = (-\cos t, \text{sen } t)$, com $0 \leq t \leq \pi$.
- ao longo da poligonal de vértices $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$ e $(1, 0)$.

Exercício 2: Calcule os valores de $\int_C -2xy \, dx + (x^2 + y^2) \, dy$ ao longo do caminho C

- parte superior da circunferência $x^2 + y^2 = a^2$ de $(a, 0)$ a $(-a, 0)$
- parte superior da elipse $x^2 + 4y^2 = 2x$, orientada no sentido anti-horário.

Exercício 3: Calcule o trabalho realizado pela força $\vec{F}(x, y) = (x, -y)$ para deslocar uma partícula ao longo da curva fechada $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$, onde C_1 : segmento de reta de $O = (0, 0)$ a $A = (1, 1)$; C_2 : parte da curva $4x^2 - 12x + 4y^2 - 8y + 12 = 0$, com $y \geq 1$, do ponto $A = (1, 1)$ a $B = (2, 1)$; C_3 : segmento de reta BO .

Exercício 4: Calcule $\int_C 2x \, dx - 3y \, dy + z^2 \, dz$, onde C é o segmento de reta unindo $(1, 0, 0)$ a $(0, 1, \pi/2)$.

Exercício 5: Determine o trabalho realizado pela força $\vec{F}(x, y, z) = (3y + z)\vec{i} + (y - 3x)\vec{j} + (e^z + x)\vec{k}$ para deslocar uma partícula ao longo da curva C interseção do cilindro $x^2 + y^2 = 1$ com o plano $z = 5$, orientada no sentido anti-horário quando vista de cima.

Exercício 6: Calcule $\int_C z dx + y dy - x dz$, onde C é a interseção das superfícies $y + z = 8$ e $x^2 + y^2 + z^2 - 8z = 0$, com $x \geq 0$, no sentido anti-horário quando vista de cima.

Exercício 7: Sabe-se que o campo $\vec{F} = (e^{x+y} + 1)\vec{i} + ex + y\vec{j}$ é um campo conservativo em \mathbb{R}^2 .

a) Encontre uma função potencial para \vec{F} .

b) Calcule $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ onde C é o arco de circunferência $(x - 1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$, com $x \geq 1$ que vai de $(1, 0)$ a $(1, 1)$.

Exercício 8: Determine uma função potencial para cada campo conservativo.

a) $\vec{F}(x, y) = (x^2 + y^2)\vec{i} + 2xy\vec{j}$.

b) $\vec{F}(x, y) = (\cos(xy) - xy \operatorname{sen}(xy))\vec{i} - (x^2 \operatorname{sen}(xy))\vec{j}$.

c) $\vec{F}(x, y) = (6xy^3 + 2z^2, 9x^2y^2, 4xz + 1)$.

Cálculo IV – EP10

Aula 17 – Teorema de Green

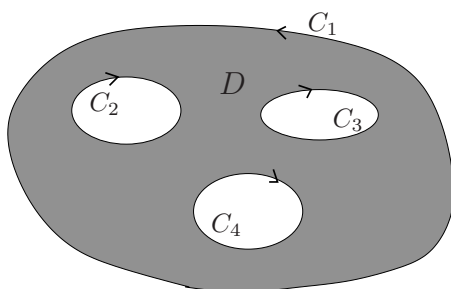
Objetivo

- Estudar um teorema que estabelece uma ligação importante entre integrais de linha e integrais duplas.

O Teorema de Green

Teorema: Seja D uma região fechada e limitada de \mathbb{R}^2 , cuja fronteira ∂D é formada por um número finito de curvas simples, fechadas e C^1 por partes, duas a duas disjuntas, orientadas no sentido que deixa D à esquerda das curvas, (isto é, ∂D está orientada positivamente). Seja $F = P(x, y) \vec{i} + Q(x, y) \vec{j}$ um campo vetorial de classe C^1 em um conjunto aberto U com $D \subset U$. Então

$$\oint_{\partial D^+} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_{\partial D^+} P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$



No caso, $\partial D = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$ e

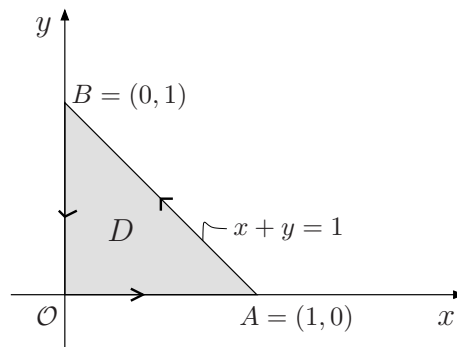
$$\oint_{\partial D^+} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_{C_1^+} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \oint_{C_2^-} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \oint_{C_3^-} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \oint_{C_4^-} \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$



OBS.: Geralmente, usamos o Teorema de Green, quando $\oint_{C^+} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ é difícil de ser calculada diretamente.

Exemplo 1

Seja $\vec{F}(x, y) = (2x + y)\vec{i} + (3y + 4x)\vec{j}$. Vamos calcular as duas integrais do enunciado do Teorema de Green, para D a região triangular de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(0, 1)$.



Temos $\partial D = OA \cup AB \cup BO$.

Cálculo de $\int_{OA} \vec{F} \cdot d\vec{r}$

Temos $OA : y = 0, 0 \leq x \leq 1$, donde $dy = 0$. Então

$$\int_{OA} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{OA} P(x, 0) dx = \int_0^1 2x dx = [x^2]_0^1 = 1.$$

Cálculo de $\int_{AB} \vec{F} \cdot d\vec{r}$

Temos $AB : x = 1 - y, 0 \leq y \leq 1$, donde $dx = -dy$. Então

$$\begin{aligned} \int_{AB} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_{AB} P(1 - y, y) (-dy) + Q(1 - y, y) dy \\ &= \int_0^1 -[2(1 - y) + y] dy + [3y + 4(1 - y)] dy \\ &= \int_0^1 (-2 + 2y - y + 3y + 4 - 4y) dy \\ &= \int_0^1 2 dy \\ &= [2y]_0^1 \\ &= 2. \end{aligned}$$

$$\text{Cálculo de } \int_{BO} \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_{OB} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Temos $OB : x = 0, 0 \leq y \leq 1$, donde $dx = 0$. Então

$$\int_{BO} \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_{OB} Q(0, y) dy = - \int_0^1 (3y + 0) dy = - \left[\frac{3y^2}{2} \right]_0^1 = -\frac{3}{2}.$$

Somando, temos

$$\oint_{\partial D^+} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 1 + 2 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}.$$

Por outro lado,

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D (4 - 1) dx dy = 3A(D) = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{3}{2}.$$

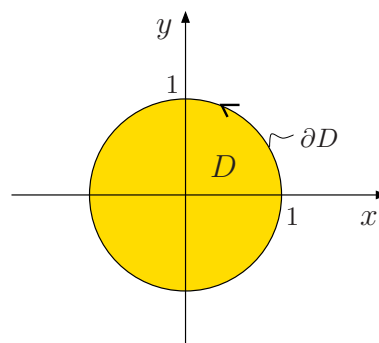
Exemplo 2

Seja $\vec{F}(x, y) = -x^2y \vec{i} + xy^2 \vec{j}$ e D o disco de centro $(0, 0)$ e raio 1. Calculemos $\oint_{\partial D^+} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, para ∂D orientada no sentido anti-horário.

Solução:

Do Teorema de Green, temos

$$\oint_{\partial D^+} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D (y^2 + x^2) dx dy.$$



Passando para coordenadas polares, temos

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ dx dy = r dr d\theta \\ x^2 + y^2 = r^2 \end{cases}$$

e $D_{r\theta}$ é dado por

$$D_{r\theta} : \begin{cases} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

Então

$$\oint_{\partial D^+} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{D_{r\theta}} r^2 \cdot r \, dr d\theta = \int_{D_{r\theta}} r^3 \, dr d\theta = \int_0^1 r^3 \int_0^{2\pi} d\theta \, dr = 2\pi \int_0^1 r^3 \, dr = 2\pi \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

Exemplo 3

Seja $\vec{F}(x, y) = \frac{-y}{x^2+y^2} \vec{i} + \frac{x}{x^2+y^2} \vec{j}$ definido em $D = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$. Calculemos:

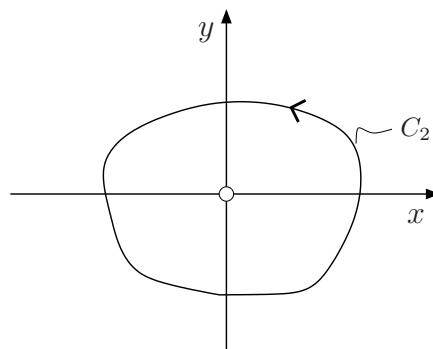
- a) $\int_{C_1^+} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, sendo $C_1 : x^2 + y^2 = a^2, a > 0$;
- b) $\int_{C_2^+} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, sendo C_2 uma curva fechada, C^1 por partes, que envolve a origem.

Solução:

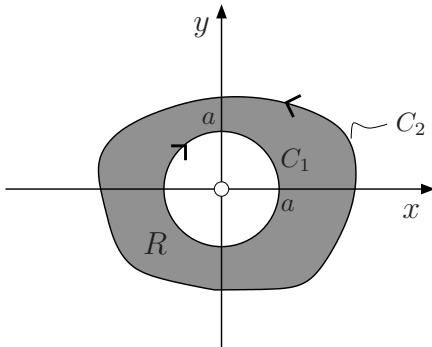
a) Observemos que a região limitada por C_1 não está contida em D , pois $(0, 0) \notin D$. Então não podemos aplicar o Teorema de Green. Sendo assim, usaremos a definição. Parametrizando C_1 , temos $x = a \cos t$ e $y = a \sin t$, com $0 \leq t \leq 2\pi$ donde $dx = -a \sin t \, dt$ e $dy = a \cos t \, dt$. Então

$$\begin{aligned} \int_{C_1^+} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_{C_1^+} \frac{-y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy = \int_0^{2\pi} \left[\frac{-a \sin t}{a^2} (-a \sin t) + \frac{a \cos t}{a^2} (a \cos t) \right] dt \\ &= \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} dt \\ &= 2\pi. \end{aligned}$$

b)



Aqui também não podemos aplicar o Teorema de Green, pois $(0,0)$ está na região limitada por C_2 e $(0,0) \notin D$. Usar a definição é impossível pois nem conhecemos uma equação de C_2 . Então o que fazer?



A idéia é de isolar $(0,0)$ por uma circunferência $C_1 : x^2 + y^2 = a^2$ com o raio a adequado de modo que C_1 esteja no interior da região limitada por C_2 , orientada no sentido horário.

Seja R a região limitada por C_1 e C_2 . Logo, $\partial R = C_2 \cup C_1$. Como R não contém $(0,0)$, então podemos aplicar o Teorema de Green em R . Temos

$$\oint_{\partial R^+} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

Como $\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) = 0$ (Verifique!) então $\oint_{\partial R^+} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$. Logo, $\oint_{C_2^+} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \oint_{C_1^-} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ donde $\oint_{C_2^+} \vec{F} \cdot d\vec{r} - \oint_{C_1^+} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ ou $\oint_{C_2^+} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_{C_1^+} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 2\pi$ por (a).

Exemplo 4

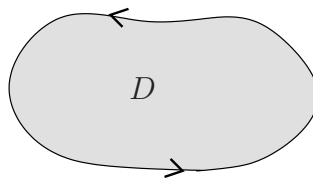
a) Se D é uma região plana qualquer à qual se aplica o Teorema de Green, mostre que a área de

$$D \text{ é dada por } A(D) = \oint_{\partial D^+} -y dx \text{ ou } A(D) = \oint_{\partial D^+} x dy \text{ ou } A(D) = \frac{1}{2} \oint_C -y dx + x dy.$$

b) Aplique uma das fórmulas acima para mostrar que a área limitada pela elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ é πab .

Solução:

a)

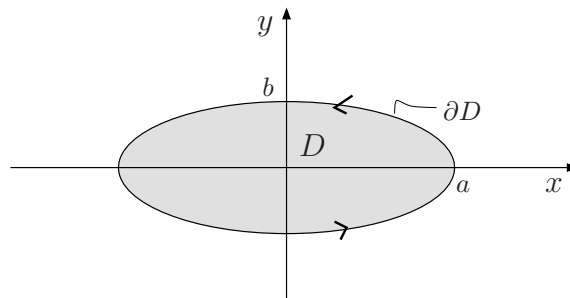


Pelo Teorema de Green, tem-se

$$\begin{aligned} \oint_{\partial D^+} -y dx &= \oint_{\partial D^+} -y dx + 0 dy = \iint_D \left(\frac{\partial 0}{\partial x} - \frac{\partial(-y)}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D (0 + 1) dx dy \\ &= \iint_D dx dy \\ &= A(D). \end{aligned}$$

Logo, $A(D) = \oint_{\partial D^+} -y \, dx$. Analogamente, prova-se as outras fórmulas.

b) O esboço de D é:



A área de D é dada por $A(D) = \oint_{\partial D^+} -y \, dx$ onde ∂D é parametrizada por

$$\begin{cases} \gamma(t) = (a \cos t, b \sin t) \\ \gamma'(t) = (-a \sin t, b \cos t) \end{cases}, 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Então

$$\begin{aligned} A(D) &= \int_0^{2\pi} (-b \sin t)(-a \sin t) \, dt = \int_0^{2\pi} ab \sin^2 t \, dt \\ &= ab \cdot \frac{1}{2} \left[t - \frac{\sin 2t}{2} \right]_0^{2\pi} \\ &= ab \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\pi \\ &= \pi ab \text{ u.a.} \end{aligned}$$

Aula 18 – Teorema das Quatro Equivalências

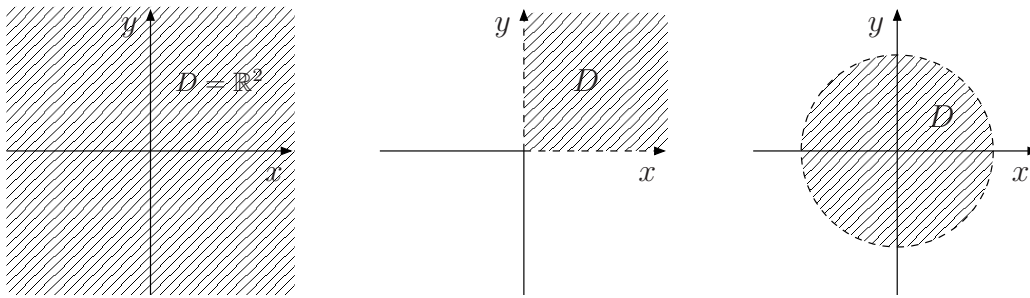
Objetivo

- Estudar condições sobre o domínio de \vec{F} para que valha a recíproca do Teorema 1, da aula 16, isto é, em que domínios, campos de rotacional nulo são conservativos?

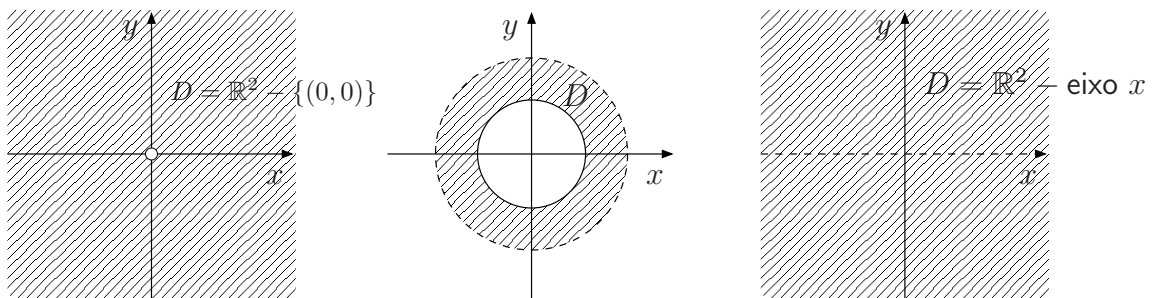
Condições sobre D

- D é aberto.
- D é conexo (isto é, dois pontos quaisquer de D podem ser ligados por uma curva contida em D).
- D é “sem buracos” (isto é, qualquer curva fechada de D delimita uma região inteiramente contida em D).

Um conjunto satisfazendo as condições (i), (ii) e (iii) é dito um conjunto **simplesmente conexo**. A seguir daremos exemplos de conjuntos simplesmente conexos.



Agora, daremos exemplos de conjuntos não simplesmente conexos.



OBS.: Seja $D \subset \mathbb{R}^3$. Dizemos que D é um conjunto simplesmente conexo se D é aberto, conexo e "sem buracos" (no sentido de que qualquer curva fechada de D delimita uma superfície inteiramente contida em D).

Exemplo

O \mathbb{R}^3 , uma bola aberta em \mathbb{R}^3 , o $\mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}$ são conjuntos simplesmente conexos. O \mathbb{R}^3 sem uma reta não é simplesmente conexo.

Teorema 1: Seja \vec{F} um campo de classe C^1 em um domínio D de \mathbb{R}^2 , simplesmente conexo. Se $\text{rot } \vec{F} = \vec{0}$ então \vec{F} é conservativo.

Demonstração

O fato de que D é um conjunto simplesmente conexo e $\text{rot } \vec{F} = \vec{0}$ segue do Teorema de Green que $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ para todo caminho fechado de D . Daí mostramos que $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ não depende do caminho. Em seguida, mostra-se que \vec{F} é conservativo.



Do Teorema 1 e de teoremas da aula 16, enunciamos um teorema contendo quatro equivalências.

Teorema das quatro equivalências: Seja $\vec{F} = (P, Q) : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo de classe C^1 em D . Se $D \subset \mathbb{R}^2$ é um conjunto simplesmente conexo, então as seguintes afirmações são equivalentes:

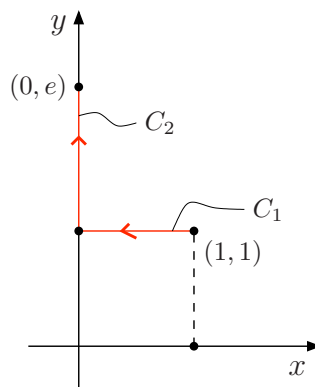
- $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ em D
- $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ qualquer que seja a curva fechada C de D .
- $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ não depende do caminho C de D .
- \vec{F} é conservativo.

Exemplo 1

Considere a curva C dada por $\sigma(t) = (-\cos \frac{\pi}{t}, e^{t-1})$, $1 \leq t \leq 2$. Calcule $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, onde $\vec{F}(x, y) = (-y^2 \sin x, 2y \cos x)$.

Solução:

Como \vec{F} é de classe C^1 em \mathbb{R}^2 (que é um conjunto simplesmente conexo) e $\frac{\partial Q}{\partial x} = -2y \sin x = \frac{\partial P}{\partial y}$, então pelo teorema das quatro equivalências, segue que $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ não depende do caminho que liga $\sigma(1) = (1, 1)$ e $\sigma(2) = (0, e)$. Então considere $C = C_1 \cup C_2$, onde $C_1^- : y = 1, 0 \leq x \leq 1$, donde $dy = 0$ e $C_2 : x = 0, 1 \leq y \leq e$, donde $dx = 0$.



Temos

$$\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_{C_1^-} \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_{C_1^-} P(x, 1) dx = - \int_0^1 (-\sin x) dx = \int_0^1 \sin x dx = -\cos x \Big|_0^1 = 1 - \cos 1.$$

$$\int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_2} Q(0, y) dy = \int_1^e 2y \cos 0 dy = \int_1^e 2y dy = y^2 \Big|_1^e = e^2 - 1.$$

Logo,

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 1 - \cos 1 + e^2 - 1 = e^2 - \cos 1.$$

Uma solução alternativa

Pelo teorema das quatro equivalências segue que \vec{F} é conservativo. Logo, existe $\varphi(x, y)$ definido em \mathbb{R}^2 , tal que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -y^2 \operatorname{sen} x \quad (1)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 2y \cos x \quad (2)$$

Integrando (1) e (2) em relação a x e y respectivamente, temos

$$\varphi(x, y) = y^2 \cos x + f(y)$$

$$\varphi(x, y) = y^2 \cos x + g(x)$$

Tomando $f(y) = 0$ e $g(x) = 0$, temos que $\varphi(x, y) = y^2 \cos x$ é uma função potencial de \vec{F} . Logo,

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \varphi(\sigma(2)) - \varphi(\sigma(1)) = \varphi(0, e) - \varphi(1, 1) = e^2 \cos 0 - 1^2 \cos 1 = e^2 - \cos 1.$$

Exemplo 2

Considere a integral de linha $\int_C (kxe^y + y) dx + (x^2e^y + x - ky) dy$.

- Determine a constante k para que esta integral seja independente do caminho.
- Calcule o valor da integral de $A = (0, 0)$ a $B = (1, 1)$ para o valor de k encontrado em (a).

Solução:

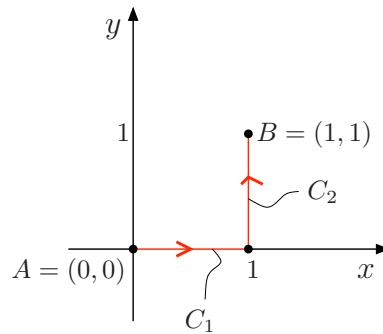
a) O campo \vec{F} é definido em \mathbb{R}^2 que é um conjunto simplesmente conexo. Pelo teorema das quatro equivalências é necessário que $\operatorname{rot} \vec{F} = \vec{0}$ para que a integral independa do caminho. Então

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{F} = \vec{0} &\Leftrightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \text{ em } \mathbb{R}^2 \\ &\Leftrightarrow 2xe^y + 1 = kxe^y + 1 \\ &\Leftrightarrow 2xe^y = kxe^y \\ &\Leftrightarrow 2x = kx \text{ pois } e^y \neq 0 \text{ para todo } y \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow k = 2. \end{aligned}$$

Portanto, para $k = 2$ segue que $\operatorname{rot} \vec{F} = \vec{0}$, donde pelo teorema das equivalências temos que a integral independe do caminho.

b) Temos que

$$k = 2 \Rightarrow \vec{F}(x, y) = (2xe^y + y) \vec{i} + (x^2e^y + x - 2y) \vec{j}.$$



Como a integral independe do caminho, tomemos $C = C_1 \cup C_2$, onde $C_1 : y = 0$, com $0 \leq x \leq 1$ donde $dy = 0$ e $C_2 : x = 1$, com $0 \leq y \leq 1$, donde $dx = 0$. Temos

$$\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} P(x, 0) dx = \int_0^1 2xe^0 dx = \int_0^1 2x dx = [x^2]_0^1 = 1$$

$$\int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_2} Q(1, y) dy = \int_0^1 (e^y + 1 - 2y) dy = [e^y + y - y^2]_0^1 = e - 1.$$

Somando temos,

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 1 + e - 1 = e.$$

Uma solução alternativa

Também do teorema das equivalências resulta que \vec{F} é conservativo, isto é, existe $\varphi(x, y)$ definido em \mathbb{R}^2 , tal que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 2xe^y + y \quad (3)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = x^2e^y + x - 2y \quad (4)$$

Integrando (3) e (4) em relação a x e y respectivamente, temos

$$\varphi(x, y) = x^2e^y + xy + f(y)$$

$$\varphi(x, y) = x^2e^y + xy - y^2 + g(x).$$

Devemos tomar $f(y) = -y^2$ e $g(x) = 0$. Assim $\varphi(x, y) = x^2e^y + xy - y^2$ é uma função potencial de \vec{F} . Logo,

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \varphi(B) - \varphi(A) = \varphi(1, 1) - \varphi(0, 0) = e + 1 - 1 - 0 + 0 - 0 = e.$$

Até a próxima aula.

Rioco K. Barreto

Coordenadora de Cálculo IV

Exercício 1: Calcule a integral de linha diretamente e, também, pelo teorema de Green:

$$\oint_C x \, dx + y^2 \, dy$$

onde C é o caminho fechado formado por $y = x^2$ e $y = x$, no sentido anti-horário.

Exercício 2: Utilize o teorema de Green para calcular:

a) $I = \oint_C -\frac{x^2 y}{1+x^2} dx + \arctg x \, dy$ onde C é o caminho fechado formado por $y = 0$, $x = 1$, $y = 1$ e $x = 0$, no sentido anti-horário;

b) $I = \oint_C e^x \sin y \, dx + (x + e^x \cos y) \, dy$, onde C é a elipse $3x^2 + 8y^2 = 24$, no sentido anti-horário;

c) $I = \oint_C 2 \arctg \frac{y}{x} dx + (\ln(x^2 + y^2) + x) \, dy$ onde C é parametrizada por $x = 4 + 2 \cos t$ e $y = 4 + \sin t$, com $0 \leq t \leq 2\pi$.

Exercício 3: O teorema de Green pode ser utilizado para calcular a integral de linha

$$\oint_C \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$$

a) onde C é a circunferência $x^2 + y^2 = 1$, orientada no sentido anti-horário?

b) onde C é o triângulo com vértices $(1, 0)$, $(1, 2)$ e $(2, 2)$, orientado no sentido anti-horário?

c) Qual é o valor da integral de linha onde C é o triângulo da parte (b)?

Exercício 4: Use uma integral de linha para calcular a área da região plana limitada pelas curvas $y = x^2$ e $x = y^2$.

Exercício 5: Uma partícula move-se ao longo da circunferência $y = \sqrt{4 - x^2}$ do ponto $(2, 0)$ até $(-2, 0)$. Determine o trabalho realizado nessa partícula pelo campo de força a seguir:

$$\vec{F}(x, y) = \left(x + e^{y^2}, x^3 + 3xy^2 + 2xye^{y^2} \right).$$

Exercício 6: Mostre que

$$I = \int_{(0,1)}^{(2,3)} (2x + y^3) dx + (3xy^2 + 4) dy$$

é independente do caminho e calcule-a.

Exercício 7:

- a) Mostre que $I = \int_C (x + 3y + y^{10}) dx + (3x + 10xy^9 + \ln(1 + y^2)) dy$ é independente do caminho.
- b) Calcule a integral I para $C : (x - 1)^2 + \frac{y^2}{4} = 1$, com $y \geq 0$, no sentido horário.
-

Exercício 8: Mostre que

$$I = \int_C (1 + 2xy + \ln x) dx + x^2 dy$$

é independente do caminho e calcule o valor de I onde C é dada por $\gamma(t) = (1 + \cos t, \sin t)$, com $-\pi/2 \leq t \leq \pi/2$.

Cálculo IV – EP11

Aula 19 – Superfícies Parametrizadas

Objetivo

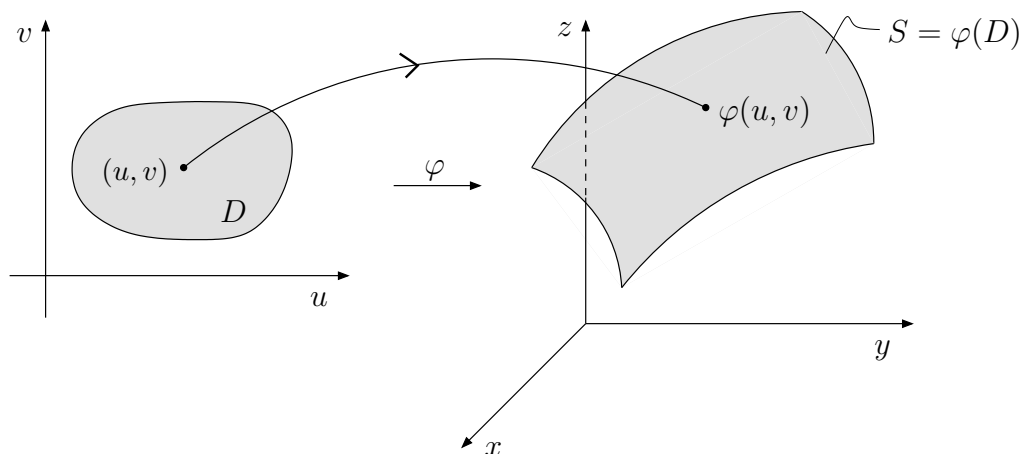
- Estudar as superfícies parametrizadas visando as integrais de superfície.

Superfícies parametrizadas

Definição: Dizemos que $S \subset \mathbb{R}^3$ é uma superfície parametrizada se existir uma função vetorial contínua

$$\begin{aligned} \varphi : D \subset \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\longmapsto \varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \end{aligned}$$

tal que $S = \varphi(D)$.

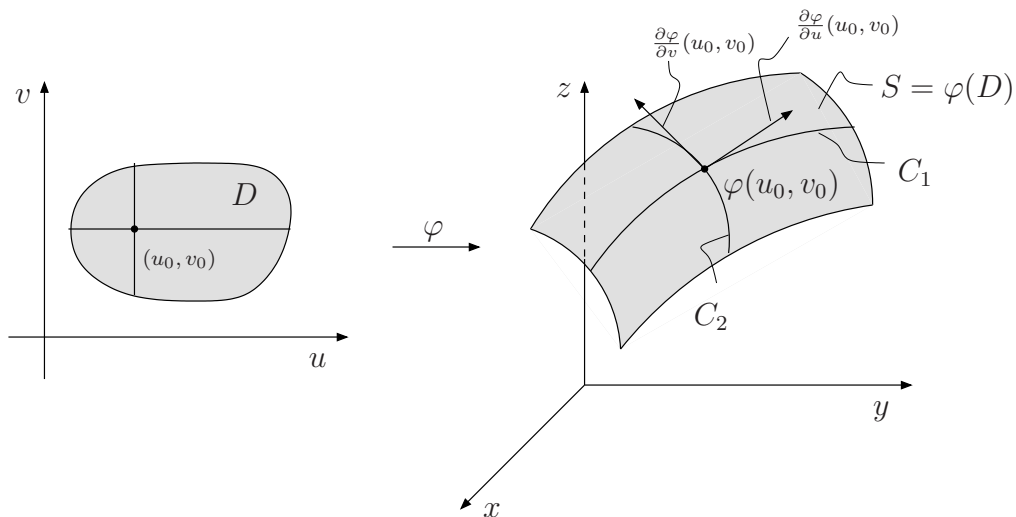


As funções $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ são chamadas equações paramétricas de S .

Se φ for diferenciável em $(u_0, v_0) \in D$, fixando $v = v_0$, obtemos uma curva diferenciável

$$C_1 : \gamma(u) = \varphi(u, v_0) = (x(u, v_0), y(u, v_0), z(u, v_0))$$

(Veja a figura a seguir).



Se

$$\gamma'(u_0) = \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0) = \varphi_u(u_0, v_0) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0) \right) \neq \vec{0}$$

segue que $\varphi_u(u_0, v_0)$ é um vetor tangente a C_1 em $\varphi(u_0, v_0)$.

Analogamente, se

$$\frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0) = \varphi_v(u_0, v_0) = \left(\frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0) \right) \neq \vec{0}$$

então este vetor é um vetor tangente a C_2 em $\varphi(u_0, v_0)$.

Se o vetor

$$\vec{N} = \vec{N}(u_0, v_0) = \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0) = \varphi_u(u_0, v_0) \times \varphi_v(u_0, v_0) \neq \vec{0}$$

então \vec{N} é um vetor normal a S em $\varphi(u_0, v_0)$. O vetor $\vec{n} = \frac{\vec{N}}{\|\vec{N}\|}$ é um vetor normal unitário a S em $\varphi(u_0, v_0)$.

Dizemos que S é regular em $\varphi(u_0, v_0)$ se $\vec{N}(u_0, v_0) \neq \vec{0}$. O plano tangente a S em $\varphi(u_0, v_0)$ é dado por

$$[(x, y, z) - \varphi(u_0, v_0)] \cdot \vec{N}(u_0, v_0) = 0.$$

Apresentaremos agora, parametrizações das principais superfícies:

1) Plano S

Sejam $P_0 \in S$, \vec{a} e \vec{b} não paralelos contido no plano S . Seja $P \in S$. Então, existem escalares u e v , tais que:

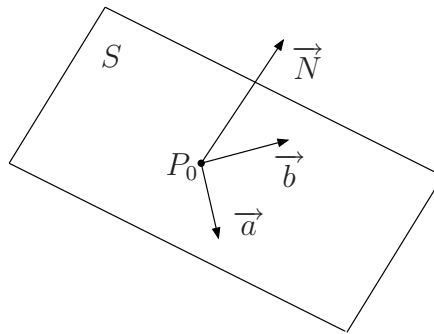
$$\overrightarrow{P_0P} = u\vec{a} + v\vec{b} \Leftrightarrow P = P_0 + u\vec{a} + v\vec{b}.$$

Então, uma parametrização de S é dada por:

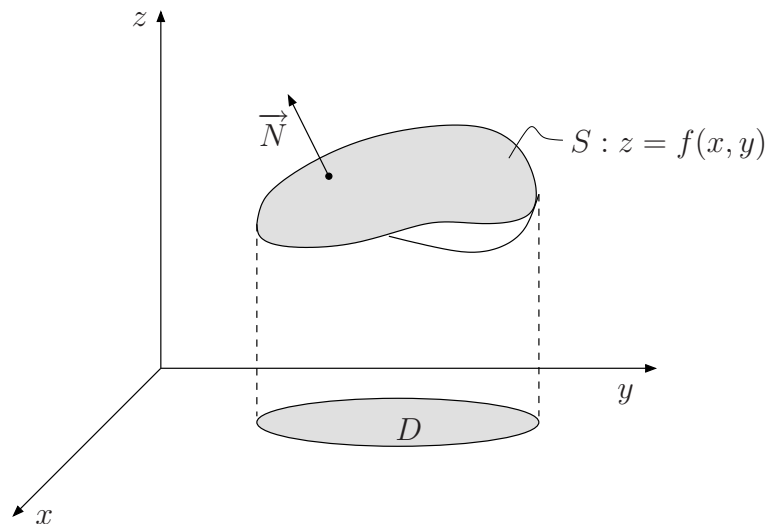
$$\varphi(u, v) = P_0 + u\vec{a} + v\vec{b} \quad \text{com } (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

Da Geometria Analítica, vê-se que um vetor normal a S em P_0 é:

$$\vec{N} = \vec{a} \times \vec{b}.$$



2) $S =$ gráfico de $z = f(x, y)$, com $(x, y) \in D$ e $f(x, y)$ de classe C^1



Uma parametrização natural (ou canônica) de $S = G_f$ (gráfico de f) é dada por

$$\varphi(x, y) = (x, y, f(x, y)), \text{ com } (x, y) \in D.$$

Um vetor normal é dado por:

$$\vec{N} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) \times \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) = \varphi_x(x, y) \times \varphi_y(x, y) = (-f_x(x, y), -f_y(x, y), 1) \text{ Verifique!}$$

Como $\vec{N}(x, y) \neq \vec{0}$, para todo $(x, y) \in D$, segue que $S = G_f$ é uma superfície regular.

3) **Cilindro** $x^2 + y^2 = a^2$, $a > 0$

Utilizamos as coordenadas cilíndricas para parametrizar um cilindro de raio a . Tem-se:

$$\begin{cases} x = a \cos \theta \\ y = a \sin \theta \\ z = z \end{cases}$$

Então: $\varphi(\theta, z) = (a \cos \theta, a \sin \theta, z)$ com $(\theta, z) \in D : 0 \leq \theta \leq 2\pi, z \in \mathbb{R}$ é uma parametrização de S .

Verifique que $\vec{N} = \varphi_\theta(\theta, z) \times \varphi_z(\theta, z) = (a \cos \theta, a \sin \theta, 0)$. Logo, $\vec{N} = (x, y, 0)$ é um vetor normal exterior a S em cada $(x, y, z) \in S$, donde $\vec{n} = \frac{(x, y, 0)}{a}$ é o vetor unitário normal exterior a S .

4) Esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, a > 0$

Utilizamos as coordenadas esféricas para parametrizar a esfera. Tem-se:

$$\begin{cases} x = a \sin \phi \cos \theta \\ y = a \sin \phi \sin \theta \\ z = a \cos \phi \end{cases}$$

com $0 \leq \phi \leq \pi$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Então:

$$\varphi(\phi, \theta) = (a \sin \phi \cos \theta, a \sin \phi \sin \theta, a \cos \phi)$$

com

$$(\phi, \theta) \in D : \begin{cases} 0 \leq \phi \leq \pi \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}.$$

Verifique que:

$$\begin{aligned} \vec{N} &= \frac{\partial \varphi}{\partial \phi} \times \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = (a^2 \sin^2 \phi \cos \theta, a^2 \sin^2 \phi \sin \theta, a^2 \sin \phi \cos \phi) \\ \|\vec{N}\| &= a^2 \sin \phi. \end{aligned}$$

Logo:

$$\vec{n} = \frac{\vec{N}}{\|\vec{N}\|} = \frac{\varphi(\phi, \theta)}{a} = \frac{(x, y, z)}{a},$$

isto é, $\vec{n} = \frac{(x, y, z)}{a}$ é o vetor unitário normal exterior à esfera.

5) Superfície de revolução S

a) Seja C uma curva no plano yz dada por

$$C : \begin{cases} x = 0 \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

com $a \leq t \leq b$ e $y(t) \geq 0$ em $[a, b]$.

Ao girar o ponto $(0, y(t), z(t))$ ao redor do eixo z , na altura $z(t)$, obtemos uma circunferência de raio $y(t)$, parametrizada por

$$(y(t) \cos \theta, y(t) \sin \theta, z(t)),$$

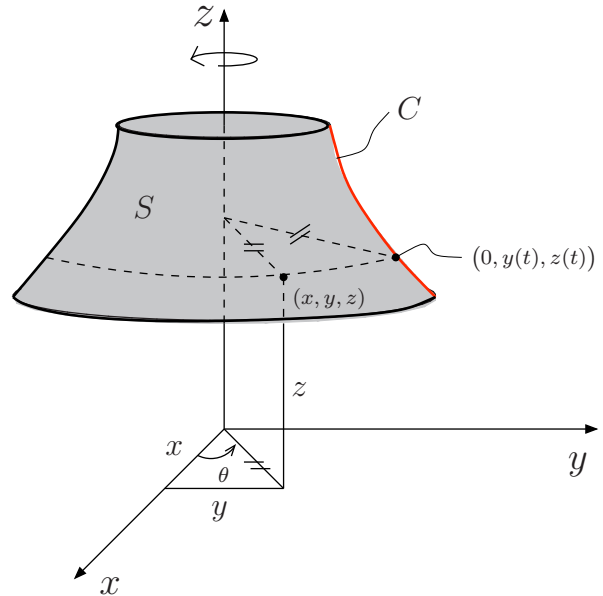
com $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Fazendo t variar de a até b , a circunferência começa a se deslocar segundo a altura $z = z(t)$, gerando a superfície de revolução S da figura ao lado. Tem-se:

$$S : \varphi(t, \theta) = (y(t) \cos \theta, y(t) \sin \theta, z(t))$$

onde

$$(t, \theta) \in D : \begin{cases} a \leq t \leq b \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi. \end{cases}$$



Observe que na superfície S tem-se:

$y(t)$ = raio de uma circunferência transversal

$z(t)$ = altura desta circunferência.

b) Se C é uma curva no plano xz dada por

$$C : \begin{cases} x = x(t) \\ y = 0 \\ z = z(t) \end{cases}$$

com $a \leq t \leq b$, então:

$x(t)$ = raio de uma circunferência transversal

$z(t)$ = altura dessa circunferência.

Logo, uma parametrização da superfície de revolução S obtida girando C ao redor do eixo z é

$$S : \varphi(t, \theta) = (x(t) \cos \theta, x(t) \sin \theta, z(t))$$

com

$$(t, \theta) \in D : \begin{cases} a \leq t \leq b \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi. \end{cases}$$

Aula 20 – Área de Superfície

Objetivo

- Estudar as áreas de superfícies parametrizadas.

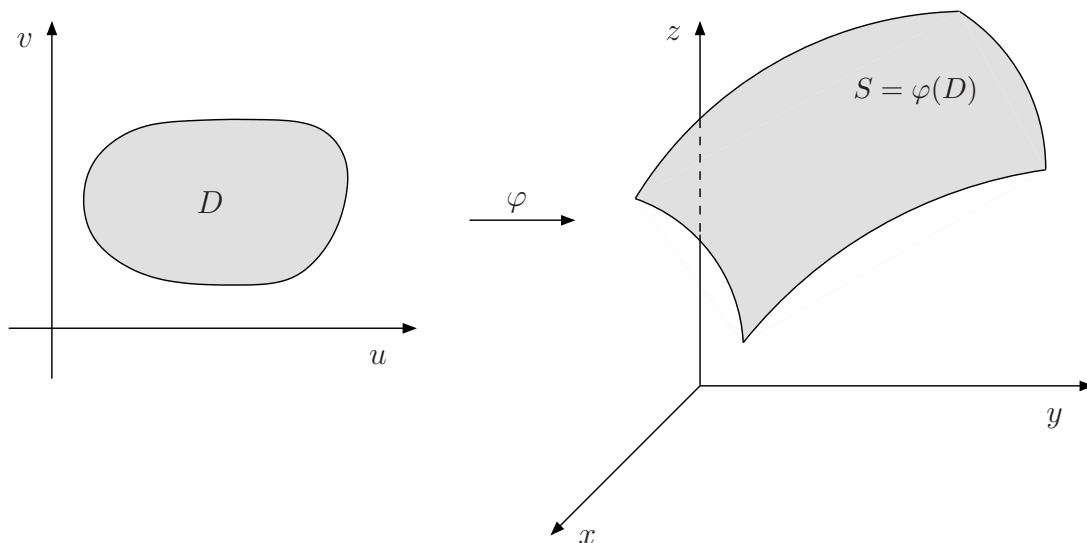
Área de superfície

Seja S uma superfície parametrizada por $\varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, $(u, v) \in D$ onde D é um conjunto compacto que tem área e com φ de classe C^2 em um conjunto aberto contendo D . É necessário também que φ seja uma função injetora exceto possivelmente na fronteira de D e que S seja regular exceto em um número finito de pontos.

Daqui por diante, até o final do curso, trabalharemos somente com superfícies descritas acima.

Definimos a área de S por

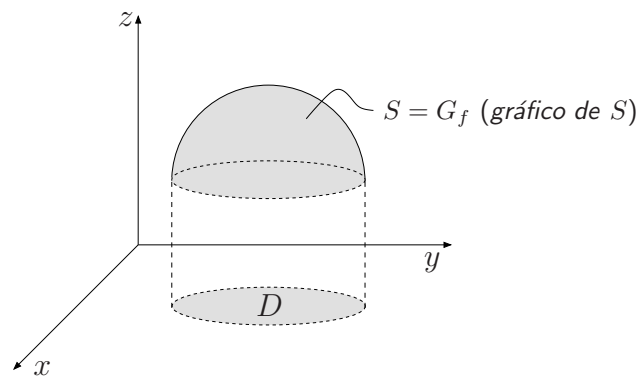
$$A(S) = \iint_D \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \right\| \, dudv.$$



OBS.: Se S for o gráfico de uma função de classe C^1 , $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$, onde D é um conjunto compacto que tem área, então:

$$A(S) = \iint_D \sqrt{1 + (f_x)^2 + (f_y)^2} \, dxdy.$$





Exemplo 1

Mostre que a área da esfera $S : x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $a > 0$ é dada por $A(S) = 4\pi a^2$.

Solução:

Usando as coordenadas esféricas com $\rho = a$, para parametrizar a esfera, tem-se

$$\varphi(\phi, \theta) = (a \sen \phi \cos \theta, a \sen \phi \sen \theta, a \cos \phi)$$

com $(\phi, \theta) \in D : 0 \leq \phi \leq \pi$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Calculemos $\varphi_\phi \times \varphi_\theta(\phi, \theta) = \frac{\partial \varphi}{\partial \phi} \times \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}(\phi, \theta)$ e seu módulo.

Tem-se $\varphi_\phi = (a \cos \phi \cos \theta, a \cos \phi \sen \theta, -a \sen \phi)$ e $\varphi_\theta = (-a \sen \phi \sen \theta, a \sen \phi \cos \theta, 0)$ donde

$$\begin{aligned} \varphi_\phi \times \varphi_\theta &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a \cos \phi \cos \theta & a \cos \phi \sen \theta & -a \sen \phi \\ -a \sen \phi \sen \theta & a \sen \phi \cos \theta & 0 \end{vmatrix} \\ &= (a^2 \sen^2 \phi \cos \theta, a^2 \sen^2 \phi \sen \theta, \underbrace{a^2 \sen \phi \cos \phi \cos^2 \theta + a^2 \sen \phi \cos \phi \sen^2 \theta}_{=a^2 \sen \phi \cos \phi}) \\ &= a \sen \phi (a \sen \phi \cos \theta, a \sen \phi \sen \theta, a \cos \phi) \\ &= (a \sen \phi) \cdot \varphi(\phi, \theta). \end{aligned}$$

Esta última expressão mostra que o vetor normal em cada ponto da esfera é radial, isto é, é um múltiplo do vetor posição $\varphi(\phi, \theta)$.

Tem-se $\|\varphi_\phi \times \varphi_\theta(\phi, \theta)\| = |a \sen \phi| \|\varphi(\phi, \theta)\| = a^2 |\sen \phi| = a^2 \sen \phi$ pois $0 \leq \phi \leq \pi$, isto é, $\|\varphi_\phi \times \varphi_\theta\| = a^2 \sen \phi$ (memorize este resultado). Como $A(S) = \iint_D \|\varphi_\phi \times \varphi_\theta\| d\phi d\theta$ então

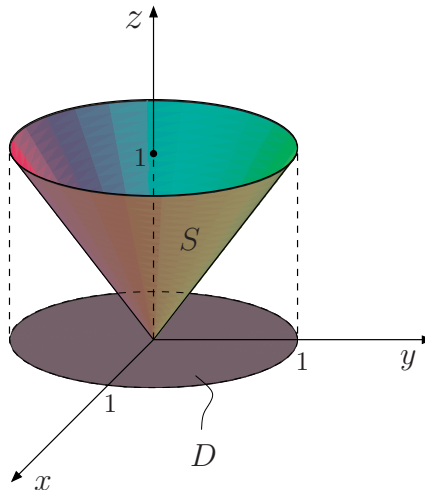
$$A(S) = \iint_D a^2 \sen \phi d\phi d\theta = a^2 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sen \phi d\theta d\phi = 2\pi a^2 \int_0^\pi \sen \phi d\phi = 2\pi a^2 [-\cos \phi]_0^\pi = 4\pi a^2 \text{ u.a.}$$

Exemplo 2

Calcule a área da superfície $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $0 \leq z \leq 1$.

Solução:

O esboço da superfície S é:



Temos que $S : z = \underbrace{\sqrt{x^2 + y^2}}_{f(x,y)}$, $(x, y) \in D : x^2 + y^2 \leq 1$. Também temos $f_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ e $f_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. Logo,

$$\sqrt{1 + (f_x)^2 + (f_y)^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}} = \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2}} = \sqrt{2}.$$

Como

$$A(S) = \iint_D \sqrt{1 + (f_x)^2 + (f_y)^2} \, dxdy$$

então

$$A(S) = \iint_D \sqrt{2} \, dxdy = \sqrt{2} \iint_D dxdy = \sqrt{2} \cdot A(D) = \sqrt{2} \cdot \pi \cdot 1^2 = \pi\sqrt{2} \text{ u.a.}$$

Até a próxima aula.

Rioco K. Barreto

Coordenadora de Cálculo IV

Exercício 1: Seja S a superfície parametrizada por $\varphi(u, v) = (u, v, 1 - v^2)$, com $u \geq 0$, $v \geq 0$ e $u + v \leq 1$.

- Desenhe S .
 - Determine o plano tangente a S no ponto $\varphi(1/2, 1/4)$.
 - Determine a área de S .
-

Exercício 2: Esboce e parametrize as superfícies abaixo, indicando o domínio dos parâmetros:

- $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \geq 1\}$.
 - $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = \sqrt{3(x^2 + y^2)}, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.
 - $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 2, x^2 + y^2 \leq 1\}$.
 - $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 4, 0 \leq z \leq 2 + \frac{x}{4} - \frac{y}{2}\}$.
 - $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 2y, 0 \leq z \leq x^2 + y^2\}$.
-

Exercício 3: Seja $C = \{(0, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z^2 + (y - 2)^2 = 1\}$. Ache a área da superfície gerada pela rotação do conjunto C em torno do eixo z .

Exercício 4: Seja S a superfície obtida girando-se o segmento de reta de $(0, 1, 3)$ a $(0, 3, 1)$ em torno do eixo z .

- Dê uma parametrização de S .
 - Calcule a área de S .
-

Exercício 5: Determine a área do parabolóide $z = 2(x^2 + y^2)$, abaixo do plano $z = 8$.

Exercício 6: Calcule a área da superfície S parte do plano $x + y + z = a$, interior ao cilindro $x^2 + y^2 = a^2$.

Exercício 7: Calcule a área da superfície $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $(x - 2)^2 + 4y^2 \leq 1$.

Exercício 8: Determine a área da porção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, cortada pela parte superior do cone $x^2 + y^2 = z^2$.

Cálculo IV – EP12

Aula 21 – Integral de Superfície de um Campo Escalar

Objetivo

- Estudar as integrais de superfície de um campo escalar.

Integral de superfície de um campo escalar

Definimos a integral de superfície de um campo escalar contínuo $f(x, y, z)$ sobre uma superfície S , parametrizada por $\varphi(u, v)$, com $(u, v) \in D$, da seguinte maneira:

$$\iint_S f \, dS = \iint_S f(x, y, z) \, dS = \iint_D f(\varphi(u, v)) \underbrace{\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\|}_{dS} \, dudv$$

onde $dS = \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\| \, dudv$ é o elemento de área.

OBS.:

- a) Temos que, se S é o gráfico da função $z = z(x, y)$, com $(x, y) \in D$ então:

$$\begin{aligned} \iint_S f \, dS &= \iint_S f(x, y, z) \, dS \\ &= \iint_D f(x, y, z(x, y)) \underbrace{\sqrt{1 + (z_x)^2 + (z_y)^2}}_{dS} \, dxdy \end{aligned}$$

onde $dS = \sqrt{1 + (z_x)^2 + (z_y)^2} \, dxdy$ é o elemento de área.

- b) Se $S = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_n$ então $\iint_S f \, dS = \sum_{i=1}^n \iint_{S_i} f \, dS$.

- c) Se $f(x, y, z) = 1$ em S então $\iint_S 1 \, dS = \iint_S dS = A(S)$.



Exemplo 1

Calcule $\iint_S xy \, dS$, onde S é parametrizada por $\varphi(u, v) = (u - v, u + v, 2u + v + 1)$ com $(u, v) \in D : 0 \leq u \leq 1$ e $0 \leq v \leq u$.

Solução:

Temos $\frac{\partial \varphi}{\partial u} = (1, 1, 2)$ e $\frac{\partial \varphi}{\partial v} = (-1, 1, 1)$ donde

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1, -3, 2) \quad \text{e} \quad \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\| = \sqrt{1+9+4} = \sqrt{14}.$$

Logo, $dS = \sqrt{14} \, dudv$.

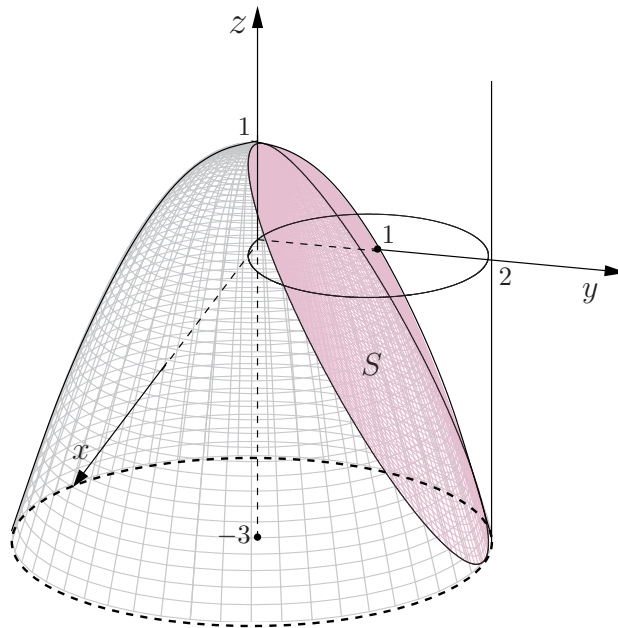
$$\begin{aligned} \iint_S xy \, dS &= \iint_D (u - v)(u + v)\sqrt{14} \, dudv = \sqrt{14} \iint_D (u^2 - v^2) \, dudv \\ &= \sqrt{14} \int_0^1 \int_0^u (u^2 - v^2) \, dvdu \\ &= \sqrt{14} \int_0^1 \left[u^2v - \frac{v^3}{3} \right]_0^u \, du \\ &= \sqrt{14} \int_0^1 \left[u^3 - \frac{u^3}{3} \right] \, du \\ &= \frac{2\sqrt{14}}{3} \int_0^1 u^3 \, du \\ &= \frac{\sqrt{14}}{6} \left[u^4 \right]_0^1 \\ &= \frac{\sqrt{14}}{6}. \end{aligned}$$

Exemplo 2

Calcule $\iint_S \frac{1}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}} \, dS$, onde S é a parte da superfície $z = 1 - x^2 - y^2$ que se encontra dentro do cilindro $x^2 + y^2 \leq 2y$.

Solução:

O esboço de S é dado na figura que se segue:



Temos $S : z = \underbrace{1 - x^2 - y^2}_{f(x,y)}$, com $(x, y) \in D : x^2 + y^2 \leq 2y$. Como $dS = \sqrt{1 + (f_x)^2 + (f_y)^2} dx dy$ então $dS = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dx dy$. Logo

$$\iint_S \frac{1}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}} dS = \iint_D \frac{1}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}} \cdot \sqrt{1+4x^2+4y^2} dx dy = \iint_D dx dy = A(D) = \pi \cdot 1^2 = \pi.$$

Aula 22 – Aplicações à Física

Objetivo

- Estudar aplicações como cálculo de massa, centro de massa e momento de inércia.

Aplicações à Física

Seja S uma chapa delgada formando uma superfície no espaço e seja $\delta(x, y, z)$ sua densidade superficial que supomos contínua. Então, a massa M de S é dada por

$$M = \iint_S \delta(x, y, z) dS.$$

O momento de inércia de S em relação a um eixo E é dado por

$$I_E = \iint_S r^2(x, y, z) \delta(x, y, z) dS$$

onde $r(x, y, z) =$ distância de (x, y, z) ao eixo E .

Se o eixo $E =$ eixo z então $r(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$ e

$$I_z = \iint_S (x^2 + y^2) \delta(x, y, z) dS.$$

Se o eixo $E =$ eixo y então $r(x, y, z) = \sqrt{x^2 + z^2}$, donde

$$I_y = \iint_S (x^2 + z^2) \delta(x, y, z) dS.$$

Se o eixo $E =$ eixo x então $r(x, y, z) = \sqrt{y^2 + z^2}$, donde

$$I_x = \iint_S (y^2 + z^2) \delta(x, y, z) dS.$$

O centro de massa $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ é dado por

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{\iint_S x \delta(x, y, z) dS}{M} \\ \bar{y} &= \frac{\iint_S y \delta(x, y, z) dS}{M} \\ \bar{z} &= \frac{\iint_S z \delta(x, y, z) dS}{M}.\end{aligned}$$

Exemplo 1

Calcule a massa da chapa fina S dada por $\varphi(u, v) = (u, v, 2u + v)$, com $(u, v) \in D : 0 \leq u \leq 1$ e $0 \leq v \leq u$, sendo $\delta(x, y, z) = x + y + z$ a densidade superficial.

Solução:

Temos

$$M = \iint_S (x + y + z) dS = \iint_D (3u + 2v) \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\| dudv,$$

onde

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-2, -1, 1)$$

e

$$\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\| = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{6}.$$

Logo,

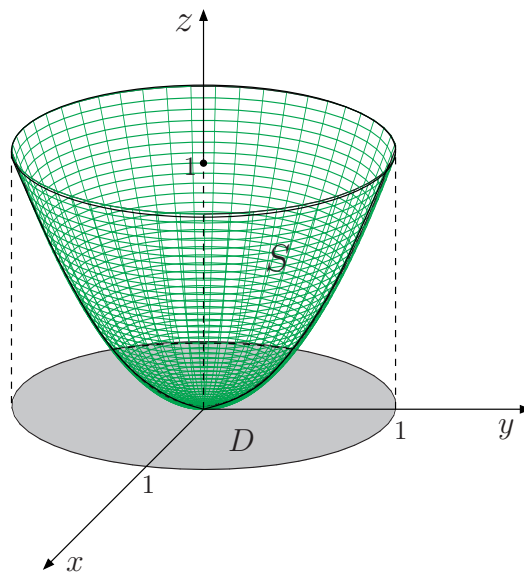
$$\begin{aligned}
 M &= \sqrt{6} \iint_D (3u + 2v) \, dudv = \sqrt{6} \int_0^1 \int_0^u (3u + 2v) \, dvdu = \sqrt{6} \int_0^1 \left[3uv + v^2 \right]_0^u \, du \\
 &= \sqrt{6} \int_0^1 \left[3u^2 + u^2 \right] \, du \\
 &= \sqrt{6} \int_0^1 4u^2 \, du \\
 &= \frac{4\sqrt{6}}{3} \, u.m.
 \end{aligned}$$

Exemplo 2

Calcule o momento de inércia da superfície homogênea de equação $z = x^2 + y^2$, com $(x, y) \in D : x^2 + y^2 \leq 1$, em torno do eixo z .

Solução:

O esboço de S é:



A superfície S é descrita por

$$S : z = f(x, y) = x^2 + y^2, \quad (x, y) \in D : x^2 + y^2 \leq 1.$$

Temos

$$dS = \sqrt{1 + (f_x)^2 + (f_y)^2} \, dxdy = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} \, dxdy.$$

Então:

$$I_z = \iint_S (x^2 + y^2) \delta(x, y, z) \, dS = k \iint_S (x^2 + y^2) \, dS.$$

pois S é homogênea. Logo:

$$I_z = k \iint_D (x^2 + y^2) \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} \, dxdy.$$

Usando coordenadas polares, temos

$$I_z = k \iint_{D_{r\theta}} r^2 \sqrt{1+4r^2} r dr d\theta = 2k\pi \int_0^1 r^2 (1+4r^2)^{1/2} r dr$$

Fazendo $u = 1 + 4r^2$, temos $r^2 = (u - 1)/4$ e $r dr = du/8$. Para $r = 0$ temos $u = 1$ e para $r = 1$ temos $u = 5$. Então

$$\begin{aligned} I_z &= 2k\pi \int_1^5 \frac{u-1}{4} u^{1/2} \frac{du}{8} = \frac{k\pi}{16} \int_1^5 (u^{3/2} - u^{1/2}) du \\ &= \frac{k\pi}{16} \left[\frac{2}{5} u^{5/2} - \frac{2}{3} u^{3/2} \right]_1^5 \\ &= \frac{k\pi}{16} \left(\frac{2}{5} 5^{5/2} - \frac{2}{3} 5^{3/2} + \frac{4}{15} \right). \end{aligned}$$

Até a próxima aula.

Rioco K. Barreto

Coordenadora de Cálculo IV

Exercício 1: Calcule $\iint_S (z - x^2 + xy^2 - 1) dS$, onde S é a superfície

$$\varphi(u, v) = u \vec{i} + v \vec{j} + (u^2 + 1) \vec{k}$$

com $0 \leq u \leq 1$ e $0 \leq v \leq 2$.

Exercício 2: Calcule $\iint_S f(x, y, z) dS$, onde $f(x, y, z) = x^2 + y^2$ e $S : x^2 + y^2 + z^2 = 4$, com $z \geq 1$.

Exercício 3: Calcule $\iint_S x^2 z dS$, onde S é o cilindro $x^2 + y^2 = a^2$, com $0 \leq z \leq 1$.

Exercício 4: Calcule $\iint_S x dS$, onde S é o triângulo com vértices $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$.

Exercício 5: Seja S a porção do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ limitado pelos planos $z = 1$ e $z = 4$.

- Parametrize S usando as coordenadas cartesianas.
- Parametrize S usando as coordenadas polares.
- Calcule $\iint_S z^2 dS$.

Exercício 6: Calcule a massa da superfície S parte do plano $z = 2 - x$ dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 1$, sendo a densidade dada por $\delta(x, y, z) = y^2$.

Exercício 7: Determine o momento de inércia em relação ao eixo da superfície S parte do cone $z^2 = x^2 + y^2$ entre os planos $z = 1$ e $z = 2$, sendo a densidade constante.

Exercício 8: Uma lâmina superficial S tem a forma de um cone dado por $z = 4 - 2\sqrt{x^2 + y^2}$ e limitado pelo plano xy . Em cada ponto de S a densidade é proporcional à distância entre o ponto e o eixo z . Mostre que o momento de inércia em relação ao eixo z é igual a $\frac{12}{5}M$, onde M é a massa de S .

Cálculo IV – EP13

Aula 23 – Integral de Superfície de um Campo Vetorial

Objetivo

- Compreender a noção de superfície orientável,
- Estudar as integrais de superfície de campos vetoriais.

Integral de superfície de um campo vetorial

Hoje vamos integrar campos vetoriais sobre superfícies. Quando estudamos as integrais de linha de campos vetoriais, vimos que a definição dependia da orientação da curva, isto é,

$$\int_{C^-} \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

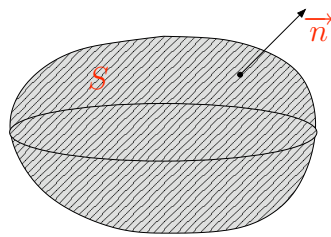
Aqui em integral de superfície de um campo vetorial ou fluxo de um campo vetorial, a definição também depende do conceito de superfície orientada, que passaremos a definir.

Dizemos que S é uma superfície orientável quando for possível escolher sobre S um campo de vetores unitários normais a S que varie continuamente sobre S . Intuitivamente falando, significa que S tem dois lados. Há superfícies que tem um lado só como, por exemplo, a fita de Möbius que pode ser facilmente construída. Peguem uma tira de papel retangular $ABCD$. Pintem um lado de vermelho e o outro de azul. Fixem o lado AB e façam uma meia volta com o lado CD e cole A com C e B com D .

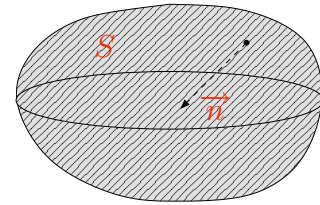


A fita de Möbius tem apenas um lado, pois as duas cores se encontram.

OBS.: Superfícies fechadas orientáveis terão duas orientações “naturais”, determinadas pela normal “exterior” e pela normal “interior”.



ou



Daqui para frente só consideraremos superfícies orientáveis (com dois lados).

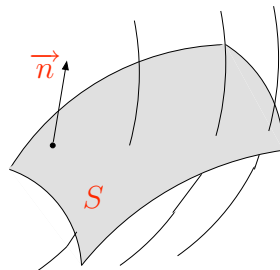
Definição:

Seja S uma superfície regular orientável. Seja \vec{n} uma orientação de S . Seja \vec{F} um campo vetorial contínuo definido em um aberto contendo S . A integral de superfície de \vec{F} através de S ou o fluxo ϕ de \vec{F} através de S é a integral de superfície do campo escalar $\vec{F} \cdot \vec{n}$:

$$\Phi = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS.$$

OBS.:

1) Se \vec{F} representa o campo de velocidades de um fluido, essa integral fornece o volume do fluido que atravessa S em uma unidade de tempo, na direção de \vec{n} .



2) Se S é parametrizada por $\varphi(u, v)$, $(u, v) \in D$ então

$$\Phi = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \iint_D \vec{F}(\varphi(u, v)) \cdot \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|} \cdot \|\varphi_u \times \varphi_v\| \, dudv = \iint_D \vec{F}(\varphi(u, v)) \cdot (\varphi_u \times \varphi_v) \, dudv$$

$$\text{se } \vec{n} = \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|} \text{ e}$$

$$\Phi = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = - \iint_D \vec{F}(\varphi(u, v)) \cdot (\varphi_u \times \varphi_v) \, dudv$$

se $\vec{n} = -\frac{\varphi_u \times \varphi_v}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|}$.

3) Se S é o gráfico da função $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$, então

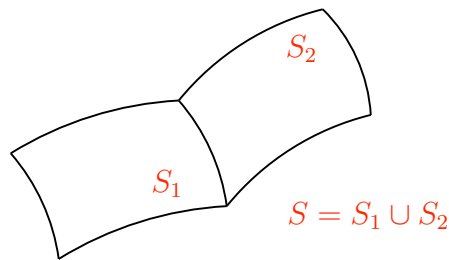
$$\Phi = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \iint_D \vec{F}(x, y, f(x, y)) \cdot (-f_x, -f_y, 1) \, dxdy$$

se $\vec{n} = \frac{(-f_x, -f_y, 1)}{\sqrt{1+(f_x)^2+(f_y)^2}}$ e

$$\Phi = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \iint_D \vec{F}(x, y, f(x, y)) \cdot (f_x, f_y, -1) \, dxdy$$

se $\vec{n} = \frac{(f_x, f_y, -1)}{\sqrt{1+(f_x)^2+(f_y)^2}}$.

4) Queremos definir $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$, onde $S = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_m$.



Definição 1:

Seja S uma superfície orientada por um campo de vetores normais unitários \vec{n} . Dizemos que o bordo de S , ∂S , está orientado positivamente se ao caminhar ao longo de ∂S com a cabeça no sentido de \vec{n} , tivermos S à nossa esquerda.

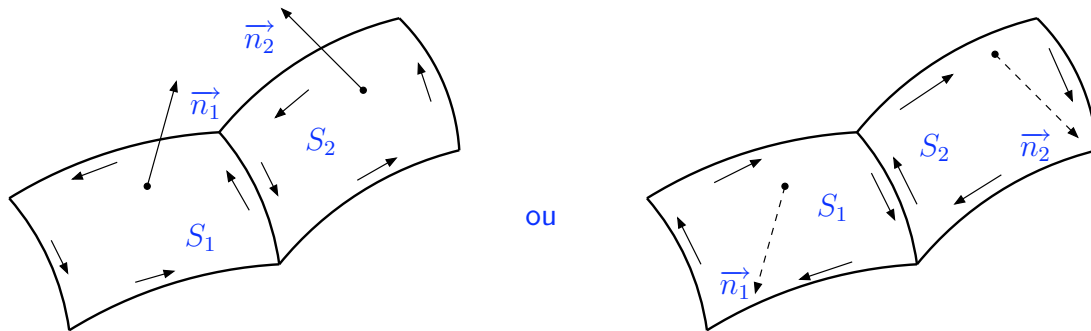


OBS.: Uma regra prática para orientar ∂S é a conhecida “regra da mão direita” com polegar no sentido de \vec{n} .



Definição 2:

Dizemos que $S = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_m$ está orientada se for possível orientar cada S_i de forma que nos bordos comuns a duas superfícies, as orientações resultem opostas.



Então:

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n}_1 \, dS + \dots + \iint_{S_m} \vec{F} \cdot \vec{n}_m \, dS.$$

Exemplo 1

Calcule o fluxo de $\vec{F}(x, y, z) = 2x\vec{i} + (x + y)\vec{j} - 2xy\vec{k}$ através da superfície $S : \varphi(u, v) = (u, v, 1 - u^2 - v^2)$, com $(u, v) \in D : 0 \leq u \leq 1$ e $0 \leq v \leq 1$ com normal $\vec{n} = \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|}$.

Solução:

Temos $\varphi_u = (1, 0, -2u)$ e $\varphi_v = (0, 1, -2v)$ donde

$$\varphi_u \times \varphi_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -2u \\ 0 & 1 & -2v \end{vmatrix} = (2u, 2v, 1).$$

O fluxo de \vec{F} é dado por

$$\begin{aligned}
 \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS &= \iint_D \vec{F}(\varphi(u, v)) \cdot \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|} \cdot \|\varphi_u \times \varphi_v\| \, dudv \\
 &= \iint_D \vec{F}(\varphi(u, v)) \cdot (\varphi_u \times \varphi_v) \, dudv \\
 &= \iint_S (2u, u + v, -2uv) \cdot (2u, 2v, 1) \, dudv \\
 &= \iint_S (4u^2 + 2uv + 2v^2 - 2uv) \, dudv \\
 &= \iint_S (4u^2 + 2v^2) \, dudv \\
 &= \int_0^1 \int_0^1 (4u^2 + 2v^2) \, dudv \\
 &= \int_0^1 \left[\frac{4u^3}{3} + 2uv \right]_0^1 dv \\
 &= \int_0^1 \left(\frac{4}{3} + 2v \right) dv \\
 &= \left[\frac{4}{3}v + v^2 \right]_0^1 \\
 &= \frac{4}{3} + 1 \\
 &= \frac{7}{3}.
 \end{aligned}$$

Exemplo 2

Calcule o fluxo do campo $\vec{F}(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ através da parte da superfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, com a normal exterior.

Solução:

Lembremos que, no caso da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ (ver Aula 19), temos $\vec{n} = \frac{(x, y, z)}{a}$. Então o fluxo é dado por

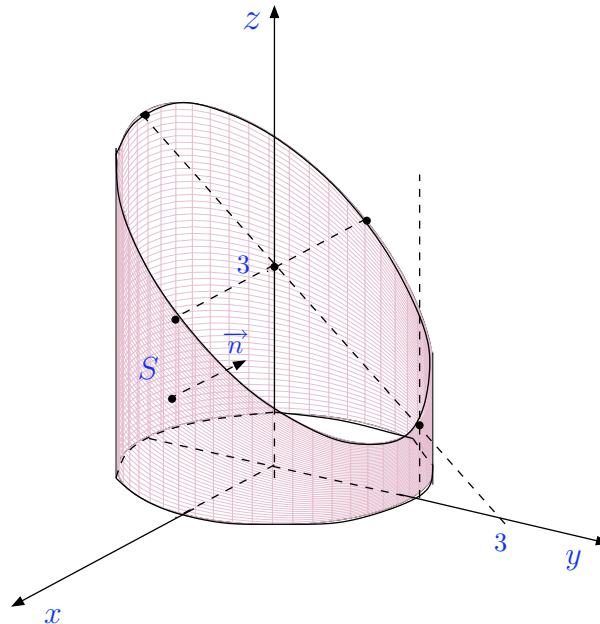
$$\begin{aligned}
 \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS &= \iint_S (x, y, z) \cdot \frac{(x, y, z)}{a} \, dS = \iint_S \frac{x^2 + y^2 + z^2}{a} \, dS = \iint_S \frac{a^2}{a} \, dS = a \iint_S dS \\
 &= aA(S) \\
 &= a4\pi a^2 \\
 &= 4\pi a^3.
 \end{aligned}$$

Exemplo 3

Calcule $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$, sendo $\vec{F}(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ e S a parte do cilindro $x^2 + y^2 = 4$ entre $z = 0$ e $y + z = 3$, com a orientação normal que aponta para o eixo z .

Solução:

O esboço de S é:



Lembremos que, no caso do cilindro $x^2 + y^2 = a^2$ (ver Aula 19), o vetor unitário normal interior a S é $\vec{n} = \frac{(-x, -y, 0)}{2}$. Então:

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \iint_S (x, y, z) \cdot \frac{(-x, -y, 0)}{2} \, dS = -\iint_S \frac{(x^2 + y^2)}{2} \, dS = -\iint_S \frac{4}{2} \, dS = -2 \iint_S dS.$$

Para calcular $\iint_S dS$, devemos parametrizar S . Logo $S : \varphi(t, z) = (2 \cos t, 2 \sin t, z)$, com $(t, z) \in D : 0 \leq t \leq 2\pi$ e $0 \leq z \leq 3 - 2 \sin t$.

Vimos na aula 19 que $\|\varphi_t \times \varphi_z\| = \|(2 \cos t, 2 \sin t, 0)\| = 2$. Como $dS = \|\varphi_t \times \varphi_z\| \, dt dz$ então $dS = 2 \, dt dz$. Logo:

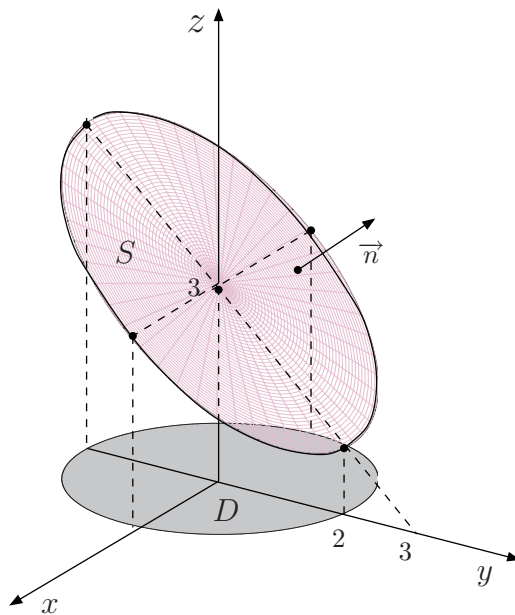
$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = -2 \iint_D 2 \, dt dz = -4 \int_0^{2\pi} \int_0^{3-2 \sin t} dz dt = -4 \int_0^{2\pi} (3 - 2 \sin t) \, dt = -24\pi.$$

Exemplo 4

Calcule $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$, sendo $\vec{F}(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ e S a parte do plano $y + z = 3$, limitada pelo cilindro $x^2 + y^2 = 4$, orientada com a normal \vec{n} tal que $\vec{n} \cdot \vec{k} \geq 0$.

Solução:

O esboço de S é dado a seguir.



Se $\vec{n} \cdot \vec{k} \geq 0$ então a componente z de \vec{n} é maior ou igual a zero donde \vec{n} aponta para cima. A superfície S pode ser descrita por $S : z = 3 - y = f(x, y)$, com $(x, y) \in S : x^2 + y^2 \leq 4$. Um vetor normal a S é dado por $\vec{N} = (-f_x, -f_y, 1) = (0, 0, 1)$ que aponta para cima. Logo, $\vec{n} = \frac{(0, 1, 1)}{\sqrt{2}}$. Por outro lado, sabemos da aula 19 que $dS = \|\vec{N}\| dx dy = \sqrt{2} dx dy$. Portanto:

$$\begin{aligned}
 \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS &= \iint_D (x, y, 3 - y) \cdot \frac{(0, 1, 1)}{\sqrt{2}} \sqrt{2} dx dy \\
 &= \iint_D (y + 3 - y) dx dy \\
 &= 3 \iint_D dx dy \\
 &= 3 A(D) \\
 &= 3\pi 2^2 \\
 &= 12\pi.
 \end{aligned}$$

Até a próxima aula.

Rioco K. Barreto

Coordenadora de Cálculo IV

Exercício 1: Calcule $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$, sendo $\vec{F}(x, y, z) = y \vec{i} - x \vec{j}$ e S a parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, no primeiro octante com a normal apontando para fora.

Exercício 2: Calcule $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$, onde $\vec{F}(x, y, z) = (x, y, -2z)$ e S é a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, com vetor normal \vec{n} exterior.

Exercício 3: Calcule o fluxo de $\vec{F}(x, y, z) = z \vec{i} + x \vec{j} - 3y^2z \vec{k}$ através da superfície S parte do cilindro $x^2 + y^2 = 16$ situado no primeiro octante, entre $z = 0$ e $z = 5$ e a normal \vec{n} tal que $\vec{n} \cdot \vec{i} \geq 0$.

Exercício 4: Calcule $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$, onde $\vec{F}(x, y, z) = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$ e S a região do plano $2x + 3y + z = 6$, situada no primeiro octante, com \vec{n} superior a S .

Exercício 5: Calcule o fluxo do campo $\vec{F}(x, y, z) = (x, y, z)$ através da superfície lateral do cilindro circular $x^2 + y^2 = 1$, limitada inferiormente pelo plano $x + y + z = 1$ e superiormente pelo plano $x + y + z = 2$ com vetor normal \vec{n} exterior.

Exercício 6: Calcule o fluxo do campo vetorial $\vec{F}(x, y, z) = (y, -x, z^2)$ através da superfície $S: z = x^2 + y^2$, com $0 \leq z \leq 1$, na direção do vetor normal \vec{n} exterior.

Exercício 7: Calcule $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$, onde $\vec{F} = x^2 \vec{i} + y^2 \vec{j} + z^2 \vec{k}$ e S é a superfície plana $x + y = 2$, delimitada pelos planos coordenados e pelo plano $z = 4$ e a normal se afasta da origem.

Exercício 8: Calcule $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$, onde $\vec{F} = (z^2 - x, -xy, 3z)$ e S é a superfície do sólido limitado por $z = 4 - y^2$, $x = 0$, $x = 3$ e o plano xy , com vetor \vec{n} exterior.

Exercício 9: Calcule $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$, onde $\vec{F} = \left(x, y, -\frac{z^2}{2}\right)$, e S é a superfície de revolução obtida girando-se o segmento de reta AB , com $A = (0, 1, 2)$ e $B = (0, 2, 4)$ em torno do eixo z , onde o vetor normal \vec{n} é exterior a S .

Exercício 10: Calcule $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$, onde $\vec{F} = 3y^2z \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$ e S é a superfície plana $y + z = 2$, interior ao cilindro $x^2 + y^2 = 1$, com campo de vetores normais \vec{n} tal que $\vec{n} \cdot \vec{k} < 0$.

Cálculo IV – EP14

Aula 24 – Teorema de Gauss

Objetivo

- Estudar um teorema famoso que permite calcular fluxos através de superfícies fechadas: o teorema de Gauss.

O Teorema de Gauss

O curso de Cálculo IV, contém alguns teoremas fascinantes como o Teorema de Green, o Teorema de Stokes e o Teorema de Gauss. Neste EP14 apresentamos o famoso Teorema de Gauss ou Teorema da Divergência. No próximo EP apresentaremos o também famoso Teorema de Stokes.

O Teorema de Gauss estabelece uma relação entre uma integral tripla numa região sólida W de \mathbb{R}^3 com uma integral de superfície na sua fronteira. Este teorema é um instrumento poderoso para os modelos matemáticos que descrevem alguns fenômenos físicos como, fluxos de fluidos, fluxos de campos elétricos ou magnéticos e fluxos de calor.

Finalmente, enunciaremos o Teorema da Divergência ou de Gauss:

Teorema de Gauss: Seja $W \subset \mathbb{R}^3$ um sólido, cuja fronteira $\partial W = S$ está orientada positivamente, com \vec{n} exterior a W . Seja \vec{F} um campo vetorial de classe C^1 em um aberto U contendo W . Então:

$$\iint_{S=\partial W} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \iiint_W \operatorname{div} \vec{F} \, dx dy dz .$$

Para enunciar os teoremas de Gauss e de Stokes utilizaremos conceitos definidos na Aula 14 – Campos Vetoriais: divergente e rotacional. Lembrando aqui que:

$$\operatorname{div} \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

e

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k} .$$

Exemplo 1

Verifique o teorema de Gauss para $\vec{F}(x, y, z) = xz \vec{i} + yz \vec{j} + z^2 \vec{k}$, calculando as duas integrais do enunciado, e S a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ e \vec{n} a normal unitária exterior a S .

Solução:

Temos que $\vec{n} = \frac{(x, y, z)}{a}$. Logo

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS &= \iint_S (xz, yz, z^2) \cdot \frac{(x, y, z)}{a} \, dS \\ &= \frac{1}{a} \iint_S (x^2z + y^2z + z^3) \, dS \\ &= \frac{1}{a} \iint_S z(x^2 + y^2 + z^2) \, dS \\ &= \frac{a^2}{a} \iint_S z \, dS \\ &= a \iint_S z \, dS. \end{aligned}$$

Parametrizando S , temos $\varphi(\phi, \theta) = (a \cos \phi \cos \theta, a \cos \phi \sin \theta, a \sin \phi)$, com $D : 0 \leq \phi \leq \pi$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Temos também que $dS = a^2 \sin \phi \, d\phi \, d\theta$. Então

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS &= a \iint_D (a \cos \phi) (a^2 \sin \phi) \, d\phi \, d\theta \\ &= a^4 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \cos \phi \sin \phi \, d\phi \, d\theta \\ &= a^4 \int_0^{2\pi} \left. \frac{\sin^2 \phi}{2} \right|_0^\pi \, d\theta \\ &= a^4 \int_0^{2\pi} 0 \, d\theta \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por outro lado, temos

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = z + z + 2z = 4z$$

e, então:

$$\begin{aligned} \iiint_W \operatorname{div} \vec{F} \, dV &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^\pi 4\rho^3 \cos \phi \sin \phi \, d\phi \, d\rho \, d\theta \\ &= 4 \int_0^{2\pi} \int_0^1 \rho^3 \left[\frac{\sin^2 \phi}{2} \right]_0^\pi \, d\rho \, d\theta \\ &= 4 \int_0^{2\pi} \int_0^1 \rho^3 \cdot 0 \, d\rho \, d\theta \\ &= 0. \end{aligned}$$

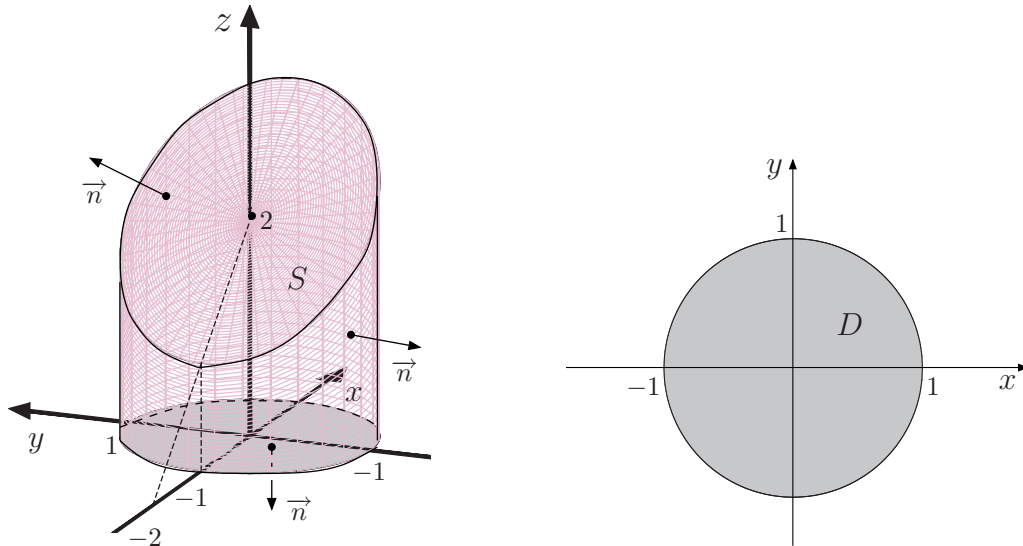
O teorema de Gauss está, portanto, verificado.

Exemplo 2

Calcule $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$, onde $\vec{F}(x, y, z) = (x + ye^z, y + ze^x, z^2 + xe^y)$, S é a fronteira do sólido interior ao cilindro $x^2 + y^2 = 1$, entre os planos $z = 0$ e $z = x + 2$ e \vec{n} a normal exterior a S .

Solução:

O esboço de S é:



Seja W o sólido limitado por S . Pelo teorema de Gauss, temos:

$$\begin{aligned}
 \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS &= \iiint_W \operatorname{div} \vec{F} \, dV = \iiint_W (1 + 1 + 2z) \, dV \\
 &= 2 \iint_D \int_0^{x+2} (1 + z) \, dz \, dx \, dy \\
 &= 2 \iint_D \left[z + \frac{z^2}{2} \right]_0^{x+2} \, dx \, dy \\
 &= 2 \iint_D \left[x + 2 + \frac{(x+2)^2}{2} \right] \, dx \, dy \\
 &= \iint_D (6x + 8 + x^2) \, dx \, dy \\
 &= \underbrace{6 \iint_D x \, dx \, dy}_{=0} + \underbrace{8 A(D)}_{8\pi} + \iint_D x^2 \, dx \, dy.
 \end{aligned}$$

Passando para coordenadas polares, temos:

$$\iint_D x^2 \, dx \, dy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^3 \cos^2 \theta \, dr \, d\theta = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \, d\theta = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \left[\theta + \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{2} \right]_0^{2\pi} = \frac{\pi}{4}.$$

Logo,

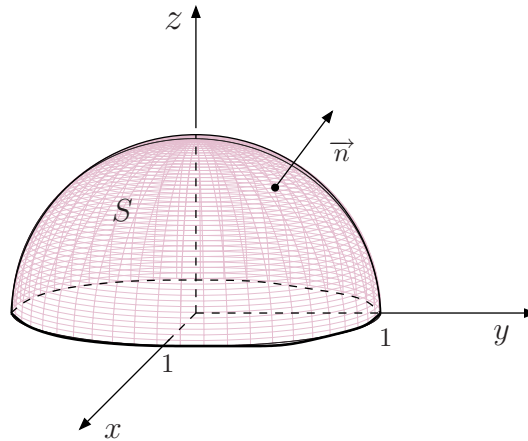
$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = 8\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{33\pi}{4}.$$

Exemplo 3

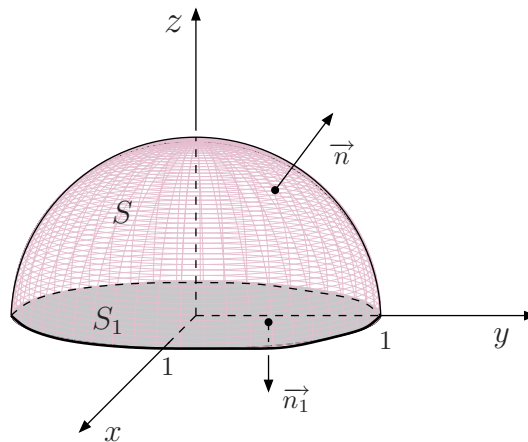
Calcule $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$, sendo $\vec{F}(x, y, z) = x^3 \vec{i} + y^3 \vec{j} + z^3 \vec{k}$, \vec{n} a orientação normal exterior a $S : x^2 + y^2 + z^2 = 1$, com $z \geq 0$.

Solução:

O esboço de S (aberta) é:



Seja $\bar{S} = S \cup S_1$ onde $S_1 : z = 0, x^2 + y^2 \leq 1$, com $\vec{n}_1 = -\vec{k}$.



Seja W o sólido limitado pela superfície fechada \bar{S} . Como estamos nas condições do teorema de Gauss, temos

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS + \iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n}_1 \, dS = \iiint_W \operatorname{div} \vec{F} \, dV = \iiint_W 3(x^2 + y^2 + z^2) \, dV.$$

Passando para coordenadas esféricas, temos $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$, $dV = \rho^2 \sin \varphi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$ e $W_{\rho\phi\theta} : 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \phi \leq \pi/2$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Então,

$$\begin{aligned}
\iiint_W 3(x^2 + y^2 + z^2) dV &= 3 \iiint_{W_{\rho\phi\theta}} \rho^2 \cdot \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta \\
&= 3 \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho^4 \sin \phi d\theta d\rho d\phi \\
&= 6\pi \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \rho^4 \sin \phi d\rho d\phi \\
&= \frac{6\pi}{5} \int_0^{\pi/2} \sin \phi d\phi \\
&= \frac{6\pi}{5} \left[-\cos \phi \right]_0^{\pi/2} \\
&= \frac{6\pi}{5}.
\end{aligned}$$

Cálculo de $\iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n}_1 dS$

Temos

$$\iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n}_1 dS = \iint_{S_1} (x^3, y^3, 0) \cdot (0, 0, -1) dS = \iint_{S_1} 0 dS = 0.$$

Logo,

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \frac{6\pi}{5}.$$

Abraços,

Rioco K. Barreto

Coordenadora de Cálculo IV

Exercício 1: Verifique o teorema de Gauss calculando a integral de superfície e a integral tripla para o campo $\vec{F}(x, y, z) = 2x \vec{i} + 2y \vec{j} + z^2 \vec{k}$ e S é a superfície da seguinte região:

$$W = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}.$$

Exercício 2: Aplique o teorema da divergência para achar o fluxo do campo \vec{F} através de S , orientada positivamente:

- $\vec{F}(x, y, z) = (x^2 + y^2) \vec{i} + (y^2 - 2xy) \vec{j} + (4z - 2yz) \vec{k}$, onde S é a superfície do sólido W limitado pelo cone $x = \sqrt{y^2 + z^2}$ e pelo plano $x = 3$.
- $\vec{F}(x, y, z) = (x^3 + y \sin z) \vec{i} + (y^3 + z \sin x) \vec{j} + z^3 \vec{k}$, onde S é a superfície do sólido W limitado pelos hemisférios $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ e pelo plano $z = 0$.
- $\vec{F}(x, y, z) = (xy^2 + \cos z) \vec{i} + (x^2y + \sin z) \vec{j} + e^y \vec{k}$, onde S é a superfície do sólido W limitado pelo parabolóide $z = x^2 + y^2$ e pelo plano $z = 4$.

Exercício 3: Fechando de uma forma adequada as superfícies abertas dadas, e utilizando o teorema de Gauss, calcule o fluxo do campo \vec{F} através de S , com \vec{n} exterior à superfície fechada

- a) $\vec{F}(x, y, z) = (0, 0, 2z)$ onde S é a superfície do paralelepípedo limitado pelos planos coordenados e pelos planos $x = 1$, $y = 2$ e $z = 3$, exceto a face superior;
- b) $\vec{F}(x, y, z) = (x, y, z)$ onde $S : x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, com $z \leq 0$;
- c) $\vec{F}(x, y, z) = z \operatorname{arctg}(y^2) \vec{i} + z^3 \ln(x^2 + 1) \vec{j} + z \vec{k}$ onde $S : z = 2 - x^2 - y^2$, com $1 \leq z \leq 2$.
-

Exercício 4: Calcule $\iint_S (\operatorname{rot} \vec{F}) \cdot \vec{n} \, dS$, sendo $\vec{F}(x, y, z) = (e^x - y) \vec{i} + (xz + y^2) \vec{j} + 2yz \vec{k}$ e S é a parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 4z = 0$, com $z \leq 1$, orientada com \vec{n} exterior.

Exercício 5: Seja W a região limitada pelo cilindro parabólico $z = 1 - x^2$, o plano $y + z = 2$ e os planos coordenados $z = 0$ e $y = 0$. Calcule o fluxo do campo $\vec{F} = (x + e^{-y} \operatorname{sen} z) \vec{i} + (y + \operatorname{arctg} z) \vec{j} + (\operatorname{sen} x + \cos y) \vec{k}$ através da superfície S de W com normal \vec{n} exterior à W .

Cálculo IV – EP15 – Aluno

Aula 25 – Teorema de Stokes

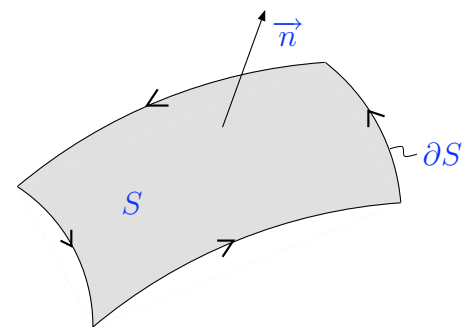
Objetivo

- Estudar um teorema famoso que generaliza o teorema de Green para o espaço.

O Teorema de Stokes

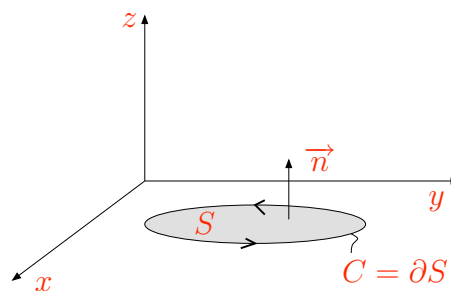
Seja U um aberto conexo de \mathbb{R}^3 e $\vec{F} = (P, Q, R)$ um campo vetorial de classe C^1 em U . Seja $S \subset U$, uma superfície regular por partes, orientada pelo campo normal unitário \vec{n} . Seja ∂S o bordo de S , com a orientação induzida pela de S . Então,

$$\underbrace{\iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS}_{\text{fluxo do rotacional}} = \underbrace{\oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r}}_{\text{circulação de } \vec{F}}$$



OBS.: Seja S uma superfície plana contida no plano xy , orientada com $\vec{n} = \vec{k}$. Então $S : z = 0, (x, y) \in D$. Logo, $dS = dxdy$. Seja $\vec{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$, então:

$$\text{rot } \vec{F} = \text{rot}(P, Q, 0) = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k}.$$



Logo, pelo Teorema de Stokes, temos:

$$\begin{aligned} \oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \oint_{\partial S} P \, dx + Q \, dy = \iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS \\ &= \iint_D \left(0, 0, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cdot (0, 0, 1) \, dxdy \\ &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cdot \end{aligned}$$

Isto prova que o Teorema de Stokes generaliza o Teorema de Green.

Como consequência do Teorema de Stokes, temos:

“Se $U = \text{dom } \vec{F}$ é um conjunto simplesmente conexo, isto é, U é o \mathbb{R}^3 ou U é o \mathbb{R}^3 , exceto um número finito de pontos, e se $\text{rot } \vec{F} = \vec{0}$ então \vec{F} é conservativo”.

O teorema das quatro equivalências é dado por: Seja $\vec{F} = (P, Q, R)$ um campo vetorial de classe C^1 em um conjunto simplesmente conexo do \mathbb{R}^3 . Então as seguintes afirmações são equivalentes:

- (1) $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ para toda curva fechada C ;
- (2) $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ é independente do caminho;
- (3) \vec{F} é um campo gradiente, isto é, $\vec{F} = \nabla\varphi$ para algum campo escalar φ ;
- (4) $\text{rot } \vec{F} = \vec{0}$.

Exemplo 1

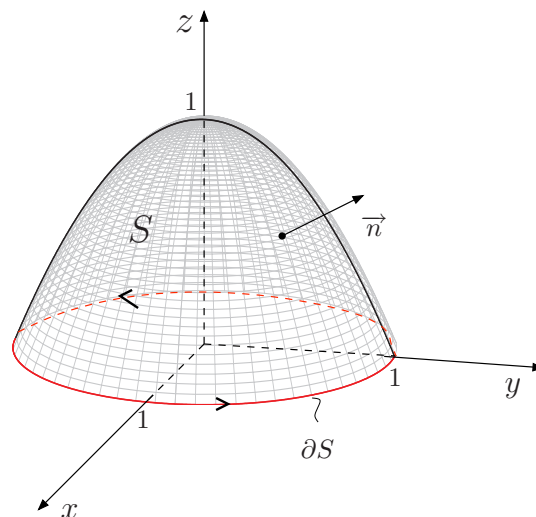
Verifique o teorema de Stokes, calculando as duas integrais do enunciado, para

$$\vec{F}(x, y, z) = -y \vec{i} + x \vec{j} + z \vec{k}$$

e S o parabolóide $z = 1 - x^2 - y^2$ com $z \geq 0$ e \vec{n} a normal unitária exterior a S .

Solução:

O esboço de S é:



Pela regra da mão direita, com o polegar no de sentido \vec{n} e movimentando os dedos, vemos que a curva bordo de S , ∂S , fica orientada no sentido anti-horário, quando vista de cima. Então uma parametrização de ∂S é, $\partial S : x = \cos t, y = \sin t$ e $z = 0$, com $0 \leq t \leq 2\pi$, donde $dx = -\sin t dt$, $dy = \cos t dt$ e $dz = 0$. Então:

$$\begin{aligned}
 \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_C -y \, dx + x \, dy + z \, dz \\
 &= \int_0^{2\pi} [(-\sin t)(-\sin t) + (\cos t)(\cos t)] \, dt \\
 &= \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) \, dt \\
 &= 2\pi.
 \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y & x & z \end{vmatrix} = (0, 0, 1 + 1) = (0, 0, 2).$$

Temos, $S : z = 1 - x^2 - y^2 = f(x, y)$, com $(x, y) \in D : x^2 + y^2 \leq 1$.

Um vetor normal a S é dado por $\vec{N} = (-f_x, -f_y, 1) = (2x, 2y, 1)$ que é exterior a S . Logo,

$$\vec{n} = \frac{(2x, 2y, 1)}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}} \quad \text{e} \quad dS = \sqrt{1+4x^2+4y^2} \, dx \, dy.$$

Então

$$\iint_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \iint_D (0, 0, 2) \cdot (2x, 2y, 1) \, dx \, dy = 2 \iint_D dx \, dy = 2 A(D) = 2\pi \cdot 1^2 = 2\pi.$$

Assim, o teorema de Stokes está verificado para este caso.

Exemplo 2

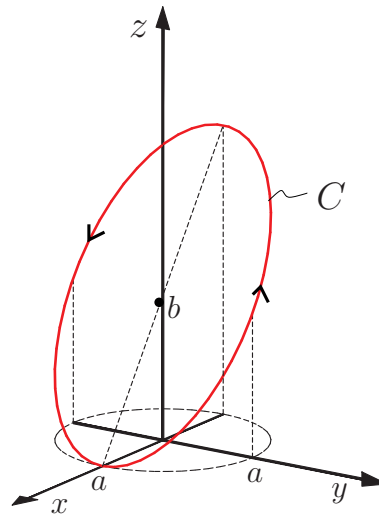
Use o teorema de Stokes para calcular $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, onde

$$\vec{F}(x, y, z) = (y - x + \sin x, z - x + \cos y, x - y + e^z)$$

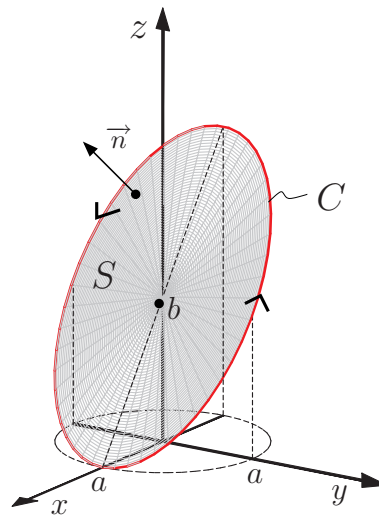
e C é a interseção do cilindro $x^2 + y^2 = a^2$ com o plano $\frac{x}{a} + \frac{z}{b} = 1$, sendo $a > 0$, $b > 0$, orientada no sentido anti-horário quando vista da parte superior do eixo z .

Solução:

O esboço de C está representado na figura a seguir.



Para aplicar o teorema de Stokes, precisamos de uma superfície S cujo bordo seja a curva C . Então consideremos a porção do plano $\frac{x}{a} + \frac{z}{b} = 1$, limitada por C .



Pela regra da mão direita, vemos que \vec{n} aponta para cima. Logo, podemos descrever S por $S : z = b - \frac{bx}{a} = f(x, y)$, com $(x, y) \in D : x^2 + y^2 \leq a^2$. Um vetor normal a S é :

$$\vec{N} = (-f_x, -f_y, 1) = \left(\frac{b}{a}, 0, 1\right)$$

que aponta para cima. Então, $\vec{n} = \frac{(\frac{b}{a}, 0, 1)}{\|\vec{N}\|}$ e $dS = \|\vec{N}\| dx dy$. Temos:

$$\text{rot } \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y - x + \sin x & z - x + \cos y & x - y + e^z \end{vmatrix} = (-1 - 1, 0 - 1, -1 - 1) = (-2, -1, -2).$$

Do teorema de Stokes, temos

$$\begin{aligned}
 \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \iint_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS \\
 &= \iint_D (-2, -1, -2) \cdot \left(\frac{b}{a}, 0, 1\right) \, dx \, dy \\
 &= \left(\frac{-2b}{a} - 2\right) \iint_D dx \, dy \\
 &= -2 \left(\frac{b+a}{a}\right) \pi ab \\
 &= -2\pi b(b+a).
 \end{aligned}$$

Exemplo 3

Seja $\vec{F}(x, y, z) = (3x^2z + y^3, 3xy^2 + e^z, x^3 + ye^z)$.

a) \vec{F} é conservativo? Por quê?

b) Seja C a curva obtida como interseção da superfície $z = x^2 + y^2 - 4$, $z \leq 1$ com o plano $y = -1$. Calcule $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, especificando a orientação escolhida.

Solução:

a) Temos $\operatorname{rot} \vec{F} = (e^z - e^z, 3y^2 - 3y^2, 3y^2 - 3y^2) = \vec{0}$ e $\operatorname{dom} \vec{F} = \mathbb{R}^3$ que é um conjunto simplesmente conexo. Então, pelo teorema das equivalências em \mathbb{R}^3 , segue que \vec{F} é um campo conservativo.

b) Logo, existe uma função potencial $\varphi(x, y, z)$, tal que:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 3x^2z + y^3 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 3xy^2 + e^z \quad (2)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = x^3 + ye^z \quad (3)$$

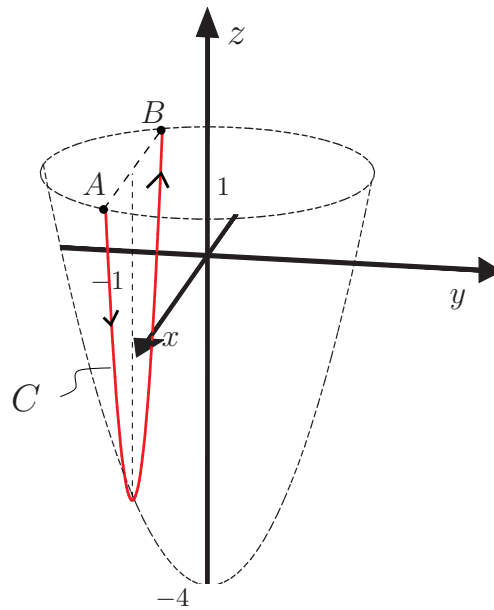
Integrando (1), (2) e (3) em relação a x , y e z , respectivamente, temos:

$$\varphi(x, y, z) = x^3z + xy^3 + f(y, z) \quad (4)$$

$$\varphi(x, y, z) = xy^3 + ye^z + g(x, z) \quad (5)$$

$$\varphi(x, y, z) = x^3z + ye^z + h(x, y) \quad (6)$$

Comparando (4), (5) e (6), vemos que $f(y, z) = ye^z$, $g(x, z) = x^3z$ e $h(x, y) = xy^3$. Logo, $\varphi(x, y, z) = x^3z + xy^3 + ye^z$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ é uma função potencial de \vec{F} . O esboço de C está representado na figura a seguir.



Escolhamos a orientação de $A = (2, -1, 1)$ para $B = (-2, -1, 1)$. Então

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \varphi(B) - \varphi(A) = \varphi(-2, -1, 1) - \varphi(2, -1, 1) = (-8 + 2 - e) - (8 - 2 - e) = -12.$$

Até a próxima aula.

Rioco K. Barreto

Coordenadora de Cálculo IV

Exercício 1: Verifique o teorema de Stokes, calculando a integral de linha e a integral de superfície para o campo \vec{F} e a superfície S .

- $\vec{F}(x, y, z) = 2y\vec{i} - z\vec{j} + 3\vec{k}$, S é a parte do parabolóide $z = 4 - x^2 - y^2$ interior ao cilindro $x^2 + y^2 = 1$, sendo \vec{n} tal que $\vec{n} \cdot \vec{k} > 0$.
- $\vec{F}(x, y, z) = (2z, x, 3y)$, e S a porção do plano $x - z = 0$, contida no cilindro $x^2 + y^2 = 4$, sendo \vec{n} tal que $\vec{n} \cdot \vec{k} > 0$.

Exercício 2: Use o teorema de Stokes para calcular $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, onde:

- $\vec{F}(x, y, z) = yz\vec{i} + xy\vec{j} + xz\vec{k}$ e C é o quadrado de vértices $(0, 0, 2)$, $(1, 0, 2)$, $(1, 1, 2)$ e $(0, 1, 2)$, orientado no sentido anti-horário quando visto de cima;
- $\vec{F}(x, y, z) = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}$ e C é a fronteira do triângulo de vértices $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$, percorrido nesta ordem;
- $\vec{F}(x, y, z) = (y - z, z - x, x - y)$ e C é a curva interseção do cilindro $x^2 + y^2 = 1$, com o plano $x + z = 1$, orientada no sentido anti-horário quando vista de cima;
- $\vec{F}(x, y, z) = (z + y^2, e^{y^2} + 1, \ln(z^2 + 1) + y)$ e C é parametrizada por $\gamma(t) = (2 \cos t, 2 \sin t, 4 - 2 \sin t)$, com $t \in [0, 2\pi]$.

Exercício 3: Use o teorema de Stokes para calcular $\iint_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$

- a) $\vec{F}(x, y, z) = x^2 e^{yz} \vec{i} + y^2 e^{x^2} \vec{j} + z^2 e^{xy} \vec{k}$, S é o hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, com $z \geq 0$ e com orientação para cima;
- b) $\vec{F}(x, y, z) = (xy^2, x, z^3)$ e S qualquer superfície cujo bordo seja a curva $\gamma(t) = (2 \cos t, 3 \sin t, 1)$, com $0 \leq t \leq 2\pi$, com a normal apontando para cima.
-

Exercício 4: Seja $\vec{F}(x, y, z) = (8x^3 + z^2, -3z, 2xz - 3y)$.

- a) \vec{F} é um campo conservativo em \mathbb{R}^3 ? Porquê?
- b) Se C é o segmento de reta que liga $(0, 0, 0)$ a $(2, 1, 3)$, calcule $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$.
-

Exercício 5: A integral

$$\int_C 2xe^{2y} \, dx + 2(x^2 e^{2y} + y \cos z) \, dy - y^2 \sin z \, dz$$

é independente do caminho? Calcule o valor da integral para a curva C obtida como interseção da superfície $z = 9 - x^2 - y^2$, com $z \geq 5$ com o plano $x = 1$, orientada no sentido de crescimento de y .