Lista 1 - Métodos Matemáticos II
Respostas

Prof. Jorge Delgado

Importante: As resoluções não pretendem ser completas mas apenas uma indicação para o aluno consultar caso seja necessário, cabendo a ele fornecer os detalhes dos raciocínios e os cálculos intermediários.

1. Calcule:

(a) $(1+2i)^3$; (b) $\dfrac{5}{2-3i}$; (c) $\left(\dfrac{2+i}{3-2i}\right)^2$; (d) $(1-i)^n + (1+i)^n$.

Solução.

(d) Todo número natural n se escreve como $4k$ ou $4k+1$ ou $4k+2$ ou $4k+3$, pois a divisão de n por 4 dá quociente $k \in \mathbb{N}$ e os possíveis restos são 0, 1, 2 ou 3.

Como

$$(1-i)^4 = [(1-i)^2]^2 = [1-2i+i^2]^2 = -4$$

e

$$(1+i)^4 = [(1+i)^2]^2 = [1+2i+i^2]^2 = -4,$$

temos:

• para $n = 4k$, $k \in \mathbb{N}$:

$(1-i)^{4k} + (1+i)^{4k} = [(1-i)^4]^k + [(1+i)^4]^k = 2(-4)^k = (-1)^k 2^{2k+1}$.

• para $n = 4k+1$, $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}(1-i)^{4k+1} + (1+i)^{4k+1} &= (1-i)^{4k}(1-i) + (1+i)^{4k}(1+i)\\ &= (-4)^k[(1-i)+(1+i)]\\ &= 2(-4)^k = (-1)^k 2^{2k+1}.\end{aligned}$$

• para $n = 4k+2$, $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}(1-i)^{4k+2}+(1+i)^{4k+2} &= (1-i)^{4k}(1-i)^2+(1+i)^{4k}(1+i)^2\\ &= (-4)^k[(1-i)^2+(1+i)^2]\\ &= (-4)^k[(1-2i+i^2)+(1+2i+i^2)]\\ &= (-4)^k\cdot 0 = 0.\end{aligned}$$

- para $n = 4k+3$, $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}(1-i)^{4k+3}+(1+i)^{4k+3} &= (1-i)^{4k}(1-i)^3+(1+i)^{4k}(1+i)^3\\ &= (-4)^k[(1-i)^2(1-i)+(1+i)^2(1+i)]\\ &= (-4)^k[(-2i)(1-i)+(2i)(1+i)]\\ &= (-4)^k[(-2i)(1-i)+(2i)(1+i)]\\ &= (-4)^k(-4) = (-4)^{k+1} = (-1)^k 2^{2(k+1)}.\end{aligned}$$

Portanto,

$$(1-i)^n+(1+i)^n = \begin{cases}(-1)^k 2^{2k+1}, & \text{se } n = 4k \text{ ou } n = 4k+1\\ 0, & \text{se } n = 4k+2\\ (-1)^k 2^{2(k+1)}, & \text{se } n = 4k+3.\end{cases}$$

2. Dado $z = x + iy$, onde $x, y \in \mathbb{R}$, determine a parte real e a parte imaginária de

(a) z^4; (b) $\dfrac{1}{z}$; (c) $\dfrac{z-1}{z+1}$; (d) $\dfrac{1}{z^2}$.

Solução.

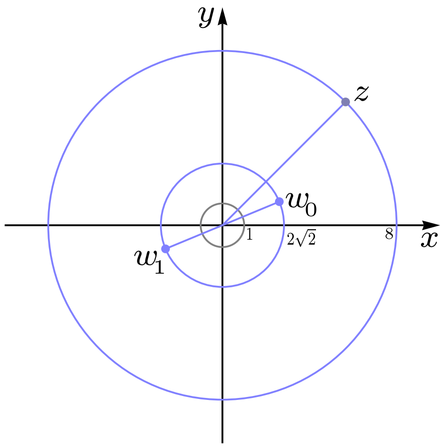
(a) parte real $(x^4 - 6x^2y^2 + y^4)$, parte imaginária $4(x^3y - xy^3)$;

(d) parte real $\dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$, parte imaginária $\dfrac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$.

3. Calcule e indique no plano complexo:

(a) $\sqrt{1+i}$; (b) $\sqrt{\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}}$; (c) $\sqrt[4]{-1}$; (d) $\sqrt[4]{-i}$; (e) $\sqrt[6]{1}$;

(f) $\sqrt[4]{3}$; (g) $\sqrt{4\sqrt{2}+4\sqrt{2}i}$; (h) $\left(\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^6$.



Solução.

(g) Seja $z = 4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i$. Como

$$z = 4\sqrt{2}(1+i) = 4\sqrt{2}\sqrt{2}\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= 8\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right) = 8\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{4}\right),$$

$w = \sqrt{z}$ tem dois valores w_0 e w_1:

$$w_0 = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{8}\right)$$

$$w_1 = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{9\pi}{8} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{9\pi}{8}\right).$$

4. Calcule as soluções da equação

$$z^2 + (\alpha + i\beta)z + (\gamma + i\delta) = 0.$$

Solução.

$$z_0 = \frac{1}{2}\left(\alpha + i\beta + \sqrt{(\alpha^2 - \beta^2 - 4\gamma) + i(2\alpha\,\beta - 4\delta)}\right);$$

$$z_1 = \frac{1}{2}\left(\alpha + i\beta - \sqrt{(\alpha^2 - \beta^2 - 4\gamma) + i(2\alpha\,\beta - 4\delta)}\right).$$

5. Verifique que os valores de $\dfrac{z}{z^2+1}$ para $z = a + ib$ e para $\overline{z} = a - ib$ são conjugados.

Solução.

Para $z = a + ib$ temos $\dfrac{a+ib}{1+a^2-b^2+2abi}$ e, para $\overline{z} = a - ib$ temos $\dfrac{a-ib}{1+a^2-b^2-2abi}$.

6. Calcule o módulo de:

(a) $-2i(3+i)(2+4i)(1+i)$; (b) $\dfrac{(3+4i)(-1+2i)}{(-1-i)(3-i)}$.

Solução.

(b) $\left|\dfrac{(3+4i)(-1+2i)}{(-1-i)(3-i)}\right| = \dfrac{|3+4i|\cdot|-1+2i|}{|-1-i|\cdot|3-i|} = \dfrac{5\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{10}} = \dfrac{25}{2\sqrt{5}} = \dfrac{5\sqrt{5}}{2}$,.

7. Verifique que:

(a) $\dfrac{1+i}{1-i} + \dfrac{1-i}{1+i} = 0$; (b) $(z+\overline{z})^2 - (z-\overline{z})^2 = 4|z|^2$.

Solução.

(b) $(z+\overline{z})^2-(z-\overline{z})^2 = (z^2+2z\overline{z}+\overline{z}^2)-(z^2-2z\overline{z}+\overline{z}^2) = 4z\overline{z} = 4|z|^2$.

8. Determine condições sobre os coeficientes da equação $az+b\overline{z}+c = 0$, $z \in \mathbb{C}$, para que possua exatamente uma solução. Nesse caso, calcule a solução.

Solução.

A condição é $|a| \neq |b|$, e a solução, nesse caso, é: $z = x + iy$, onde

$$x = \frac{\gamma_1(\beta_1 - \alpha_1) + \gamma_2(\beta_2 - \alpha_2)}{|a|^2 - |b|^2}; \qquad y = \frac{\gamma_1(\beta_2 + \alpha_2) - \gamma_2(\beta_1 + \alpha_1)}{|a|^2 - |b|^2},$$

sendo $a = \alpha_1 + i\alpha_2$, $b = \beta_1 + i\beta_2$ e $c = \gamma_1 + i\gamma_2$.

9. Sejam $z = a + ib, w = c + id \in \mathbb{C}$, $w \neq 0$. Mostre que $\dfrac{z}{w} \in \mathbb{R}$ se, e somente se, $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0$.

Solução.

$\dfrac{z}{w} \in \mathbb{R} \iff \operatorname{Im}\left(\dfrac{z}{w}\right) = 0 \iff \dfrac{bc - ad}{c^2 + d^2} = 0 \iff ad - bc = 0 \iff \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0.$

10. Dê um isomorfismo entre $\mathbb{C}$ e o subespaço do espaço das matrizes 2×2 da forma $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ que preserve a operação de multiplicação.

Solução.

Se M é o subespaço das matrizes que tem a forma das matrizes do enunciado, verifica-se que a aplicação $L : C \longrightarrow M$, dada por

$$L(x + iy) = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix},$$

é um isomorfismo entre espaços vetoriais reais.

Verifica-se que $L((x + iy)(u + iv)) = L(x + iy) \cdot L(u + iv)$.

11. Calcule o argumento de $(i(1 + i))^{-1}$.

Solução.

$\dfrac{5\pi}{4}$.

12. Escreva o número $z = \left(2^{1/9}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{12}\right)\right)^{36}$ na forma $a + ib$.

Solução.

$a = -16$, $b = 0$.

13. Determine o número complexo z tal que $\arg(z+i) = \frac{\pi}{4}$ e $|z| = 2$.

Solução.

$$z_1 = \frac{(1+\sqrt{7}) + i(-1+\sqrt{7})}{2}, \qquad z_2 = \frac{(1-\sqrt{7}) + i(-1-\sqrt{7})}{2}.$$

14. Verifique que se $\omega \in \mathbb{C}$ é uma raíz $n-$ésima não real da unidade, então $1 + \omega + \omega^2 + \cdots + \omega^{n-1} = 0$.

Solução.

$0 = \omega^n - 1 = (\omega - 1)(1 + \omega + \omega^2 + \cdots + \omega^{n-1})$.

Como $\omega \neq 1$, pois $\omega \notin \mathbb{R}$, tem-se $1 + \omega + \omega^2 + \cdots + \omega^{n-1} = 0$.

15. Simplifique

$$1 + \cos\theta + \cos 2\theta + \cdots + \cos n\theta \quad \text{e} \quad \mathrm{sen}\,\theta + \mathrm{sen}\,2\theta + \cdots \mathrm{sen}\,n\theta.$$

Solução.

Se $\theta = 0$ ambas expressões são iguais a zero.

Senão, temos $z = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta \neq 1$ e:

$$1 + z + \cdots + z^n = \frac{z^{n+1} - 1}{z - 1}.$$

As expressões do enunciado são, respectivamente, a parte real e a parte imaginária de $1 + z + \cdots + z^n$. Ou seja, de

$$\begin{aligned}
\frac{z^{n+1}-1}{z-1} &= \frac{\cos(n+1)\theta + i\,\mathrm{sen}(n+1)\theta}{\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta} \\
&= \frac{(\cos(n+1)\theta - 1)(\cos\theta - 1) + (\mathrm{sen}(n+1)\theta)(\mathrm{sen}\,\theta)}{2(1-\cos\theta)} \\
&\quad + i\frac{(\cos(n+1)\theta - 1)(-\,\mathrm{sen}\,\theta) + (\mathrm{sen}(n+1)\theta)(\cos\theta - 1)}{2(1-\cos\theta)} \\
&= \left[\csc\frac{\theta}{2}\cos\frac{n\theta}{2}\,\mathrm{sen}\,\frac{(n+1)\theta}{2}\right] + i\left[\csc\frac{\theta}{2}\,\mathrm{sen}\,\frac{n\theta}{2}\,\mathrm{sen}\,\frac{(n+1)\theta}{2}\right].
\end{aligned}$$

16. Se $\omega = \cos\frac{2\pi}{n} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{n}$, verifique que:

$$1 + \omega^k + \omega^{2k} + \cdots + \omega^{(n-1)k} = 0,$$

onde k é um inteiro qualquer que não é múltiplo de n.

Solução.

Se $k \in \mathbb{Z}$ não é múltiplo de n, então $\omega^k = \cos \dfrac{2k\pi}{n} + i \operatorname{sen} \dfrac{2k\pi}{n}$ é uma raiz $n-$ésima da unidade não-real. O resultado segue do exercício 14.

17. Se $f(z) = \dfrac{2z+1}{3z-2}$, $z \neq \dfrac{2}{3}$, determine $f(f(z))$.

Solução.

Para $z \neq \dfrac{8}{5}$, $f(z) \neq \dfrac{2}{3}$ e $f(f(z)) = \dfrac{2f(z)+1}{3f(z)-2} = \dfrac{2\dfrac{2z+1}{3z-2}+1}{3\dfrac{2z+1}{3z-2}-2} = z$.

18. Determine as partes real e imaginária de $f(z) = \dfrac{1-z}{1+z}$.

Solução.

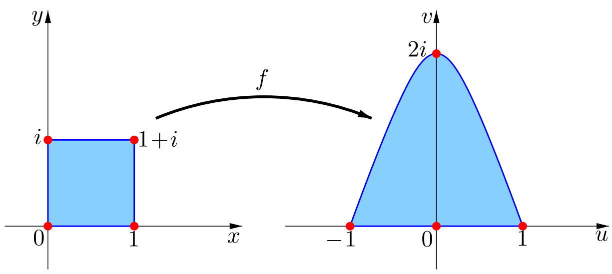
$\operatorname{Re} f(z) = \dfrac{1-x^2-y^2}{(1+x)^2+y^2}$ e $\operatorname{Im} f(z) = \dfrac{-2y}{(1+x)^2+y^2}$.

19. Determne as curvas no plano complexo que são transformadas nas retas $u = a$ e $v = b$ pela aplicação $w = z^2$. Determine também a região obtida como imagem por essa aplicação do quadrado unitário $Q = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z) \in [0,1]\}$.

Solução.

Como $z^2 = (x^2-y^2)+2xyi$, temos que $u(x,y) = x^2-y^2$ e $v(x,y) = 2xy$. Portanto, as curvas de nível $u = a$ são hipérboles assintóticas às retas $y = x$ e $y = -x$. Também, as curvas de nível $v = b$ são hipérboles assintóticas às retas $x = 0$ e $y = 0$.

A imagem $f(Q)$ do quadrado unitário é mostrada na figura abaixo.



20. Mostre que a aplicação $f(z) = \ln z$ transforma círculos centrados na origem em retas verticais e retas passando pela origem em retas horizontais.

Solução.

Temos $f(z) = \ln z = \ln|z| + i\theta$, onde θ é o argumento de $z = |z|e^{i\theta}$. Assim, os pontos de um círculo de centro 0 e raio r, por satisfazer a equação $|z| = r$, são levados por f em $f(z) = \ln r + i\theta$. Isto é, o círculo todo é levado na vertical $u = \ln r$.

Analogamente, os números complexos numa reta pela origem podem ser escritos na forma $re^{i\theta}$ variando r e mantendo $\theta \in [0, 2\pi)$ fixo. Aplicando f a tais complexos obtemos números da forma $\ln r + i\theta$, com θ fixo, que pertencem à reta horizontal $v = \theta$.

21. Determine a imagem da reta $\operatorname{Im}(z) = 0$ pela aplicação $f(z) = \dfrac{1 - iz}{1 + iz}$ definida para $z \neq i$.

Solução.

Se $\operatorname{Im} z = 0$, então $z = x \in \mathbb{R}$, e

$$f(x) = \frac{1 - ix}{1 + ix} = \frac{(1 - ix)^2}{1 + x^2} = \frac{1 - 2ix - x^2}{1 + x^2} = \frac{1 - x^2}{1 + x^2} - \frac{2ix}{1 + x^2}.$$

Como $\left(\dfrac{1 - x^2}{1 + x^2}\right)^2 + \left(\dfrac{-2ix}{1 + x^2}\right)^2 = 1$, vemos que a imagem da reta $\operatorname{Im}(z) = 0$ pela aplicação f é o círculo unitário retirando o ponto -1, pois $\displaystyle\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1 - x^2}{1 + x^2} = -1$.

22. Determine a imagem da reta $\operatorname{Re}(z) = 0$ pela aplicação $f(z) = \dfrac{i - z}{i + z}$ definida para $z \neq -i$.

Solução.

Temos que $f(iy) = \dfrac{i - iy}{i + iy} = \dfrac{1 - y}{1 + y}$, $y \neq -1$. Portanto, a imagem da reta $\operatorname{Re}(z) = 0$ é a reta $\operatorname{Im}(z) = 0$ omitindo -1:

$$f\{z \in \mathbb{C} - \{-i\} \mid \operatorname{Re}(z) = 0\} = \{z \in \mathbb{C} - \{-1\} \mid \operatorname{Im}(z) = 0\}.$$

23. Prove que não existe $\displaystyle\lim_{z \to 0} \frac{\overline{z}}{z}$.

Solução.

Note que $\dfrac{\overline{z}}{z} = \overline{z}\dfrac{1}{z} = \overline{z}\dfrac{\overline{z}}{|z|^2} = \dfrac{\overline{z}^2}{|z|^2} = \dfrac{\overline{z}^2}{|\overline{z}|^2} = \left(\dfrac{\overline{z}}{|\overline{z}|}\right)^2$. O limite não existe porque $\dfrac{\overline{z}}{|\overline{z}|}$ é um número complexo unitário qualquer que seja $z \in \mathbb{C} - \{0\}$, e fazendo $z = x \in \mathbb{R}^+$ tender a 0, obtemos $\dfrac{\overline{z}}{z} \longrightarrow 1$, enquanto que fazendo $z = x \in \mathbb{R}^-$ tender a 0, obtemos $\dfrac{\overline{z}}{z} \longrightarrow -1$.

24. Calcule a derivada das funções

(a) $f(z) = (1 - 4z^2)^3$; (b) $f(z) = \dfrac{z-1}{2z+1}$, $z \neq \dfrac{1}{2}$.

Solução.

(b) $f'(z) = \dfrac{1(2z+1) - (z-1)2}{(2z+1)^2} = \dfrac{3}{(2z+1)^2}$.

25. Mostre que as funções $f(z) = \mathrm{Re}(z)$, $g(z) = \mathrm{Im}(z)$ e $h(z) = \overline{z}$ não são deriváveis em complexo algum. Além disso, $m(z) = |z|$ é derivável apenas em $z_0 = 0$.

Solução.

Calcular as derivadas parciais das partes real e imaginária das funções e verificar as equações de Cauchy-Riemann.

26. Escreva as equações de Cauchy-Riemann em coordenadas polares.

Solução.

Sendo $\tilde{u}(r,\theta) = u(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)$ e $\tilde{v}(r,\theta) = v(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)$, fazendo uso da regra da cadeia temos que as equações de Cauchy-Riemann se escrevem:

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta} = -r\frac{\partial \tilde{v}}{\partial r}$$
$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \theta} = r\frac{\partial \tilde{u}}{\partial r}.$$

27. Seja $f(z) = \ln r + i\theta = u + iv$, com $r = |z|$. Mostre que u e v satisfazem as equações de Cauchy-Riemann em coordenadas polares.

Solução.

$u(r,\theta) = \ln r$ e $v(r,\theta) = \theta$, logo:

$$r\,u_r = r\frac{1}{r} = 1 = v_\theta \qquad \text{e} \qquad -r v_r = 0 = u_\theta.$$

28. Mostre que a parte real e a parte imaginária da função $f(z) = (x - y)^2 + 2i(x+y)$, $z = x + iy$, satisfazem as equações de Cauchy-Riemann somente sobre a curva $x - y = 1$. A função f é analítica?

Solução.
$u_x = 2(x-y)$, $v_y = 2$ e $u_y = -2(x-y)$, $-v_x = -2$. Portanto, as equações de Cauchy-Riemann são satisfeitas se e só se, $x - y = 1$. Como as derivadas parciais de u e v são C^1, f é derivável ao longo da reta $x - y = 1$. Como f não é derivável em nenhum ponto de um conjunto aberto que contém a reta, f não é analítica.

29. Se $3x^2y - y^3$ é a parte real de uma função analítica $f(z)$, determine a parte imaginária.
Solução.
Seja $u(x,y) = 3x^2y - y^3$. Note que $u_x = 6xy$ e $u_y = 3x^2 - 3y^2$. Procuramos por uma função harmônica $v(x,y)$ que junto com $u(x,y)$ satisfaça as equações de Cauchy-Riemann. Isto é, procuramos $v(x,y)$ tal que:

$$\begin{aligned} v_y &= u_x = 6xy \qquad (1)\\ v_x &= -u_y = -3x^2 + 3y^2 . \qquad (2) \end{aligned}$$

Integrando (1) em relação a y temos

$$v(x,y) = 3xy^2 + K(x). \qquad (3)$$

Derivando (3) com respeito a x e usando (2), temos $K'(x) = -3x^2$. Logo podemos tomar $K(x) = -x^3$ e, portanto $v(x,y) = 3xy^2 - x^3$.

30. Prove que xy^2 não pode ser parte real de uma função analítica.
Solução.
A função não é harmônica.

31. $f(z) = 2xy + i(x^2 - y^2)$ é analítica?
Solução.
Não, pois as equações de Cauchy-Riemann não são satisfeitas.

32. Se $f(z) = \dfrac{1+z}{1-z}$ determine $f'(z)$ e diga onde f é analítica.
Solução.
$f(z)$ é analítica em $\mathbb{C} - \{1\}$ e $f'(z) = \dfrac{2}{(1-z)^2}$.

33. Prove que a função $u(x,y) = e^{-x}(x \operatorname{sen} y - y \cos y)$ é uma função harmônica e determine a sua conjugada harmônica $v(x,y)$ de modo que $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, $z = x + iy$, seja analítica.

Solução.

$v(x,y) = e^{-x}(x \cos y + y \operatorname{sen} y)$.

34. Verifique que as partes real e imaginária de $f(z) = z\,e^{-z}$ satisfazem as equações de Cauchy-Riemann.

Solução.

Como

$u(x,y) = e^{x}(x \cos y - y \operatorname{sen} y)$ e $v(x,y) = e^{x}(x \operatorname{sen} y + y \cos y)$,

temos:

$$\begin{array}{rcccl} u_x(x,y) & = & e^{-x}((1-x)\cos y - y \operatorname{sen} y) & = & v_y \\ -u_y(x,y) & = & e^{-x}((x-1)\operatorname{sen} y + y \cos y) & = & v_x. \end{array}$$

35. Mostre que a função $f(z) = x^2 + iy^3$, $z = x + iy$, não é analítica em ponto algum.

Solução.

As equações de Cauchy-Riemann são satisfeitas somente ao longo da parábola $x = 3y^2$ e $v(x,y) = y^3$ é harmônica somente ao longo da reta $\operatorname{Im} z = 0$.

36. Determine quais das funções $u(x,y)$ dadas abaixo são harmônicas. Para as $u(x,y)$ harmônicas ache a conjugada harmônica $v(x,y)$ e expresse $u + iv$ como função analítica de z.

(a) $3x^2y + 2x^2 - y^3 - 2y^2$;

(b) $2xy + 3xy^2 - 2y^3$;

(c) $xe^x \cos y - ye^x \operatorname{sen} y$;

(d) $e^{-xy} \operatorname{sen}(x^2 - y^2)$.

Solução.

(b) e (d) não são harmônicas.

(a) é harmônica e $v(x,y) = 4xy + 3xy^2 - x^3$.

(c) é harmônica e $v(x,y) = e^{-x}(y \cos y + x \operatorname{sen} y)$.