Lista 3 - Métodos Matemáticos II

Prof. Jorge Delgado

1. Seja C a curva poligonal de vértices $2(1+i)$, $2(-1+i)$, $-2(1+i)$ e $2(1-i)$ orientada positivamente. Use a fórmula integral de Cauchy para verificar que:

(a) $\displaystyle\oint_C \frac{e^{-z}\,dz}{z - i\pi/2} = 2\pi$; (b) $\displaystyle\oint_C \frac{\cos z}{z(z^2+8)}\,dz = \frac{\pi i}{4}$;

(c) $\displaystyle\oint_C \frac{\cosh z}{z^4}\,dz = 0$; (d) $\displaystyle\oint_C \frac{\tan(z/2)}{(z-x_0)^2}\,dz = i\pi \sec^2 \frac{x_0}{2}$, $x_0 \in (-2, 2)$.

2. Se C é o círculo de centro i e raio 2 orientado positivamente, verifique que:

(a) $\displaystyle\oint_C \frac{dz}{z^2+4} = \frac{\pi}{2}$; (b) $\displaystyle\oint_C \frac{dz}{(z^2+4)^2} = \frac{\pi}{16}$.

3. Seja C o círculo de centro 0 e raio 3 orientado positivamente e seja $g : \mathbb{C} - C \longrightarrow \mathbb{C}$ a função $g(w) = \displaystyle\oint_C \frac{2z^2 - z - 2}{z - w}\,dz$.

Verifique que $g(2) = 8\pi i$ e que $g(w) = 0$ para w no exterior de C.

4. Seja C uma curva fechada simples orientada positivamente e seja a função $g : \mathbb{C} - C \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por $g(w) = \displaystyle\oint_C \frac{z^3 + 2z}{(z-w)^3}\,dz$.

Verifique que $g(w) = 6\pi i w$ para todo w no interior de C e $g(w) = 0$ para todo w no exterior de C.

5. Verifique que se f é uma função analítica sobre uma curva fechada simples C e $z_0 \notin C$, então

$$\oint_C \frac{f'(z)\,dz}{z - z_0} = \oint_C \frac{f(z)\,dz}{(z - z_0)^2}.$$

Indicação: suponha primeiro que z_0 está no interior de C. Use a fórmula integral de Cauchy para $g(z) = f'(z)$ na primeira integral e a fórmula integral de Cauchy para a derivada na segunda integral. Para z_0 no exterior de C use o teorema de Cauchy-Goursat para verificar que ambas integrais são iguais a zero.

6. Seja $C : z = e^{i\theta}$, $-\pi \leq \theta \leq \pi$, o círculo unitário. Verifique que para qualquer $a \in \mathbb{R}$:

$$\oint_C \frac{e^{az}}{z}\,dz = 2\pi i.$$

Depois, escrevendo a integral em termos de θ, obtenha a fórmula de integração:

$$\int_0^{\pi} e^{a\cos\theta} \cos(a\,\mathrm{sen}\,\theta)\,d\theta = \pi.$$

7. Seja C o círculo unitário. Verifique que

(a) $\displaystyle\oint_C \frac{a\,\mathrm{sen}\,z + b\cos^2 z}{z}\,dz = 2\pi i b$; (b) $\displaystyle\oint_C \frac{e^z \cos z}{z}\,dz = 2\pi i$.

8. Seja C o círculo de centro 0 e raio 2. Seja $P(z) = a + bz + cz^2$, onde $a, b, c \in \mathbb{C}$. Verifique que, se $\displaystyle\oint_C \frac{P(z)}{z}\,dz = 2\pi i$, $\displaystyle\oint_C \frac{P(z)}{z-1}\,dz = 2\pi i$ e $\displaystyle\oint_C \frac{P(z)}{z+1}\,dz = 2\pi i$, então $P(z)$ é constante de valor 1.

Indicação: leia as integrais através da fórmula integral de Cauchy, avaliando $P(z)$ em $z = 0$, $z = 1$ e $z = -1$, respectivamente. Obter-se-a um sistema de 3 equações lineares nas indeterminadas a, b e c, cuja solução é $a = 1$, $b = c = 0$.

9. Verifique que, para todo $z \in \mathbb{C}$, $\cosh z = \cos(iz)$ e $\mathrm{senh}\,z = -i\,\mathrm{sen}(iz)$.

Usando as séries de Maclaurin de sen e cos, verifique que:

(a) $\displaystyle\cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$; (b) $\displaystyle\mathrm{senh}\,z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

10. Verifique que a série de Taylor de $\cosh(z)$ em torno de $z_0 = -2\pi i$ é $\cosh(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+2\pi i)^{2n}}{(2n)!}$.

11. Verifique que a série de Taylor de $f(z) = e^z$ em torno de $z_0 = 1$ é:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e}{n!}(z-1)^n.$$

12. Verifique que a função $f(z) = \frac{z}{z^4+9} = \frac{z}{9} \cdot \frac{1}{1+\frac{z^4}{9}}$ tem a sua série de Maclaurin dada por $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{2n+2}} z^{4n+1}$, para $|z| < \sqrt{3}$.

13. Verifique que a série de Taylor da função $f(z) = \frac{1}{1-z}$ em torno de $z_0 = i$ é, para $|z-i| < \sqrt{2}$, dada por $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{(1-i)^{n+1}}$.

Indicação: $\frac{1}{1-z} = \frac{1}{(1-i)-(z-i)} = \frac{1}{1-i} \frac{1}{1-\frac{z-i}{1-i}}$. Note que $\left|\frac{z-i}{1-i}\right| < 1 \iff |z-i| < |1-i| = \sqrt{2}$.

14. Use a definição de senh para verificar que $\operatorname{senh}(z+\pi i) = -\operatorname{senh} z$. Obtém-se daí que senh é periódica de período $2\pi i$. Usando isso, verifique que a série de Taylor de $\operatorname{senh} z$ em torno de $z_0 = \pi i$ é: $\operatorname{senh} z = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-\pi i)^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

15. Verifique que:

(a) $\frac{\operatorname{sen} z^2}{z^4} = \frac{1}{z^2} - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^6}{5!} - \frac{z^{10}}{7!} + \cdots$, para $z \neq 0$;

(b) $z^3 \cosh \frac{1}{z} = \frac{z}{2} + z3 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+2)!} \frac{1}{z^{2n-1}}$, para $z \neq 0$;

(c) $\frac{1}{4z-z^2} = \frac{1}{4z} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{4^{n+2}}$, para $0 < |z| < 4$.

16. Verifique que a série de Laurent de $f(z) = z^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{z^2}$ em $0 < |z| < \infty$ é $f(z) = 1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{1}{z^{4n}}$.

17. Verifique que a série de Laurent da função $f(z) = \dfrac{e^z}{(z+1)^2}$ no domínio $0 < |z+1| < \infty$ é $f(z) = \dfrac{1}{e}\left[\dfrac{1}{(z+1)^2} + \dfrac{1}{z+1} + \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{(n+2)!}\right]$.

18. Verifique que a função $f(z) = \dfrac{1}{z^2(1-z)}$ se representa em série de Laurent como:

(a) $\dfrac{1}{z^2} + \dfrac{1}{z} + \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n$, para $0 < |z| < 1$;

(b) $-\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{z^n}$, para $1 < |z| < \infty$.

19. Represente a função $f(z) = \dfrac{z+1}{z-1}$

(a) pela sua série de Maclaurin, especificando o domínio onde a representação é válida.

Solução.

$f(z) = -1 - 2\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z^n$, válida para $|z| < 1$;

(b) pela sua série de Laurent no domínio $1 < |z| < \infty$.

Solução.

$f(z) = 1 + 2\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}$.

20. (a) Seja $a \in \mathbb{R}$, $-1 < a < 1$. Obtenha a representação em série de Laurent $\dfrac{a}{z-a} = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{z^n}$ no domínio $|a| < |z| < \infty$.

(b) Escrevendo $z = e^{i\theta}$ na igualdade do item (a) e separando as partes real e imaginária, obtenha as seguintes fórmulas:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos n\theta = \frac{a\cos\theta - a^2}{1 - 2a\cos\theta + a^2} \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a^n \operatorname{sen} n\theta = \frac{a \operatorname{sen}\theta}{1 - 2a\cos\theta + a^2}.$$

21. (a) Seja $f(z)$ uma função analítica no anel $E : 0 \le r_1 < |z| < r_2 \le \infty$ e seja $C : z = e^{i\theta}$, $0 \le \theta \le 2\pi$ uma representação do círculo unitário. Integrando ao longo de C nas expresões dos coeficientes da série de Laurent de $f(z)$ verifique que, para $z \in E$:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\,d\theta + \frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\left[\left(\frac{z}{e^{i\theta}}\right)^n + \left(\frac{e^{i\theta}}{z}\right)^n\right]d\theta.$$

(b) Escrevendo $u(\theta) = \operatorname{Re}[f(e^{i\theta})]$, obtenha, do item acima, a fórmula:

$$u(\Theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\theta)\,d\theta + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{2\pi} u(\theta)\cos[n(\Theta - \theta)]d\theta.$$

NOTA SOBRE FUNÇÕES RACIONAIS

Uma *função racional* é uma função da forma

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_m z^m}{b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots + b_n z^n}.$$

onde $P(z)$ e $Q(z)$ são polinômios na variável z e $Q(z)$ não é identicamente nulo.

O domínio D da função racional $f(z)$ é o complementar das raízes do denominador, isto é, D é o complementar de um número finito de pontos no plano complexo: $D = \mathbb{C} - \{z \in \mathbb{C} \mid Q(z) = 0\}$.

Dizemos que a função racional $f(z)$ é *própria* quando o grau do numerador é menor que o grau do denominador: $m = \text{Grau}(P(z)) < n = \text{Grau}(Q(z))$, caso contrário a função é chamada *imprópria*.

Se $f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ é uma função racional imprópria, podemos dividir $P(z)$ por $Q(z)$ para obter um quociente $g(z)$ e um possível resto $R(z)$ com $0 \le \text{Grau}(R(z)) < \text{Grau}(Q(z))$, isto é:

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{g(z)\cdot Q(z) + R(z)}{Q(z)} = g(z) + \frac{R(z)}{Q(z)},$$

onde $\dfrac{R(z)}{Q(z)}$ é uma função racional própria.

Por exemplo, $f(z) = \dfrac{z^5 - 2z + 1}{z^2 + z + 1}$ é uma função racional imprópria, pois a divisão de $z^5 - 2z + 1$ por $z^2 + z + 1$ dá quociente $z^3 - z^2$ e resto 1 e assim:

$$f(z) = \frac{z^5 - 2z + 1}{z^2 + z + 1} = (z^3 - z^2) + \frac{1}{z^2 + z + 1},$$

onde $\dfrac{1}{z^2 + z + 1}$ é uma função racional própria.

Sabemos que todo polinômio $Q(z)$ com coeficientes complexos se fatora na forma:

$$Q(z) = K(z - r_1)^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot (z - r_p)^{\alpha_p},$$

com $\mathrm{Grau}(Q(z)) = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_p$, K é uma constante real, $r_1, r_2, \ldots, r_p$ são as diferentes raízes complexas de $Q(x)$ com multiplicidades α_1, α_2, $\ldots$, α_q.

O resultado fundamental que lhe será útil ao resolver problemas envolvendo funções racionais é o seguinte:

Suponha que $Q(z) = (z-r_1)^{\alpha_1} \cdot (z-r_2)^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot (z-r_p)^{\alpha_p}$ *e que* $f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ *é uma função racional própria, isto é,* $\mathrm{Grau}(P(z)) < \mathrm{Grau}(Q(z))$. *Então* $f(z)$ *se decompõe em soma de frações parciais da seguinte maneira:*

$$\begin{aligned} f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} &= \frac{A_{01}}{(z-r_1)^{\alpha_1}} + \frac{A_{11}}{(z-r_1)^{\alpha_1-1}} + \frac{A_{21}}{(z-r_1)^{\alpha_1-2}} + \ldots + \frac{A_{(\alpha_1-1)1}}{(z-r_1)} \\ &+ \frac{A_{02}}{(z-r_2)^{\alpha_2}} + \frac{A_{12}}{(z-r_2)^{\alpha_2-1}} + \frac{A_{22}}{(z-r_2)^{\alpha_2-2}} + \ldots + \frac{A_{(\alpha_2-1)2}}{(z-r_2)} \\ &+ \ldots + \frac{A_{0p}}{(z-r_p)^{\alpha_p}} + \frac{A_{1p}}{(z-r_p)^{\alpha_p-1}} + \frac{A_{2p}}{(z-r_p)^{\alpha_p-2}} + \ldots + \frac{A_{(\alpha_p-1)p}}{(z-r_p)}, \end{aligned}$$

onde $A_{ij} \in \mathbb{C}$ *são constantes por determinar.*