Lista 2 - Métodos Matemáticos II
Respostas

Prof. Jorge Delgado

Importante: As resoluções não pretendem ser completas mas apenas uma indicação para o aluno consultar caso seja necessário, cabendo a ele fornecer os detalhes dos raciocínios e os cálculos intermediários.

1. Verifique que qualquer ramo de $\ln z$ é analítica e sua derivada é $\frac{1}{z}$.

Solução.
Seja $\ln z = \ln|z| + i(\theta + 2k\pi)$, onde $k \in \mathbb{Z}$ é fixo, um ramo de $\ln z$. As partes real e imaginária de $\ln z$ na representação polar, $u(r,\theta) = \ln r$ e $v(r,\theta) = \theta + 2k\pi$, são de classe C^1 e satisfazem as equações de Cauchy-Riemann em coordenadas polares: $u_\theta = 0 = -rv_r$ e $v_\theta = 1 = r\frac{1}{r} = ru_r$.

2. Verifique que duas funções $v_1(x,y)$ e $v_2(x,y)$ que são harmônicas conjugadas de uma mesma função harmônica $u(x,y)$ diferem por uma constante aditiva.

Solução.
$f_1 = u + iv_1$ e $f_2 = u + iv_2$ são analíticas. Logo, $g = f_1 - f_2 = i(v_1 - v_2)$ é analítica e toma valores puramente imaginários. Em particular, a parte real 0 e a parte imaginária $v_1 - v_2$ de g satisfazem as equações de Cauchy-Riemann. Portanto, $v_1 - v_2 = k$ é constante.

3. Seja $f : E \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica definida num aberto conexo E. Verifique que se f toma somente valores reais então f é constante.

Solução.
Se $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ é analítica e toma somente valores re-

ais, então $v(x,y) \equiv 0$. Logo, $u_x = v_y = 0$ e $u_y = -v_x = 0$ implicam que u é constante em cada componente conexa do domínio. Sendo E conexo, f é constante.

4. Calcule:

$$\text{(a)} \int_0^{\pi/6} e^{2it}\,dt; \qquad \text{(b)} \int_0^{\infty} e^{-zt}\,dt, \text{ com } \operatorname{Re} z > 0.$$

Solução.

(a) $\dfrac{\sqrt{3}}{4} + \dfrac{i}{4}$. (b) $\dfrac{1}{z}$.

5. Dados $m, n \in \mathbb{Z}$ verifique que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{im\theta}e^{-in\theta}\,d\theta = \delta_{mn} = \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq n \\ 1 & \text{se } m = n. \end{cases}$$

Solução.

Para $m = n$ a integral é igual a 2π. Se $m \neq n$ então $m < n$ ou $m > n$. Suponha por exemplo que $m > n$, então $m = n + k$, para algum inteiro k e

$$\int_0^{2\pi} e^{im\theta}e^{-in\theta}\,d\theta = \int_0^{2\pi} e^{ik\theta}\,d\theta = 0.$$

6. Calcule as integrais

$$\text{(a)} \int_0^{\pi} e^x \cos x\,dx; \qquad \text{(b)} \int_0^{\pi} e^x \operatorname{sen} x\,dx,$$

calculando a integral $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{(1+i)x}\,dx$.

Solução.

(a) $-\dfrac{1+e^{\pi}}{2}$; (b) $\dfrac{1+e^{\pi}}{2}$.

7. Calcule $\displaystyle\int_C f(z)\,dz$, onde:

(a) $f(z) = \dfrac{z+2}{z}$; C é o semi-círculo de centro 0 e raio 2 no semi-plano superior.

Solução.

$-4 + 2\pi i$.

(b) $f(z) = \dfrac{z+2}{z}$; C é o círculo de centro 0 e raio 2.

Solução.
$4\pi i$.
(c) $f(z) = \pi e^{\pi \bar{z}}$; C é o contorno do quadrado de vértices 0, 1, $1+i$ e i orientado no sentido anti-horário.
Solução.
$4(e^{\pi} - 1)$.
(d) $f(z) = z^{-1+i} = e^{(-1+i)\ln z}$, $(|z| > 0,\ 0 < \arg z < 2\pi)$; C é o círculo unitário orientado positivamente.
Solução.
$i(1 - e^{-2\pi})$.

8. Verifique que se f é uma função contínua definida num domínio contendo os círculos C e C_0 de raio $R > 0$ e centros 0 e z_0, respectivamente, então:

$$\int_C f(z)\,dz = \int_{C_0} f(z - z_0)\,dz\,.$$

Solução.
Escreva as parametrizações das curvas. Desenvolva a integral do lado direito da igualdade segundo a definição.

9. Verifique que $\oint_C \dfrac{dz}{z} = 4\pi i$, sendo $C : r = 2 - \operatorname{sen}^2 \dfrac{\theta}{4}$, $-\pi \le \theta \le 3\pi$.

Solução.
Sejam C_1 e C_2 as curvas obtidas da curva C com $-\pi \le \theta \le \pi$ e $\pi \le \theta \le 3\pi$, respectivamente. Tem-se que $C = C_1 \cup C_2$ e $\oint_{C_j} \dfrac{dz}{z} = 2\pi i$, $j = 1, 2$.

10. Seja C_0 o círculo de centro z_0 e raio R orientado no sentido anti-horário. Verifique que:

(a) $\displaystyle\int_{C_0} \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i$; (b) $\displaystyle\int_{C_0} (z - z_0)^{n-1} dz = 0$, $(n = \pm 1, \pm 2, \dots)$.

Solução.
Escreva as parametrizações das curvas. Desenvolva as integrais segundo a definição.

11. Seja C o segmento de i a 1. Sem calcular a integral, verifique que:

$$\left|\int_C \frac{dz}{z^4}\right| \leq 4\sqrt{2}.$$

(Indicação: o ponto médio do segmento é o ponto do segmento que está mais próximo da origem).

Solução.

Se z é um ponto do segmento, então $|z^4| \geq \left|\frac{1+i}{2}\right|^4 = \frac{1}{4}$. A integral é, portanto, menor ou igual a $\frac{1}{4}$ vezes o comprimento do segmento.

12. Seja C o círculo de centro na origem e raio $R > 1$ orientado positivamente. Sem calcular a integral, verifique que:

$$\left|\int_C \frac{\operatorname{Log} z}{z^2} dz\right| < \frac{2\pi}{R}(\pi + \ln R).$$

Conclúa que o valor da integral tende a zero quando $R \to \infty$.

Nota: $\operatorname{Log} z = \ln z + i\theta$, $-\pi < \theta < \pi$ é o ramo principal do Logaritmo complexo.

Solução.

Usando a desigualdade triangular, para $z \in C$, vale $\left|\frac{\operatorname{Log} z}{z^2}\right| \leq \frac{\pi + \ln R}{R^2}$.

Use L'Hospital para verificar que $\lim\limits_{R\to\infty} \frac{\ln R}{R} = 0$ e o critério de comparação para concluir.

13. Usando primitivas, calcule as integrais ao longo de qualquer caminho que ligue os limites de integração.

(a) $\displaystyle\int_i^{i/2} e^{\pi z}\, dz$; (b) $\displaystyle\int_0^{\pi+2i} \cos\frac{z}{2}\, dz$; (c) $\displaystyle\int_1^3 (z-2)^3\, dz$.

Solução.

(a) $\frac{1+i}{\pi}$; (b) $e + \frac{1}{e}$; (c) 0.

14. Verifique que:

$$\int_{-1}^{1} z^i\, dz = \frac{1+3^{-\pi}}{2}(1-i),$$

onde $z^i = e^{i\operatorname{Log} z}$, com $|z| > 0$, $-\pi < \operatorname{Arg} z < \pi$, é o ramo principal, e onde o caminho de integração é qualquer curva ligando $z = -1$ com $z = 1$ que, com exceção dos pontos extremos, não intersecta o eixo real.

Indicação: Use uma primitiva do ramo $z^i = e^{i\ln z}$, $|z| > 0$, $-\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{3\pi}{2}$.

Solução.
Seja C um caminho de -1 a 1 contido no semi-plano superior e tendo apenas suas extremidades no eixo real. O ramo principal de z^i não está definido em $z = -1$, logo a sua primitiva não está definida em $z = -1$ e não pode ser usada para calcular a integral. Por essa razão o integrando se substitui pelo ramo $z^i = e^{i \ln z}$, onde $|z| > 0$ e $-\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{3\pi}{2}$, que coincide com o integrando ao longo do caminho C. Usando a primitiva desse ramo,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} z^i \, dz &= \left[\frac{z^{i+1}}{i+i} \right]_{-1}^{1} = \frac{1}{i+1} \left[e^{(i+1)(\ln 1 + i0)} - e^{(i+1)(\ln 1 + i\pi)} \right] \\ &= \cdots = \frac{1 + e^{-\pi}}{2} (1 - i). \end{aligned}$$

15. Aplique o teorema de Cauchy-Goursat para calcular $\int_C f(z)\, dz$ onde C é o círculo unitário e:

(a) $f(z) = \dfrac{z^2}{z-3}$; (b) $f(z) = \dfrac{1}{z^2 + 2z + 2}$;
(c) $f(z) = \tan z$; (d) $f(z) = \operatorname{Log}(z+2)$.

Solução.
As funções dadas são analíticas em C e no interior de C (explique!) e, pelo teorema de Cauchy-Goursat, as integrais são todas iguais a zero.

16. O objetivo deste exercício é usar a integração complexa para verificar o calculo da integral imprópria real:

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos(2bx)\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-b^2}, \qquad (b > 0).$$

(a) Seja R o caminho retangular de vértices $-a$, a, $a+ib$ e $-a+ib$, com $a, b > 0$, orientado positivamente. Verifique que a soma das integrais de e^{-z^2} ao longo dos lados horizontais do retângulo R é igual a

$$2 \int_0^a e^{-x^2}\, dx - 2e^{b^2} \int_0^a e^{-x^2} \cos(2bx)\, dx\,,$$

e que a soma das integrais ao longo dos lados verticais do retângulo é igual a

$$ie^{-a^2}\int_0^b e^{y^2}e^{-i2ay}dy - ie^{-a^2}\int_0^b e^{y^2}e^{i2ay}dy.$$

Use o teorema de Cauchy-Goursat para concluir que:

$$\int_0^a e^{-x^2}\cos 2bx\,dx = e^{-b^2}\int_0^a e^{-x^2}dx + e^{-(a^2+b^2)}\int_0^b e^{y^2}\operatorname{sen} 2ay\,dy.$$

(b) Usando a integral conhecida (como é que se calcula essa integral?)

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

e a desigualdade (justifique!)

$$\left|\int_0^b e^{y^2}\operatorname{sen} 2ay\,dy\right| \le \int_0^b e^{y^2}\,dy\,,$$

obtenha, passando ao limite quando $a \to \infty$ na última equação de (a), a identidade proposta.

Solução.

(a) Integra-se e^{-z^2} ao longo do retângulo do enunciado. O lado inferior se parametriza por $z = x$, $-a \le x \le a$. Calculando, temos

$$\int_{-a}^a e^{-z^2}\,dz = 2\int_0^a e^{-x^2}\,dx.$$

o lado superior é parametrizado por $z = -x + ib$, $-a \le x \le a$. Calculando, temos

$$\begin{aligned}\int_{a+ib}^{-a+ib} e^{-z^2}\,dz &= -e^{b^2}\int_{-a}^a e^{-x^2}(\cos 2bx - i\operatorname{sen} 2bx)\,dx\\ &= -2e^{b^2}\int_0^a e^{-x^2}\cos 2bx\,dx.\end{aligned}$$

As outras integrais se calculam da mesma forma e, após aplicar o teorema de Cauchy-Goursat (a integral de e^{z^2} ao longo do retângulo é igual a zero) obtem-se a integral desejada.

$$\int_0^a e^{-x^2}\cos 2bx\,dx = e^{-b^2}\int_0^a e^{-x^2}dx + e^{-(a^2+b^2)}\int_0^b e^{y^2}\operatorname{sen} 2ay\,dy.$$

(b) Como $\lim\limits_{a\to\infty}\int_0^a e^{-x^2}dx = \int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, $\lim\limits_{a\to\infty} e^{-(a^2+b^2)} = 0$, e $\int_0^b e^{y^2}\,dy$ é limitada, obtemos a fórmula desejada.

17. Seja C o bordo do semi-disco superior unitário orientado positivamente e seja $f(z)$ uma função contínua definida nesse semi-disco tomando $f(0) = 0$ e usando o ramo da raiz quadrada com argumento entre $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2}$:

$$f(z) = \sqrt{r}\, e^{i\theta/2}, \text{ para } r > 0 \text{ e } -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}.$$

Verifique que $\int_C f(z)\, dz = 0$ calculando separadamente a integral sobre o semi-círculo unitário superior e sobre os dois raios do eixo real que completam o bordo do semi-disco. Porque o teorema de Cauchy-Goursat não se aplica neste caso?

Solução.

Sejam A o segmento de 0 a 1, B o segmento de -1 a 0 contidos no eixo real e C_0 o semi-círculo superior unitário. É claro que $C = C_0 \cup A \cup B$. A função f definida no enunciado é contínua, logo integrável ao longo de C. O teorema de Cauchy-Goursat não se aplica porque f não é analítica em $z = 0$ (de fato, note que sequer está definida no semi-eixo imaginário inferior).

Cálculos diretos parametrizando A, B e C_0 dão:

$$\begin{aligned} \int_C f(z)\, dz &= \int_A f(z)\, dz + \int_B f(z)\, dz + \int_{C_0} f(z)\, dz \\ &= \frac{2}{3} + \frac{2}{3}i - \frac{2}{3}(1+i) = 0. \end{aligned}$$

18. Seja R a região no plano complexo delimitada por uma curva simples fechada C. Verifique que

$$\text{Área } R = \frac{1}{2i}\int_C \overline{z}\, dz.$$

Solução.

Usando o teorema de Green, tem-se:

$$\int_C \overline{z}\, dz = \left(\int_C x\, dx + y\, dy\right) + i\left(\int_C x\, dy - y\, dx\right) = 2i \iint_R dA.$$