Lista 1 - Métodos Matemáticos II

Prof. Jorge Delgado

1. Calcule:

$$(1+2i)^3\,; \qquad \frac{5}{2-3i}\,; \qquad \left(\frac{2+i}{3-2i}\right)^2\,; \qquad (1-i)^n+(1+i)^n\,.$$

2. Dado $z = x + iy$, onde $x, y \in \mathbb{R}$, determine a parte real e a parte imaginária de

$$z^4\,; \qquad \frac{1}{z}\,; \qquad \frac{z-1}{z+1}\,; \qquad \frac{1}{z^2}\,.$$

3. Calcule e indique no plano complexo:

$$\sqrt{1+i}\,; \qquad \sqrt{\frac{1-i\sqrt{3}}{2}}\,; \qquad \sqrt[4]{-1}\,; \qquad \sqrt[4]{-i}\,; \qquad \sqrt[6]{1}\,; \qquad \sqrt[4]{3}\,;$$

$$\sqrt{4\sqrt{2}+4\sqrt{2}i}\,; \qquad \left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^6\,.$$

4. Calcule as soluções da equação

$$z^2 + (\alpha + i\beta)z + (\gamma + i\delta) = 0.$$

5. Verifique que os valores de $\dfrac{z}{z^2+1}$ para $z = a + ib$ e para $z = a - ib$ são conjugados.

6. Calcule o módulo de:

$$-2i(3+i)(2+4i)(1+i)\,; \qquad \frac{(3+4i)(-1+2i)}{(-1-i)(3-i)}\,.$$

7. Verifique que:

$$\frac{1+i}{1-i} + \frac{1-i}{1+i} = 0\,; \qquad (z+\overline{z})^2 - (z-\overline{z})^2 = 4|z|^2\,.$$

8. Determine condições sobre os coeficientes da equação $az+b\overline{z}+c=0$, $z \in \mathbb{C}$, para que possua exatamente uma solução. Nesse caso, calcule a solução.

9. Sejam $z = a + ib, w = c + id \in \mathbb{C}$, $w \neq 0$. Mostre que $\dfrac{z}{w} \in \mathbb{R}$ se, e somente se, $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0$.

10. Dê um isomorfismo entre $\mathbb{C}$ e o subespaço do espaço das matrizes 2×2 da forma $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ que preserve a operação de multiplicação.

11. Calcule o argumento de $(i(1+i))^{-1}$.

12. Escreva o número $z = \left(2^{1/9}\left(\cos\dfrac{\pi}{12} + i\,\text{sen}\,\dfrac{\pi}{12}\right)\right)^{36}$ na forma $a + ib$.

13. Determine o número complexo z tal que $\arg(z+i) = \dfrac{\pi}{4}$ e $|z| = 2$.

14. Verifique que se $\omega \in \mathbb{C}$ é uma raíz $n-$ésima não real da unidade, então $1 + \omega + \omega^2 + \cdots + \omega^{n-1} = 0$.

15. Simplifique

$1 + \cos\theta + \cos 2\theta + \cdots + \cos n\theta$ e $\text{sen}\,\theta + \text{sen}\,2\theta + \cdots \text{sen}\,n\theta$.

16. Se $\omega = \cos\dfrac{2\pi}{n} + i\,\text{sen}\,\dfrac{2\pi}{n}$, verifique que:

$$1 + \omega^k + \omega^{2k} + \cdots + \omega^{(n-1)k} = 0\,,$$

onde k é um inteiro qualquer que não é múltiplo de n.

17. Se $f(z) = \dfrac{2z+1}{3z-2}$, $z \neq \dfrac{2}{3}$, determine $f(f(z))$.

18. Determine as partes real e imaginária de $f(z) = \dfrac{1-z}{1+z}$.

19. Determne as curvas no plano complexo que são transformadas nas retas $u = a$ e $v = b$ pela aplicação $w = z^2$. Determine também a região obtida como imagem por essa aplicação do quadrado unitário $Q = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z) \in [0,1]\}$.

20. Mostre que a aplicação $f(z) = \ln z$ transforma círculos centrados na origem em retas verticais e retas passando pela origem em retas horizontais.

21. Determine a imagem da reta $\mathrm{Im}(z) = 0$ pela aplicação $f(z) = \dfrac{1 - iz}{1 + iz}$ definida para $z \neq i$.

22. Determine a imagem da reta $\mathrm{Re}(z) = 0$ pela aplicação $f(z) = \dfrac{i - z}{i + z}$ definida para $z \neq -i$.

23. Prove que não existe $\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{\overline{z}}{z}$.

24. Calcule a derivada das funções

$$f(z) = (1 - 4z^2)^3\,; \qquad f(z) = \frac{z - 1}{2z + 1}\,, \quad z \neq \frac{1}{2}.$$

25. Mostre que as funções $f(z) = \mathrm{Re}(z)$, $g(z) = \mathrm{Im}(z)$ e $h(z) = \overline{z}$ não são deriváveis em complexo algum. Além disso, $m(z) = |z|$ é derivável apenas em $z_0 = 0$.

26. Escreva as equações de Cauchy-Riemann em coordenadas polares.

27. Seja $f(z) = \ln r + i\theta = u + iv$, com $r = |z|$. Mostre que u e v satisfazem as equações de Cauchy-Riemann em coordenadas polares.

28. Mostre que a parte real e a parte imaginária da função $f(z) = (x - y)^2 + 2i(x + y)$, $z = x + iy$, satisfazem as equações de Cauchy-Riemann somente sobre a curva $x - y = 1$. A função f é analítica?

29. Se $3x^2y - y^3$ é a parte real de uma função analítica $f(z)$, determine a parte imaginária.

30. Prove que xy^2 não pode ser parte real de uma função analítica.

31. $f(z) = 2xy + i(x^2 - y^2)$ é analítica?

32. Se $f(z) = \dfrac{1+z}{1-z}$ determine $f'(z)$ e diga onde f é analítica.

33. Prove que a função $u(x, y) = e^{-x}(x \operatorname{sen} y - y \cos y)$ é uma função harmônica e determine a sua conjugada harmônica $v(x, y)$ de modo que $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z = x + iy$, seja analítica.

34. Verifique que as partes real e imaginária de $f(z) = z e^{-z}$ satisfazem as equações de Cauchy-Riemann.

35. Mostre que a função $f(z) = x^2 + iy^3$, $z = x + iy$, não é analítica em ponto algum.

36. Determine quais das funções $u(x, y)$ dadas abaixo são harmônicas. Para as $u(x, y)$ harmônicas ache a conjugada harmônica $v(x, y)$ e expresse $u + iv$ como função analítica de z.

(a) $3x^2y + 2x^2 - y^3 - 2y^2$;

(b) $2xy + 3xy^2 - 2y^3$;

(c) $xe^x \cos y - ye^x \operatorname{sen} y$;

(d) $e^{-xy} \operatorname{sen}(x^2 - y^2)$.