Lista 6 - Métodos Matemáticos II

Prof. Jorge Delgado

1. Verifique que a Delta de Dirac δ é a derivada da função $U(t)$ definida pela relação $\int_{-\infty}^{\infty} U(t)\phi(t)\,dt = \int_{0}^{\infty} \phi(t)\,dt$, para toda função teste $\phi \in C_c^o$.

2. (a) Verifique que $\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{2}{i\omega}\right](t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\omega t}{\omega}\,d\omega$.

(b) Sabendo que $\mathcal{F}[p_{2a}(t)](\omega) = \frac{2\operatorname{sen} a\omega}{\omega}$, obtenha:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} at}{t}\,dt = \operatorname{sgn}(a)\pi,$$

onde $\operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t = 0 \\ -1, & t < 0 \end{cases}$ é a função sinal.

(c) Conclúa que $\mathcal{F}[\operatorname{sgn}(t)](\omega) = \frac{2}{i\omega}$.

3. (a) Verifique que $U(t) = \frac{1}{2}(1 + \operatorname{sgn}(t))$.

(b) Use o resultado do exercício anterior para verificar que

$$\mathcal{F}[U(t)](\omega) = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{i\omega}.$$

(c) Verifique que $\mathcal{F}[U(t-1)](\omega) = \pi\delta(o) + \frac{e^{-i\omega}}{i\omega}$.

4. (a) Verifique que $\mathcal{F}[e^{i\omega_o t}U(t)](\omega) = \pi\delta(\omega - \omega_o) + \frac{1}{i(\omega - \omega_o)}$.

(b) Calcule $\mathcal{F}[U(t)\cos\omega_o t](\omega)$.

(c) Calcule $\mathcal{F}[U(t)\,\text{sen}\,\omega_o t](\omega)$.

5. Seja $f(t) = \begin{cases} 1, & t > T/2 \\ \dfrac{1}{T}\left(t + \dfrac{T}{2}\right), & |t| \leq T/2 \\ 0, & t < -T/2. \end{cases}$

(a) Faça um esboço do gráfico de $f(t)$ e verifique que

$$f(t) = \int_{t-T/2}^{t+T/2} U(x)\,dx.$$

(b) Verifique que: $f(t) = U(t) * \dfrac{1}{T} p_T(t)$.

(c) Verifique que: $\mathcal{F}[f(t)](\omega) = \pi\delta(\omega) + \dfrac{2\,\text{sen}(\omega T/2)}{i\omega^2 T}$.

6. Verifique que:

(a) $\mathcal{F}[\delta'(t)](\omega) = i\omega$.

(b) $\mathcal{F}[\delta^{(n)}(t)](\omega) = (i\omega)^n$.

(c) $\mathcal{F}[t](\omega) = 2\pi i\delta'(\omega)$.

(d) $\mathcal{F}[t^n](\omega) = 2\pi i^n \delta^{(n)}(\omega)$.

7. Seja $f(t)$ uma função periódica de período T. Verifique que:

$$\mathcal{F}[f(t)](\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta(\omega - n\omega_o),$$

onde $\omega_o = \dfrac{2\pi}{T}$ e $c_n = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-in\omega_o t}\,dt$ é o $n-$ésimo coeficiente da série de Fourier complexa de $f(t)$.

8. Seja

$$\begin{aligned} \delta_T(t) &= \cdots + \delta(t+2T) + \delta(t+T) + \delta(t) + \delta(t-t) + \delta(t-2T) + \cdots \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t+nT) \end{aligned}$$

a função *trem de impulsos unitários*.

(a) Verifique que δ_T é periódica de período T.

(b) Verifique que a série de Fourier complexa de δ_T é dada por:

$$\delta_T(t) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\omega_o t}$$

onde $\omega_o = \dfrac{2\pi}{T}$.

(c) Verifique que $\mathcal{F}[\delta_T(t)](\omega) = \omega_o \delta_{\omega_o}(\omega)$.

9. Seja $f(t)$ uma função periódica de período T e seja

$$f_o(t) = \begin{cases} f(t), & |t| \leq T/2 \\ 0, & |t| > T/2. \end{cases}$$

Verifique que $c_n = \dfrac{F_o(n\omega_o)}{T}$ é o $n-$ésimo coeficiente da série de Fourier complexa de $f(t)$, onde $F_o(\omega) = \mathcal{F}[f_o(t)](\omega)$ e $\omega_o = \dfrac{2\pi}{T}$.

10. Seja $f(t)$ o trem de pulsos retangulares de duração d e período T, onde $d < T$. Isto é,

$$f(t) = \begin{cases} 1, & nT - \frac{d}{2} < t < nT + \frac{d}{2}, \quad n \in \mathbb{Z} \\ 0, & \text{em outro caso.} \end{cases}$$

(a) Faça um esboço de $f(t)$ e verifique que $f(t)$ é periódica de período T.

(b) Usando o resultado do exercício 9 verifique que o $n-$ésimo coeficiente da série de Fourier complexa de $f(t)$ é dado por:

$$c_n = \frac{d}{T}\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{n\omega_o d}{2}\right)}{\frac{n\omega_o d}{2}},$$

onde $\omega_o = \dfrac{2\pi}{T}$.

(c) Verifique que:

$$\mathcal{F}[f(t)](\omega) = \frac{2\pi d}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi d}{T}\right)}{\frac{n\pi d}{T}}\delta(\omega - n\omega_o).$$

11. Considere a equação diferencial
$$x''(t) + 3x'(t) + 2x(t) = U(t).$$

(a) Usando a transformada de Fourier verifique que
$$x(t) = \frac{1}{2} * e^{-2t}U(t) * e^{-t}U(t) + \frac{\operatorname{sgn}(t)}{2} * e^{-2t}U(t) * e^{-t}U(t)$$

(b) Verifique que:
$$e^{-2t}U(t) * e^{-t}U(t) = (e^{-t} - e^{-2t})U(t).$$

(c) Verifique que:
$$\frac{1}{2} * \left(e^{-2t}U(t) * e^{-t}U(t)\right) = \frac{1}{4}.$$

(d) Verifique que:
$$\frac{\operatorname{sgn}(t)}{2} * e^{-2t}U(t) * e^{-t}U(t) = \begin{cases} \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\left(e^{-2t} - 2e^{-t}\right), & t > 0 \\ -\frac{1}{4}, & t < 0 \end{cases}$$

(e) Conclúa que $x(t) = \frac{1}{2}\left(1 + e^{-2t} - 2e^{-t}\right)U(t)$ é uma solução particular da equação proposta.

◇