Lista 4 - Métodos Matemáticos II

Prof. Jorge Delgado

1. Calcule $\operatorname{Res} f(0)$ da função $f(z)$ dada.

(a) $\dfrac{1}{z+z^2}$; (b) $z\cos\dfrac{1}{z}$; (c) $\dfrac{\cot z}{z^4}$; (d) $\dfrac{\operatorname{senh} z}{z^4(1-z^2)}$.

Solução. (a) 1; (b) $-\dfrac{1}{2}$; (c) $-\dfrac{1}{45}$; (d) $\dfrac{7}{6}$.

2. Usando o teorema do resíduo verifique que

(a) $\displaystyle\oint_C \frac{e^{-z}}{z^2}\,dz = -2\pi i$; (b) $\displaystyle\oint_C z^2 e^{1/z} dz = \frac{\pi i}{3}$; (c) $\displaystyle\oint_C \frac{z-1}{z^2-2z} = 2\pi i$,

onde C é o círculo de centro 0 e raio 2.

Teorema 1
Seja C uma curva fechada simples e seja f uma função analítica em C e no seu interior exceto num número finito de pontos singulares no interior de C. Então

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=0}\left[\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right)\right].$$

3. Usando o teorema 1 calculando um único resíduo, calcule a integral das funções dadas ao longo do círculo $C : |z| = 2$:

(a) $\displaystyle\oint_C \frac{z^5}{1-z^3}\,dz = -2\pi i$; (b) $\displaystyle\oint_C \frac{1}{1+z^2} dz = 0$; (c) $\displaystyle\oint_C \frac{1}{z} = 2\pi i$.

4. (a) Usando a série de Maclaurin de e^z e assumindo que é possível integrar a série termo a termo, isto é, a integral da série é a série das integrais dos seus termos, verifique que:

$$\oint_C e^{z+\frac{1}{z}} dz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \oint_C z^n e^{\frac{1}{z}} dz.$$

(b) Use o teorema do resíduo para calcular as integrais da série do item anterior e obter a fórmula:

$$\oint_C e^{z+\frac{1}{z}} dz = 2\pi i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!\,(n+1)!}.$$

5. Sabemos que se f possui uma singularidade isolada em z_0, então $f(z)$ se representa por uma série de Laurent em um disco perfurado $0 < |z - z_0| < R$, para algum $R > 0$. A parte dessa série que contêm as potências negativas de $z - z_0$ é chamada a *parte principal* de f em z_0.

Determine a parte principal da função $f(z)$ na sua singularidade isolada z_0, diga se se trata de uma singularidade removível, de um polo (dê a ordem) ou uma singularidade escencial e dê $\operatorname{Res} f(z_0)$.

(a) $f(z) = ze^{1/z}$; (b) $f(z) = \dfrac{z}{1+z}$;

(c) $f(z) = \dfrac{\operatorname{sen} z}{z}$; (d) $f(z) = \dfrac{\cos z}{z^5}$.

Solução. (a) Sing. escencial $z_0 = 0$, parte principal $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} \frac{1}{z^n}$; $\operatorname{Res} f(0) = \frac{1}{2}$. (b) Polo simples em $z = -1$, parte principal $\dfrac{1}{z+1}$; $\operatorname{Res} f(-1) = 1$. (c) Sing. removível em $z = 0$, parte principal 0; $\operatorname{Res} f(0) = 0$. (d) Polo de ordem 5 em $z = 0$, parte principal $\frac{1}{z^5} - \frac{1}{2!z^3} + \frac{1}{4!z}$; $\operatorname{Res} f(0) = \frac{1}{4!}$.

6. Verifique que a singularidade da função $f(z)$ dada é um polo, determine a ordem e o resíduo correspondente.

(a) $f(z) = \dfrac{1-\cosh z}{z^3}$; (b) $f(z) = \dfrac{1-e^{2z}}{z^4}$; (c) $f(z) = \dfrac{e^{2z}}{(z-1)^2}$.

Solução. (a) Ordem 1, resíduo $-\frac{1}{2}$; (b) Ordem 3, resíduo $-\frac{4}{3}$; (c) Ordem 2, resíduo $2e^2$.

7. Se $f(z)$ é analítica em z_0 e $g(z) = \dfrac{f(z)}{z - z_0}$. Verifique que

(a) se $f(z_0) \neq 0$, então z_0 é um polo simples de $g(z)$.

(b) se $f(z_0) = 0$, então z_0 é uma singularidade removível de $g(z)$.

Solução. Escreva a série Laurent de $g(z)$ em $0 < |z - z_0| < R$ usando a de Taylor de $f(z)$ em torno de z_0 definida num disco $|z - z_0| < R$.

8. Seja $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Determine a parte principal de $f(z) = \dfrac{8a^3z^2}{(z^2 + a^2)^3}$ em torno da singularidade $z_0 = ai$.

Solução. Escreva $f(z) = \frac{\phi(z)}{(z-ai)^3}$, onde $\phi(z) = \frac{8a^3z^2}{(z+ai)^3}$. Verifique que ϕ é analítica em $-ai$. A parte principal de $f(z)$ em ai é $-\frac{i/2}{z-ai} - \frac{a/2}{(z-ai)^2} - \frac{a^2 i}{(z-ai)^3}$.

9. Verifique que

(a) $\operatorname{Res}_{z=-\frac{1}{2}} \left(\dfrac{z}{2z+1}\right)^3 = -\dfrac{3}{16}$; (b) $\operatorname{Res}_{z=i\pi} \dfrac{e^z}{z^2 + \pi^2} = \pm\dfrac{i}{2\pi}$;

(c) $\operatorname{Res}_{z=-1} \dfrac{z^{1/4}}{z+1} = \dfrac{i+1}{2}$, $(|z| > 0,\ 0 < \arg z < 2\pi)$;

(d) $\operatorname{Res}_{z=i} \dfrac{\operatorname{Log} z}{(z^2+1)^2} = \dfrac{\pi + 2i}{8}$

10. Verifique que o valor da integral $\displaystyle\oint_C \frac{3z^3 + 2}{(z-1)(z^2+9)}\,dz$, ao longo do círculo

(a) $C : |z - 2| = 2$ é igual a πi;

(b) $C : |z| = 4$ é igual a $6\pi i$.

11. Verifique que o valor da integral $\displaystyle\oint_C \frac{dz}{z^3(z+4)}$ ao longo do círculo

(a) $C : |z| = 2$ é igual a $\dfrac{\pi i}{32}$;

(b) $C : |z + 2| = 3$ é igual a 0.

12. Verifique que $\displaystyle\oint_C \frac{\cosh \pi z}{z(z^2+1)}\,dz = 4\pi i$, onde $C : |z| = 2$.

13. Usando o Teorema 1, verifique os valores das integrais abaixo ao longo do círculo $C : |z| = 3$, calculando um único resíduo.

(a) $\displaystyle\oint_C \frac{(3z+2)^2}{z(z-1)(2z+5)}\,dz = 9\pi i$; (b) $\displaystyle\oint_C \frac{z^3 e^{1/z}}{1+z^3} = 2\pi i$.

Lembre do seguinte resultado.

Teorema 2

Se g e h são analíticas em z_0 e $g(z_0) \neq 0$, $h(z_0) = 0$ e $h'(z_0) \neq 0$, então z_0 é um polo simples de $F(z) = \dfrac{g(z)}{h(z)}$ e $\operatorname{Res} F(z_0) = \dfrac{g(z_0)}{h'(z_0)}$.

14. Use o Teorema 2 para verificar o valor das integrais:

(a) $\displaystyle\oint_{|z|=2} \tan z \, dz = -4\pi i$; (b) $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{dz}{\operatorname{senh} 2z} = -\pi i$.

15. Verifique que $\displaystyle\oint_C \frac{dz}{(z^2-1)^2+3} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$, onde C é o retângulo de vértices -2, 2, $2+i$ e $2-i$.

Indicação: verifique que os zeros do polinômio $q(z) = (z^2-1)^2+3$ são as raízes quadradas dos números $1 \pm \sqrt{3}i$. Logo, $\frac{1}{q(z)}$ é analítica em C e no seu interior exceto nos pontos $z_0 = \frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{2}}$ e $-\overline{z_0} = \frac{-\sqrt{3}+i}{\sqrt{2}}$, podendo então aplicar o Teorema 2 para calcular os resíduos.

16. Usando resíduos verifique as integrais reais impróprias abaixo.

(a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{\pi}{4}$; (b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2\,dx}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{\pi}{6}$;

(c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos ax}{(x^2+b^2)^2}\,dx = \frac{\pi}{4b^3}(1+ab)e^{-ab}$, onde $a > 0$ e $b > 0$;

(d) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{x \operatorname{sen} ax}{x^4+4}\,dx = \frac{\pi}{2}e^{-a}\operatorname{sen} a$, onde $a > 0$;

(e) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{x\,dx}{(x^2+1)(x^2+2x+2)} = -\frac{\pi}{5}$;

(f) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{\operatorname{sen} x\,dx}{x^2+4x+5} = -\frac{\pi}{e}\operatorname{sen} 2$.

17. Usando resíduos verifique as fórmulas de integração abaixo.

(a) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos\theta\,d\theta}{5+4\cos\theta} = -\frac{\pi}{3}$; (b) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 3\theta\,d\theta}{5-4\cos 2\theta} = \frac{3\pi}{8}$;

(c) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1+k\cos\theta} = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1+k\operatorname{sen}\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-k^2}}$, $(k^2 < 1)$;

(d) $\displaystyle\int_0^\pi \frac{d\theta}{(a+\cos\theta)^2} = \pi a(a^2-1)^{-3/2}, \quad (k^2<1);$

(e) $\displaystyle\int_0^\pi \operatorname{sen}^{2n}\theta\, d\theta = \pi\frac{(2n)!}{(2^n n)!}, \; n = 1,2,3,\cdots.$

18. Verifique que o valor principal de $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,dx}{(x^2+1)(x^2+2x+2)}$ é $-\dfrac{\pi}{5}$.

19. Verifique a fórmula

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\cos(2bx)\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-b^2}.$$

Indicação: assumindo que $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, calcule $\oint_C e^{-z^2}\,dz$, onde C é o retângulo de vértices $-a$, a, $a+ib$ e $-a+ib$. Passe ao limite quando $a\to\infty$ para concluir.

20. (a) Seja C_R o arco do círculo de centro zero e raio $R>0$ que liga R com $Re^{i\pi/4}$ e seja A_R o contorno do setor circular $0\le r\le R$, $0\le\theta\le\dfrac{\pi}{4}$ orientado positivamente. Integrando ao longo de A_R, verifique que:

$$\int_0^R \cos(x^2)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^R e^{-r^2}\,dr - \operatorname{Re}\int_{C_R} e^{iz^2}\,dz\,,$$
$$\int_0^R \operatorname{sen}(x^2)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^R e^{-r^2}\,dr - \operatorname{Im}\int_{C_R} e^{iz^2}\,dz\,,$$

(b) Verifique que $\displaystyle\left|\int_{C_R} e^{iz^2}\,dz\right| \le \frac{R}{2}\int_0^{\pi/2} e^{-R^2\operatorname{sen}\phi}\,d\phi$ e use-a para concluir que o valor principal da integral ao longo do arco C_R, no item acima, tende a zero quando R tende a ∞.

(c) Use (a), (b) e a fórmula $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ para concluir as fórmulas

$$\int_0^\infty \cos(x^2)\,dx = \int_0^\infty \operatorname{sen}(x^2)\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

21. Considerando o contorno da Figura 1, abaixo, para resolver os seguintes três itens.

(a) Verifique que, para $a\ge 0$ e $b\ge 0$,

$$\int_0 \frac{\cos(ax)-\cos(bx)}{x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}(b-a).$$

Use a identidade $1 - \cos(2x) = 2\,\text{sen}^2 x$ para concluir:

$$\int_0 \frac{\text{sen}^2 x}{x^2}\, dx = \frac{\pi}{2}.$$

(b) Verifique que, para $-1 < a < 3$ e $x^a = e^{a \ln x}$,

$$\int_0^\infty \frac{x^a}{(x^2+1)^2}\, dx = \frac{(1-a)\pi}{4\cos(a\pi/2)}.$$

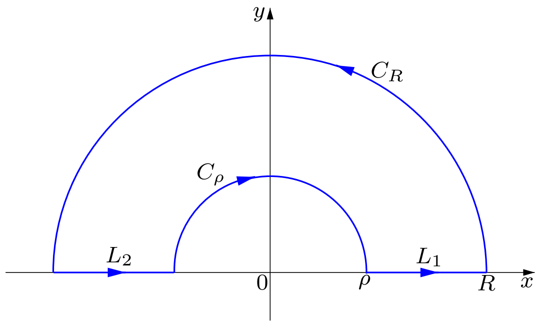

Figura 1:

(c) Usando a função $f(z) = \dfrac{z^{1/3}\log z}{z^2+1} = \dfrac{e^{(1/3)\log z}\log z}{z^2+1}$, definida para $|z| > 0$, $-\dfrac{\pi}{2} < \arg z < \dfrac{3\pi}{2}$, obtenha as fórmulas:

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt[3]{x}\ln x}{x^2+1}\, dx = \frac{\pi^2}{6}, \qquad \int_0^\infty \frac{\sqrt[3]{x}}{x^2+1}\, dx = \frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

22. Integrando um ramo apropriado de $f(z) = \dfrac{z^{-1/2}}{z^2+1} = \dfrac{e^{(-1/2)\log z}}{z^2+1}$ ao longo do caminho indicado na Figura 1, acima, verifique que:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(x^2+1)} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$