Lista 5 - Métodos Matemáticos II

Prof. Jorge Delgado

1. Verifique, usando a fórmula de Bromwich (fórmula complexa de inversão da transformada de Laplace), que a transformada de Laplace inversa da função $F(s)$ é a função $f(t)$.

(a) $F(s) = \dfrac{s}{s^2+a^2}$, $\quad f(t) = \cos at$;

(b) $F(s) = \dfrac{1}{s^2+a^2}$, $\quad f(t) = \dfrac{1}{a}\operatorname{sen} at$;

(c) $F(s) = \dfrac{1}{(s+1)(s^2+1)}$, $\quad f(t) = \dfrac{1}{2}(e^{-t} + \operatorname{sen} t - t\cos t)$;

(d) $F(s) = \dfrac{1}{(s+1)^2}$, $\quad f(t) = te^{-t}$;

(e) $F(s) = \dfrac{s}{(s+1)^3(s-1)^2}$, $\quad f(t) = \dfrac{1}{16}e^{-t}(1-2t^2) + \dfrac{1}{16}e^{t}(2t-1)$;

(f) $F(s) = \dfrac{1}{(s^2+1)^2}$, $\quad f(t) = \dfrac{1}{2}(\operatorname{sen} t - t\cos t)$;

(g) $F(s) = \dfrac{1}{(s+1)(s+2)^2}$, $\quad f(t) = e^{-2t}(e^t - t - 1)$;

(h) $F(s) = \dfrac{s+4}{2s^2+5s+3}$, $\quad f(t) = 3e^{-t} - \dfrac{5}{2}e^{-3t/2}$;

2. Usando resíduos verifique as seguintes identidades:

(a) $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{\operatorname{senh} s}\right](t) = 2\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \cos k\pi t$;

(b) $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{s}{\operatorname{senh} s}\right](t) = t + \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{k}\operatorname{sen} k\pi t$;

(c) $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{\operatorname{senh}(sx/c)}{s\operatorname{senh}(s\ell/c)}\right](t) = \dfrac{x}{\ell} + \dfrac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{k}\operatorname{senh}\dfrac{k\pi x}{\ell}\cosh\dfrac{k\pi ct}{\ell}$;

3. Usando a fórmula de Bromwich, determine a solução do problema de valores iniciais.

(a) $\begin{cases} x'' + 4x = 2 \\ x(0) = 0, \quad x'(0) = 0. \end{cases}$ *Solução.* $x(t) = \dfrac{1}{2}(1 - \cos 2t)$.

(b) $\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = 4e^{2t} \\ y(0) = -3, \quad y'(0) = 5. \end{cases}$ *Solução.* $y(t) = 4e^{2t}(t+1) - 7e^{t}$.

4. Desenhe os gráficos e determine a série de Fourier, nas formas trigonométrica e complexa, assim como os espectros de frequências complexas (amplitudes e fases) das funções:

(a) $f(t) = \begin{cases} A, & |t| \le 1 \\ 0, & 1 < |t| < 3, \end{cases}$ com $f(t+4) = f(t)\ \forall\, t \in \mathbb{R}$.

Solução. Na série de Fourier complexa: $c_n = \begin{cases} A, & n = 0 \\ \frac{2A((-1)^n - 1)}{n^2\pi^2}, & n \neq 0. \end{cases}$

(b) $f(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 0 < t < \pi \\ -\frac{1}{2}, & -\pi < t < 0, \end{cases}$ com $f(t+2\pi) = f(t)\ \forall\, t \in \mathbb{R}$.

Solução. Na série de Fourier complexa: $c_n = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ \frac{((-1)^n - 1)i}{n}, & n \neq 0. \end{cases}$

(c) $f(t) = A|t|,\ -|t| \le 2$, com $f(t+4) = f(t)\ \forall\, t \in \mathbb{R}$.
Solução. Na série de Fourier complexa: $c_n = \frac{A}{2} Sa \frac{n\pi}{2}$.

(d) $f(t) = \begin{cases} A\operatorname{sen} t, & 0 < t < \pi \\ 0, & -\pi \le t \le 0, \end{cases}$ com $f(t+2\pi) = f(t)\ \forall\, t \in \mathbb{R}$.

Solução. Na série de Fourier complexa: $c_n = \begin{cases} -\frac{Ai}{4}, & n = 1 \\ \frac{Ai}{4}, & n = -1 \\ \frac{A((-1)^n - 1)}{2\pi(1-n^2)}, & n \neq \pm 1. \end{cases}$

(e) $f(t) = A\operatorname{sen}\pi t$ para $0 \le t < 1$ e $f(t+1) = f(t)\ \forall\, t \in \mathbb{R}$.

Solução. Na série de Fourier complexa: $c_n = \dfrac{-2A}{\pi(4n^2-1)}$.

(f) $f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}t\,, & 0 \le t < \pi \\ 2 - \frac{1}{\pi}t\,, & \pi \le t < 2\pi \end{cases}$

Solução. Na série de Fourier complexa: $c_n = \begin{cases} -\frac{2}{n^2\pi^2}\,, & n \text{ ímpar} \\ 0\,, & n \text{ par.} \end{cases}$

5. Determine a série de Fourier complexa da função periódica $f(t)$ de período 2π dada por $f(t) = e^t$, para $t \in [0, 2\pi)$.

Solução. $f(t) = \dfrac{e^{2\pi}-1}{2\pi} \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1-in} e^{int}$.

6. Dê a forma trigonométrica da série de Fourier complexa do exercício anterior.

Solução. $f(t) = \dfrac{e^{2\pi}-1}{\pi}\left[\dfrac{1}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}(\cos nt - n \operatorname{sen} nt)\right]$.

7. Verifique que os coeficientes da série de Fourier complexa de uma função ímpar são imaginários puros e de uma função par são reais.

Solução. Verifique que, para $f(t)$ par, $c_n = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos n\omega_0 t\,dt$; e para $f(t)$ ímpar, $c_n = -i\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\operatorname{sen} n\omega_0 t\,dt$.

8. Sabendo que os coeficientes da série de Fourier complexa de uma onda periódica de período $T = \dfrac{1}{10}$ são $c_n = \dfrac{2}{1+in}$, escreva a forma trigonométrica da série de Fourier e descreva os espectros de frequências.
Solução. A série trigonométrica é

$$f(t) = 2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{1+n^2}\cos 20n\pi \frac{4n}{1+n^2}\operatorname{sen} 20n\pi t\right).$$

9. Use a identidade $e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i\operatorname{sen}(\omega t)$ para verificar que, se $f(t)$ é uma função

(a) par, então $\mathcal{F}[f(t)](\omega) = 2\displaystyle\int_0^{\infty} f(t)\cos\omega t\,dt$;

(b) ímpar, então $\mathcal{F}[f(t)](\omega) = -2i\int_0^\infty f(t)\,\text{sen}\,\omega t\,dt$.

10. Determine a transformada de Fourier das funções dadas abaixo.

(a) $p_a(t) = \begin{cases} 1\,, & |t| \le \frac{a}{2} \\ 0\,, & |t| > \frac{a}{2}\,, \end{cases}$ $(a > 0)$. *Solução.* $\mathcal{F}[p_a(t)](\omega) = \dfrac{2\,\text{sen}\,\frac{\omega a}{2}}{\omega}$.

(b) $f(t) = \begin{cases} e^{-at}\,, & t \ge 0 \\ 0\,, & t < 0, \end{cases}$ $(a > 0)$. *Solução.* $\mathcal{F}[p_a(t)](\omega) = \dfrac{1}{a + i\omega}$.

(c) $f(t) = e^{-a|t|}$. *Solução.* $\mathcal{F}[e^{-a|t|}](\omega) = \dfrac{2a}{a^2+\omega^2}$.

(d) $f(t) = \dfrac{1}{a^2+t^2}$. *Solução.* $\mathcal{F}[f(t)](\omega) = \dfrac{\pi}{a}\,e^{-a|\omega|}$.

(e) $f(t) = \dfrac{\text{sen}\,at}{\pi t}$. *Solução.* $\mathcal{F}[f(t)](\omega) = p_{2a}(\omega)$, (ver item (a)).

(f) $f(t) = \dfrac{\cos bt}{a^2+t^2}$. *Solução.* $\mathcal{F}[f(t)](\omega) = \dfrac{\pi}{2a}\left[e^{-a|\omega-b|} + e^{-a|\omega+b|}\right]$.

Nos itens a seguir, seja $U(t) = \begin{cases} 1\,, & t \le 0 \\ 0\,, & t > 0. \end{cases}$

(g) $f(t) = e^{at}U(-t)$, $a > 0$. *Solução.* $\mathcal{F}[f(t)](\omega) = \dfrac{1}{a - i\omega}$.

(h) $f(t) = te^{-t}U(t)$. *Solução.* $\mathcal{F}[f(t)](\omega) = \dfrac{1}{(1+i\omega)^2}$.

11. Desenhe os espectros de amplitudes e de fases das funções dos ítens (a) - (d) do exercício anterior.

12. Para $a > 0$, seja $g_a(t) = \begin{cases} 1 - t/a\,, & 0 \le t \le a \\ 1 + t/a\,, & -a \le t \le 0 \\ 0\,, & |t| > a. \end{cases}$

(a) Esboçe o gráfico de g_a.

(b) Verifique que $\mathcal{F}[g_a(t)](\omega) = \dfrac{4\,\text{sen}^2(\omega a/2)}{a\omega^2}$.

(c) Tomando $a = 2$, verifique que $\mathcal{F}\left[\dfrac{\text{sen}^2 t}{\pi t^2}\right](\omega) = \dfrac{1}{2}g_2(\omega)$.

(d) Verifique que $\mathcal{F}\left[\dfrac{2\,\text{sen}^2 t}{\pi t^2}\cos 3t\right] = \dfrac{1}{2}\left[g_2(\omega-3)+g_2(\omega+3)\right].$

13. Calcule $\mathcal{F}^{-1}\left[\dfrac{1}{(1+i\omega)^2}\right]$

(a) Usando convolução.

(b) A formula de derivação da transformada de Fourier.

Solução. $\mathcal{F}^{-1}\left[\dfrac{1}{(1+i\omega)^2}\right] = e^{-t}U(t).$

14. Calcule $\mathcal{F}^{-1}\left[\dfrac{1}{(1+i\omega)(2+i\omega)}\right]$

(a) Usando convolução.

(b) Decomposição em frações parciais.

Solução. $\mathcal{F}^{-1}\left[\dfrac{1}{(1+i\omega)(2+i\omega)}\right] = (e^{-t}-e^{-2t})U(t).$

15. Seja $G(\omega) = \mathcal{F}[f(t)](\omega)$ e seja

$$G_a(\omega) = G(\omega)\cdot p_{2a}(\omega) = \begin{cases} G(\omega)\,, & |\omega| \le a \\ 0\,, & |\omega| > a. \end{cases}$$

Se $f_a(t) = \mathcal{F}^{-1}[G_a(\omega)](t)$, verifique que $f_a(t) = f(t) * \dfrac{\text{sen}\, at}{\pi t}$.

16. Usando a transformada de Fourier da delta de Dirac $\delta(t)$, verifique que:

(a) $\mathcal{F}[A](\omega) = 2\pi A\delta(\omega)$, $A \in \mathbb{R}$ constante.

(b) $\mathcal{F}[e^{i\omega_o t}](\omega) = 2\pi\delta(\omega-\omega_o)$, $\omega_o \in \mathbb{R}$ fixo.

(c) $\mathcal{F}[\cos\omega_o t] = \pi\delta(\omega+\omega_o)+\pi\delta(\omega-\omega_o)$.

(d) $\mathcal{F}[\text{sen}\,\omega_o t] = \pi i\delta(\omega+\omega_o)-\pi i\delta(\omega-\omega_o)$.