Lista 2 - Métodos Matemáticos II

Prof. Jorge Delgado

1. Verifique que qualquer ramo de $\ln z$ é analítica e sua derivada é $\frac{1}{z}$.

2. Verifique que duas funções $v_1(x, y)$ e $v_2(x, y)$ que são harmônicas conjugadas de uma mesma função harmônica $u(x, y)$ diferem por uma constante aditiva.

3. Seja $f : E \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica definida num aberto conexo E. Verifique que se f toma somente valores reais então f é constante.

4. Calcule:

(a) $\displaystyle\int_0^{\pi/6} e^{2it}\, dt$; (b) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-zt}\, dt$, com $\operatorname{Re} z > 0$.

5. Dados $m, n \in \mathbb{Z}$ verifique que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{im\theta} e^{-in\theta}\, d\theta = \delta_{mn} = \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq n \\ 1 & \text{se } m = n. \end{cases}$$

6. Calcule as integrais

(a) $\displaystyle\int_0^{\pi} e^x \cos x\, dx$; (b) $\displaystyle\int_0^{\pi} e^x \operatorname{sen} x\, dx$,

calculando a integral $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{(1+i)x}\, dx$.

7. Calcule $\displaystyle\int_C f(z)\, dz$, onde:

(a) $f(z) = \dfrac{z+2}{z}$; C é o semi-círculo de centro 0 e raio 2 no semi-plano superior.

(b) $f(z) = \dfrac{z+2}{z}$; C é o círculo de centro 0 e raio 2.

(c) $f(z) = \pi e^{\pi \overline{z}}$; C é o contorno do quadrado de vértices 0, 1, $1+i$ e i orientado no sentido anti-horário.

(d) $f(z) = z^{-1+i} = e^{(-1+i)\ln z}$, $(|z| > 0,\ 0 < \arg z < 2\pi)$; C é o círculo unitário orientado positivamente.

8. Verifique que se f é uma função contínua definida num domínio contendo os círculos C e C_0 de raio $R > 0$ e centros 0 e z_0, respectivamente, então:

$$\int_C f(z)\,dz = \int_{C_0} f(z - z_0)\,dz\,.$$

9. Verifique que $\displaystyle\oint_C \frac{dz}{z} = 4\pi i$, sendo $C : r = 2 - \text{sen}^2\,\dfrac{\theta}{4}$, $-\pi \le \theta \le 3\pi$.

10. Seja C_0 o círculo de centro z_0 e raio R orientado no sentido anti-horário. Verifique que:

(a) $\displaystyle\int_{C_0} \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i$; (b) $\displaystyle\int_{C_0} (z - z_0)^{n-1} dz = 0$, $(n = \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

11. Seja C o segmento de i a 1. Sem calcular a integral, verifique que:

$$\left|\int_C \frac{dz}{z^4}\right| \le 4\sqrt{2}.$$

(Indicação: o ponto médio do segmento é o ponto do segmento que está mais próximo da origem).

12. Seja C o círculo de centro na origem e raio $R > 1$ orientado positivamente. Sem calcular a integral, verifique que

$$\left|\int_C \frac{\operatorname{Log} z}{z^2} dz\right| < \frac{2\pi}{R}(\pi + \ln R).$$

Conclúa que o valor da integral tende a zero quando $R \to \infty$.

Nota: $\operatorname{Log} z = \ln z + i\theta$, $-\pi < \theta < \pi$ é o ramo principal do Logaritmo complexo.

13. Usando primitivas, calcule as integrais ao longo de qualquer caminho que ligue os limites de integração.

(a) $\displaystyle\int_i^{i/2} e^{\pi z}\,dz$; (b) $\displaystyle\int_0^{\pi+2i} \cos\frac{z}{2}\,dz$; (c) $\displaystyle\int_1^3 (z-2)^3\,dz$.

14. Verifique que:

$$\int_{-1}^{1} z^i\, dz = \frac{1+3^{-\pi}}{2}(1-i),$$

onde $z^i = e^{i\,\mathrm{Log}\,z}$, com $|z| > 0$, $-\pi < \mathrm{Arg}\,z < \pi$, é o ramo principal, e onde o caminho de integração é qualquer curva ligando $z = -1$ com $z = 1$ que, com exceção dos pontos extremos, não intersecta o eixo real.

Indicação: Use uma primitiva do ramo $z^i = e^{i\ln z}$, $|z| > 0$, $-\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{3\pi}{2}$.

15. Aplique o teorema de Cauchy-Goursat para calcular $\int_C f(z)\, dz$ onde C é o círculo unitário e:

(a) $f(z) = \dfrac{z^2}{z-3}$; (b) $f(z) = \dfrac{1}{z^2+2z+2}$;

(c) $f(z) = \tan z$; (d) $f(z) = \mathrm{Log}(z+2)$.

16. O objetivo deste exercício é usar a integração complexa para verificar o calculo da integral imprópria real:

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}\cos(2bx)\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-b^2}, \qquad (b > 0).$$

(a) Seja R o caminho retangular de vértices $-a$, a, $a+ib$ e $-a+ib$, com $a, b > 0$, orientado positivamente. Verifique que a soma das integrais de e^{-z^2} ao longo dos lados horizontais do retângulo R é igual a

$$2\int_0^a e^{-x^2}\, dx - 2e^{b^2}\int_0^a e^{-x^2}\cos(2bx)\, dx\,,$$

e que a soma das integrais ao longo dos lados verticais do retângulo é igual a

$$ie^{-a^2}\int_0^b e^{y^2}e^{-i2ay}dy - ie^{-a^2}\int_0^b e^{y^2}e^{i2ay}dy.$$

Use o teorema de Cauchy-Goursat para concluir que:

$$\int_0^a e^{-x^2}\cos 2bx\, dx = e^{-b^2}\int_0^a e^{-x^2}dx + e^{-(a^2+b^2)}\int_0^b e^{y^2}\,\mathrm{sen}\, 2ay\, dy.$$

(b) Usando a integral conhecida (como é que se calcula essa integral?)

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

e a desigualdade (justifique!)

$$\left|\int_0^b e^{y^2}\operatorname{sen} 2ay\, dy\right| \le \int_0^b e^{y^2}\, dy\,,$$

obtenha, passando ao limite quando $a \to \infty$ na última equação de (a), a identidade proposta.

17. Seja C o bordo do semi-disco superior unitário orientado positivamente e seja $f(z)$ uma função contínua definida nesse semi-disco tomando $f(0) = 0$ e usando o ramo da raiz quadrada com argumento entre $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2}$:

$$f(z) = \sqrt{r}\, e^{i\theta/2}, \text{ para } r > 0 \text{ e } -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}.$$

Verifique que $\int_C f(z)\, dz = 0$ calculando separadamente a integral sobre o semi-círculo unitário superior e sobre os dois raios do eixo real que completam o bordo do semi-disco. Porque o teorema de Cauchy-Goursat não se aplica neste caso?

18. Seja R a região no plano complexo delimitada por uma curva simples fechada C. Verifique que

$$\text{Área } R = \frac{1}{2i}\int_C \overline{z}\, dz.$$