Lista 1 de Calculo IIB
2^o semestre de 2014

1. Dadas as funções $f(t) = (t, t^2, 4, 5t)$, $g(t) = (3t - 1, 0, t^3 - 1, 2t)$ e $h(t) = t + 1$. Calcule:
   (a) $f(t) + g(t)$
   (b) $f(t) - g(t)$
   (c) $3f(t) - h(t)g(t)$.
   (d) $[h(t)f(t)].g(t)$
   (e) $f(\frac{2}{3}).h(5)g(\frac{1}{2})$

2. Calcule os seguintes limites:
   (a) $\lim\limits_{t\to\sqrt{2}}(t^2, t^2 - 1, t^4)$
   (b) $\lim\limits_{t\to 0}(cos(t), sen(t), t)$
   (c) $\lim\limits_{t\to 2}(\frac{t^2-4}{t-2}, \frac{sen(t-2)}{t-2}, t)$
   (d) $\lim\limits_{t\to 1}(\frac{t-1}{t^2-1}, cos(t-1) + sen(\frac{\pi}{2}t), t^8, 0)$
   (e) $\lim\limits_{t\to 0}(\frac{sen(t)}{t}, t^2 - 1, t^4)$

3. Dadas as funções $f(t) = (t, 2t^2, 3t^3)$ e $g(t) = (3t^3, 2t^2, t)$. Calcule os seguintes limites:
   (a) $\lim\limits_{t\to 1} f(t) + g(t)$
   (b) $\lim\limits_{t\to 1} f(t).g(t)$
   (c) $\lim\limits_{t\to 1} f(t) \times g(t)$
   (d) $\lim\limits_{t\to 1}(t^3 - 2)f(t)$

4. Verifique se as seguintes funções são continuas no ponto indicado:
   (a) $f(t) = (|t|, sen(t), \frac{1}{cos(t)})$ em $t = \pi$
   (b) $f(t) = (\frac{1}{t}, \frac{2}{t-1}, \frac{sen(t)}{t})$ em $t = 2$

(c) $f(x) = (tan(t), cos(t), \sqrt{t}, |t+1|)$. em $t = -1$.

(d) $f(t) = (\sqrt{t^2+1}, e^{t^2-1}, t^5 - 5, cos(t+1))$ em $t = -1$

5. Calcule $r'(1)$ e $r'(3)$ se:

   (a) $r(t) = (t+1, 2t-3, t^2-1)$

   (b) $r(t) = (\frac{1}{t}, 2-t, t, t^2)$

   (c) $r(x) = (cos(t), sen(t), Ln(t+1))$.

   (d) $r(t) = (e^{-t}, cos(3t))$

   (e) $r(t) = (cos(t).e^t, cos(sen(t+3)))$

   (f) $f(t) = (e^{e^{t^2-1}}, t^{t+1}, (t + cos(t))^2, \sqrt{t}, sen(t^2))$

6. Sejam $f(t) = cos(t)$, $G(t) = (t, e^t, \sqrt{t})$ e $F(t) = (sen(t^2), t^t, t^2+1)$. Calcule:

   (a) $F'(t) + G'(t)$

   (b) $(F-G)'(t)$

   (c) $(f(t)G(t))'$.

   (d) $(f(t).F(t))'$

   (e) $(F \times G)'(t)$

   (f) $(F.G)'(t)$

   (g) $(F(f(t)))'$

   (h) $(G(f(t)))'$

   (i) $(f(t)F \times G)'(t)$

   (j) $F \times G'(t).F'(t)$

7. De a equação parametrica da reta tangente de cada curva no ponto t_0 indicado:

   (a) $r(t) = (cos(t), sen(t) - t^2, e^t)$, $t_0 = 0$

   (b) $r(t) = (3cos(t), 3sen(t), t)$, $t_0 = 5\pi$

   (c) $r(t) = (cos(t), sen(t), cos(2t))$, $t_0 = 2\pi$

   (d) $r(t) = (t, t^2+t, e^{2t})$, $t_0 = 1$

(e) $r(t) = (t+1, t^3 - t, t^2)$, $t_0 = 2$

(f) $r(t) = (t-1, cos(t^2), sen(t^3))$, $t_0 = 1$

8. Dadas as funções:

$$f(x) = (e^x, x, \frac{1}{x-1}) \quad e \quad g(x) = (x-1, 0, x-2)$$

Encontre seu dominio e calcule $\lim_{x \to 1} f(x) \times g(x)$

9. Diga se as curvas a seguir são regulares (lisa), se não, encontre seus pontos singulares. Também de a equação parametrica da reta tangente de cada curva no ponto t_0 indicado:

(a) $r(t) = (sen(t-1), t^t, e^{2(t-1)})$, $t_0 = 1$

(b) $r(t) = (cos(\pi t^2), t^5 + 1, t^3)$, $t_0 = 1$

10. Sera que $f(t) = (t^2, t^4)$ é uma parametrização da parabola. Esboçe seu grafico.

11. Esboçe o grafico das seguintes curvas.

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(t) = (e^t cos(t), e^t sen(t))$

(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ definida por $f(t) = (2cos(t), 3sen(t), t)$

(c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ definida por $f(t) = (t, 1+t, 2+5t)$

(d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(t) = (cos^3(t), sen^3(t))$

(e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ definida por $f(t) = (e^t cos(t), e^t sen(t), t)$

Lista 2 de Calculo IIB
2^o semestre de 2014

1. Encontre o dominio e imagem das segintes funções:

   (a) $f(x,y) = y - x$.
   (b) $f(x,y) = y^2 - x$.
   (c) $f(x,y) = xy$.
   (d) $f(x,y) = \sqrt{y-x}$.
   (e) $f(x,y) = \frac{y}{x^2}$.
   (f) $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$.
   (g) $f(x,y) = Ln(x^2+y^2)$.
   (h) $f(x,y) = Ln(x^2+y^2+1)$.
   (i) $f(x,y) = \frac{2xy}{x^2-y} + \frac{2}{x^2+(y+1)^2}$
   (j) $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$.
   (k) $f(x,y) = \frac{2xy}{x^2-y} + \frac{2}{x^2+(y+1)^2}$
   (l) $f(x,y) = \frac{1}{x^2-y^2}$.
   (m) $f(x,y) = ArcTan(\frac{y}{x})$.
   (n) $f(x,y) = ArcSen(y-x)$.
   (o) $f(x,y) = \frac{2xy}{x^2-y^2} + \frac{1}{(x-1)^2+y^2}$
   (p) $f(x,y) = x^2+y^2-xy$
   (q) $f(x,y) = xy-1$
   (r) $f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{xy-1}$
   (s) $f(x,y) = x + \frac{1}{y}$
   (t) $f(x,y) = \frac{x+y}{x-y}$
   (u) $f(x,y) = ln(x-y)$
   (v) $f(x,y) = \sqrt{25-x^2-y^2}$
   (w) $f(x,y) = x^2+y^2+1$

2. Esboçe o dominio de cada uma das funções acima e verifique se este conjunto é aberto, fechado, conexo, simplesmente conexo, compacto (ou seja, fechado e limitado ao mesmo tempo).

3. (a) Em cada uma das questões acima, encontre suas curvas de nivel e de contorno. Faça um esboço destas.

   (b) Faça um esboço da superficie que representa cada função.

   (c) Utilizando um programa de computador grafique as funções e compare com seu esboço. Obs: existem programas online, como o dado no seguinte link:

   http://www.wolframalpha.com/input/?i=plot+ln

4. Encontre o dominio e imagem das segintes funções:

   (a) $f(x, y, z) = y - x + z$.
   (b) $f(x, y, z) = y^2 - x$.
   (c) $f(x, y, z) = zxy$.
   (d) $f(x, y, z) = \sqrt{y - x + z^2}$.
   (e) $f(x, y, z) = \frac{y}{x^2+z^2}$.
   (f) $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{Z^2-x^2-y^2}}$.
   (g) $f(x, y, z) = Ln(x^2 + y^2 + z^2)$.
   (h) $f(x, y, z) = x + \sqrt{1 - Z^2 - x^2 - y^2}$.
   (i) $f(x, y, z) = e^{-(x^2+y^2+z^2)}$.
   (j) $f(x, y, z) = \frac{z^2}{x^2-y^2}$.
   (k) $f(x, y, z) = |z| - x)$.
   (l) $f(x, y, z) = x^2 + x^2 + 1$.
   (m) $f(x, y, z) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$

5. Esboçe o dominio de cada uma das funções acima e verifique se este conjunto é aberto, fechado, conexo, simplesmente conexo, compacto (ou seja, fechado e limitado ao mesmo tempo).

6. Em cada uma das questões acima, encontre suas superficies de nivel e de contorno. Faça um esboço destas ($k = 0$).

7. Diga se os seguintes conjuntos são abertos, fechados, conexos, simplesmente conexo, compacto:

   (a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x = 0\}$

   (b) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x = y + 1\}$

   (c) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x > 0\}$

   (d) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \geq y\}$

   (e) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x + y < z\}$

   (f) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x = -2, |x| < 1 \;\; e \;\; |y| < 1\}$

   (g) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y = 2, |x| \leq 2 \;\; e \;\; |y| < 2\}$

8. Calcule o limite das sequintes funções se existir. Caso contrario justifique:

   (a) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} x^2 + y^2 - xy.$

   (b) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,-1)} xy - 1.$

   (c) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \frac{x^2+y^2}{xy-1}.$

   (d) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^2+y^2}{xy-1}.$

   (e) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} x + \frac{1}{y}.$

   (f) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^2-y^2}{x-y}.$

   (g) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} ln(x-y).$

   (h) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^4-y^2}$

   (i) $\lim\limits_{(x,y)\to(3,4)} \sqrt{25 - x^2 - y^2}.$

   (j) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(1,1,1)} \frac{x^2+y^2+1}{z-2}.$

   (k) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,1)} \frac{x^2-y^2}{z^2-y^2}.$

   (l) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{cos(x^2+y^2)}{z+1}.$

(m) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^2-y^2}$

(n) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^2-y}$

(o) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

(p) $\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{sen(xy)}{x}$.

(q) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^5}{\sqrt{(x^2+y^2)^5}}$

9. Diga se as siguentes funções são continuas no ponto indicado:

   (a) $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy. \qquad (x,y) = (0,0)$
   (b) $f(x,y) = xy - 1. \qquad (x,y) = (1,1)$
   (c) $f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{xy-1}. \qquad (x,y) = (0,0)$ e $(x,y) = (2, \frac{1}{2})$
   (d) $f(x,y) = x + \frac{1}{y}. \qquad (x,y) = (1,0)$ e $(x,y) = (0,1)$
   (e) $f(x,y) = \frac{x+y}{x-y}. \qquad (x,y) = (1,1)$ e $(x,y) = (1,-1)$
   (f) $f(x,y) = ln(x-y). \qquad (x,y) = (0,0)$ e $(x,y) = (2,2)$
   (g) $f(x,y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2}. \qquad (x,y) = (0,0)$ e $(x,y) = (6,5)$
   (h) $f(x,y,z) = \frac{x^2+y^2+1}{z-2}. \qquad (x,y,z) = (0,0,2)$ e $(x,y,z) = (1,0,0)$
   (i) $f(x,y,z) = \frac{x^2-y^2}{z^2-y^2}. \qquad (x,y,z) = (1,1,1)$ e $(x,y,z) = (1,2,1)$
   (j) $f(x,y,z) = \frac{cos(x^2+y^2)}{z+1}. \qquad (x,y,z) = (0,0,-1)$ e $(x,y,z) = (0,0,1)$

10. Diga se a seguinte função é continua em seu dominio de definição:

$$f(x,y) = \begin{cases} 4x^2 + 4y^2 & \text{se } (x,y) \in B(0,1); \\ (x+y)^2 + 3 - 2xy & \text{se } (x,y) \in \partial B(0,1); \\ 2 + \frac{2}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \in B(0,1)^c. \end{cases}$$

11. De dois exemplos de funções continuas e de funciones descontinuas em $\mathbb{R}^2$.

12. De um exemplo de uma função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, tal que para cada variavel independete a função seja continua, isto é $g(x) = f(x,b)$ é continua para cada $b \in \mathbb{R}$ e $h(y) = f(a,y)$ é continua para cada $a \in \mathbb{R}$. Porem a função f seja descontinua em $\mathbb{R}^2$

Lista 3 de Calculo IIB
2^o semestre de 2014

1. Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$, para as seguintes funções:

   (a) $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy.$
   (b) $f(x,y) = xy - 1.$
   (c) $f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{xy-1}.$
   (d) $f(x,y) = x + \frac{1}{y}.$
   (e) $f(x,y) = \frac{x+y}{x-y}.$
   (f) $f(x,y) = ln(x-y).$
   (g) $f(x,y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2}.$
   (h) $f(x,y,z) = \frac{x^2+y^2+1}{z-2}.$
   (i) $f(x,y,z) = \frac{x^2-y^2}{z^2-y^2}.$
   (j) $f(x,y,z) = \frac{cos(x^2+y^2)}{z+1}.$
   (k) $f(x,y) = y - x.$
   (l) $f(x,y) = y^2 - x.$
   (m) $f(x,y) = xy.$
   (n) $f(x,y) = \sqrt{y-x}.$
   (o) $f(x,y) = \frac{y}{x^2}.$
   (p) $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}.$
   (q) $f(x,y) = Ln(x^2 + y^2).$
   (r) $f(x,y) = Ln(x^2 + y^2 + 1).$
   (s) $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}.$
   (t) $f(x,y) = \frac{1}{x^2-y^2}.$
   (u) $f(x,y) = ArcTan(\frac{y}{x}).$
   (v) $f(x,y) = ArcSen(y-x).$

2. Dada a função:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0); \\ 1 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

   Verifique que:

   - Não é continua em $\mathbb{R}^2$.
   - Porem, existe $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$
   - A função $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ não é continua em $\mathbb{R}^2$.
   - $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ não existe no ponto $(0,0)$.

3. Dada a função:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0); \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

   Verifique que:

   - Não é continua em $\mathbb{R}^2$.
   - Porem, existe $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$
   - A função $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ não é continua em $\mathbb{R}^2$.
   - $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ não existe no ponto $(0,0)$.

4. Dada a função:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^3}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0); \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

   verifique que:

   - É continua em $\mathbb{R}^2$.
   - Existem $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ e $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
   - A função $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ não é continua em $\mathbb{R}^2$.

5. Verifique que a função $f(x,y) = |x+y|$ é continua em todo $\mathbb{R}^2$, porem existem pontos onde não existem suas derivadas parciais.

6. De um exemplo de uma função que não seja continua, mas que possua derivadas parciais para qualquer ponto de seu dominio.

7. Encontre a equação da reta tangente ao curva de contorno pelo plano e ponto indicado:

   (a) $f(x,y) = y^2 - x$. (X= 0) no ponto (0,1,1).
   (b) $f(x,y) = xy$. (Z= 1) no ponto (1,1,1).
   (c) $f(x,y) = \sqrt{y-x}$. (X= 0) no ponto (0,4,2).
   (d) $f(x,y) = \frac{y}{x^2}$. (Y= 1) no ponto (-1,1,1).
   (e) $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$. (X= 0) no ponto (0,0,1).
   (f) $f(x,y) = Ln(x^2+y^2+1)$. (z= 1) no ponto (0,0,1).

8. verifique se as seguintes funções são diferenciaveis em todos os pontos de seu dominio (diga em que pontos não são):

   (a) $f(x,y) = x^4 + y^4 - x^2y^2$.
   (b) $f(x,y) = xy - cos(xy)$.
   (c) $f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{xy+1}$.
   (d) $f(x,y) = y + \frac{1}{x}$.
   (e) $f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$.
   (f) $f(x,y) = ln(x^2+y^2)$.
   (g) $f(x,y) = \sqrt{25-x^2-y^2}$.
   (h) $f(x,y,z) = \frac{x^2+y^2+1}{z^2+2}$.
   (i) $f(x,y,z) = \frac{x^2-y^2}{z^2-y^2}$.
   (j) $f(x,y,z) = \frac{cos(x^2+y^2)}{z+1}$.
   (k) $f(x,y) = \sqrt{y-x}$.
   (l) $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$.
   (m) $f(x,y) = Ln(x^2+y^2+1)$.
   (n) $f(x,y) = e^{(x^2+y^2)}$.
   (o) $f(x,y) = \frac{1}{x^2-y^2}$.

(p) $f(x,y) = ArcTan(\frac{y}{x})$.

(q) $f(x,y) = ArcSen(y-x)$.

(r)
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0); \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(s)
$$f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2+4} & \text{se } x^2+y^2 < 4; \\ 0 & \text{se } x^2+y^2 \geq 4. \end{cases}$$

9. De dois exemplos, de uma função que não seja diferenciavel mas que suas derivadas parciais existam.

10. Dada a seguinte função:

$$f(x,y) = \begin{cases} 4x-2y+1 & \text{se } x = 1 \text{ ou } y = 2; \\ 4 & \text{se } x \neq 1 \text{ e } y \neq 2. \end{cases}$$

- Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(1,2)$
- Calcule $\frac{\partial f}{\partial y}(1,2)$
- Determine se f é diferenciavel no ponto $(1,2)$.

Lista 4 de Calculo IIB

2^o semestre de 2014

1. Encontre a equação do plano tangente as seguintes superficies, no ponto indicado:

   (a) $f(x,y) = y^2 - x^3 + 1$. no ponto (0,1,2).

   (b) $f(x,y) = xy$. no ponto (1,1,1).

   (c) $f(x,y) = \sqrt{y-x}$. no ponto (0,4,2).

   (d) $f(x,y) = \frac{y}{x^2}$. no ponto (-1,1,1).

   (e) $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$. no ponto (0,0,1).

   (f) $f(x,y) = Ln(x^2 + y^2 + 1)$. no ponto (0,0,1).

2. Caclule o gradiente das seguintes funções se existir:

   (a) $f(x,y) = x^6 + y^3 - x^3y^4$.

   (b) $f(x,y) = sen(xy) - cos(xy)$.

   (c) $f(x,y) = \frac{(x+1)^2+y^2}{x^2y+1}$.

   (d) $f(x,y) = x^2 + \frac{1}{yx}$.

   (e) $f(x,y) = \frac{xcos(y)-ysen(x)}{x+y}$.

   (f) $f(x,y) = ln(x^2 + y^2)$.

   (g) $f(x,y) = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$.

   (h) $f(x,y,z) = \frac{x^2z+y^2+1}{z^2+2}$.

   (i) $f(x,y,z) = \frac{x^2-y^2z}{z^2-y^2}$.

   (j) $f(x,y,z) = \frac{cos(x^2+y^2+z)}{z+1}$.

   (k) $f(x,y,z) = z^2\sqrt{y-x}$.

   (l) $f(x,y,z) = \frac{cos(z)}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$.

   (m) $f(x,y,z) = Ln(x^2 + y^2 + z^4)$.

   (n) $f(x,y) = cos(xy)e^{(x^2+y^2)}$.

   (o) $f(x,y) = \frac{tan(x)}{x^2-y^2}$.

(p) $f(x,y,z) = ArcTan(\frac{ytan(z)}{x})$.

(q) $f(x,y,z) = ArcSen(y - xcos(z))$.

3. Encontre a reta normal as seguintes superficies no ponto indicado:

   (a) $z = x + y - x^3y^4$. No ponto $P_0 = (0,1,1)$

   (b) $z = sen(xy) - cos(xy)$. No ponto $P_0 = (0,1-,1)$

   (c) $z = \frac{(x+1)^2+y^2}{x^2y+1}$. No ponto $P_0 = (0,0,1)$

   (d) $z = x^2 + \frac{1}{y^2x}$. No ponto $P_0 = (1,1,2)$

   (e) $z = \frac{xcos(y)-ysen(x)}{x+y}$. No ponto $P_0 = (0,1,0)$

   (f) $z = cos(y)e^{(x^2+y^2)}$. No ponto $P_0 = (0,0,1)$

   (g) $z = \frac{cos(x)}{x^2-y^2}$. No ponto $P_0 = (0,1,-1)$

   (h) $z = \frac{ytan(x)}{x}$. No ponto $P_0 = (\pi,1,0)$

   (i) $z = Sen(y - xcos(xy))$. No ponto $P_0 = (0,0,0)$

4. Calcule a derivada direcional das seguintes funções na direção do vetor V:

   (a) $f(x,y) = \frac{x^2+y^3}{x^2y-1}$. Com $V = (1,1)$

   (b) $f(x,y) = xy + \frac{y}{x}$. Com $V = (1,0)$

   (c) $f(x,y) = \frac{x^2cos(y)}{x^2-y^2}$. Com $V = (1,1)$

   (d) $f(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$. Com $V = (1,1)$

   (e) $f(x,y,z) = \frac{x^2-y^2}{z^2-y^2}$. Com $V = (0,1,0)$

   (f) $f(x,y) = sen(x)\sqrt{y^2 - x}$. Com $V = (2,3)$

   (g) $f(x,y) = \frac{y^4tan(x)}{x^2}$. Com $V = (1,2)$

   (h) $f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$. Com $V = (1,1)$

   (i) $f(x,y) = Ln(x^2 + y^2)$. Com $V = (1,0)$

   (j) $f(x,y,z) = Ln(x^2 + y^2 + z^6)$. Com $V = (1,1,1)$

   (k) $f(x,y,z) = ze^{-(x^2+y^2)}$. Com $V = (1,1,0)$

   (l) $f(x,y,z) = \frac{z}{x^2-y^2}$. Com $V = (0,1,1)$

(m) $f(x,y,z) = cos(z)Tan(\frac{y}{x})$. Com $V = (1,0,1)$

(n) $f(x,y,z) = cos^2(zxy)Sen(y-x)$. Com $V = (1,1,1)$

5. Se $y := y(x)$, encontre $\frac{dy}{dx}$, sabendo que $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 1$:

(a) $f(x,y) = x^2 + (xy)^2 - xy$.

(b) $f(x,y) = xsen(y) - 1$.

(c) $f(x,y) = \frac{x^2.y^2}{xy-1}$.

(d) $f(x,y) = x - cos(xy)\frac{1}{y}$.

(e) $f(x,y) = \frac{x+y}{xy}$.

(f) $f(x,y) = ln(xy)$.

(g) $f(x,y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$.

(h) $f(x,y,z) = \frac{x^2.y^2+1}{z-2}$.

(i) $f(x,y,z) = \frac{x^2.y^2}{z^2-y^2}$.

(j) $f(x,y,z) = \frac{cos(x^2+y^2)}{sen(z)+1}$.

Lista 5 de Calculo IIB
2^o semestre de 2014

1. Encontre o polinomio de taylor de grau 2 das segintes funções:
   (a) $f(x,y) = e^{2x+3y}$. entorno do ponto (0,0).
   (b) $f(x,y) = cos(x)sen(y)$. entorno do ponto (π,0).
   (c) $f(x,y) = \sqrt{y-x}$. entorno do ponto (0,4).
   (d) $f(x,y) = \frac{cos(y)}{x^2}$. entorno do ponto (-1,0).
   (e) $f(x,y) = e^x cos(y)$. entorno do ponto (0,0).
   (f) $f(x,y) = Ln(x^2+y^2+1)$. entorno do ponto (0,0).
   (g) $f(x,y) = Arctan(xy^2)$. entorno do ponto (0,0).

2. Encontre os pontos criticos das seguintes funções:
   (a) $f(x,y) = x^6 + y^3 - x^3y^4$.
   (b) $f(x,y) = sen(xy) - cos(xy)$.
   (c) $f(x,y) = x^2 + \frac{1}{yx}$.
   (d) $f(x,y) = ln(x^2+y^2)$.
   (e) $f(x,y) = \sqrt{16-x^2-y^2}$.
   (f) $f(x,y,z) = \frac{x^2z+y^2+1}{z^2+2}$.
   (g) $f(x,y,z) = \frac{x^2-y^2z}{z^2-y^2}$.
   (h) $f(x,y,z) = \frac{cos(x^2+y^2+z)}{z+1}$.
   (i) $f(x,y,z) = z^2\sqrt{y-x}$.
   (j) $f(x,y,z) = \frac{cos(z)}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$.
   (k) $f(x,y,z) = Ln(x^2+y^2+z^4)$.
   (l) $f(x,y) = \frac{tan(x)}{x^2-y^2}$.
   (m) $f(x,y,z) = ArcTan(\frac{ytan(z)}{x})$.

3. Dada uma função homogenea de grau n, isto é, uma função que satisfaz $f(tX) = t^n f(X)$, para todo $t > 0$, tal que tX esta no dominio de f. ($X \in \mathbb{R}^m$). De dois exemplos de funções deste tipo. Verifique a formula de Euler:
$$\nabla f(X).X = nf(X)$$

4. Dada $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2, verifique que
$$f(X+V) = f(X) + \nabla f(X).V + \frac{1}{2!}V.(H(X).V^T)$$
é a formula de taylor ate o grau 2. Onde $X, V \in \mathbb{R}^2$, $H(X)$ é a matriz hessiana e V^T representa o vetor transposto, ou seja uma matriz com uma coluna e duas linhas.

5. Calcule os pontos de maximos, minimos ou sela das seguintes funções, diga se estes são globais:
   (a) $z = x + y - x^3y^4$.
   (b) $z = x^2y^3(6 - x - y)$.
   (c) $z = 3x^4 - 4x^2y + y^2$.
   (d) $z = x^2 + cos^2(y)$.
   (e) $z = e^{x-y}(y^2 - 2x^2)$.
   (f) $z = (3 - x)(3 - y)(x + y - 3)$.
   (g) $z = e^{x^2+y^2}$.
   (h) $z = \frac{y}{x^2+y^2+4}$.
   (i) $z = xy(1 - x^2 - y^2)$.
   (j) $z = \frac{x}{x+y}$

6. Calcule os pontos de maximos, minimos ou sela das seguintes funções no dominio dado:
   (a) $f(x, y) = x^2 - 3y^2$. na região limitada pelo retangulo de vertices $(1, 2), (-1, 2), (-1, -2), (1, -2)$
   (b) $z = \sqrt{x^2 + y^2 + 4}$. no circulo $x^2 + y^2 \leq 4$
   (c) $z = xy(1 - x^2 - y^2)$. no quadrado limitado por $0 \leq x \leq 1$ e $0 \leq y \leq 1$

(d) $z = cos(x)+cos(y)+cos(xy)$. no retangulo limitado por $0 \leq x \leq \pi$ e $-\pi \leq y \leq \pi$

(e) $z = x^2 + cos^2(y)$. Na região do I quadrante limitada pela reta $y = -x + 2$.

(f) $z = e^{x^2+y^2}$. Na região do I quadrante limitada por $y = 4 - x^2$.

(g) $z = \frac{y}{x+y}$ Na região limitada por $y = 1 - x^2$ e $y = x^2 - 7$.

7. Calcule os pontos de maximos ou minimos das seguintes funções, sujeito as condições dadas:

   (a) $f(x, y) = x^2 - 3y^2$. com $y = x^2$

   (b) $z = xy$. Com $x + y = 1$

   (c) $z = 2x^2 - 3y^2$. Com $x^2 + y^2 = 1$

   (d) $z = x^2 + 4y^2$. Com $x + y = 4$

   (e) $z = e^{x^2+y^2}$. com $y = x^2$.

8. Calcule os pontos de maximos, minimos ou sela das seguintes funções, diga se estes são globais:

   (a) $f(x, y, z) = x^4 + y^4 - 4xyz$.

   (b) $f(x, y, z) = xyz + z^2$.

   (c) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

   (d) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Com $x + y + z = 4$.

   (e) $f(x, y, z) = x^2 + y^2z^2$. Com $x + yz = 4$.

   (f) $f(x, y, z) = ze^{x^2+y^2}$. com $y = x^2 + z$ e $x + z = 1$.

9. encontrar treis numeros positivos cujo produto seja 50 e cuja soma seja minima.

10. Encontre o menor e maior valor da distancia entre a origem $(0, 0)$ e a curva $5x^2 + 6xy + 5y^2 = 8$.

11. Uma firma de embalagem necessita fabricar caixas retangulares de 216 cm^3 de volume. se o material da parte lateral custa a metade do material para ser usado de tampa e fundo da caixa. Determinar as dimensões da caixa que minimizam o custo.

12. Encontre o menor valor da origem ate a curva gerada pela interseção das superficies: $x^2 - xy + y^2 - z^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 1$

13. Dada uma função $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dizemos que esta é harmonica se satisfaz a equação de laplace $\Delta f(x, y) = 0$. Onde

$$\Delta f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Verifique que $f(x, y) = x^3 - 3xy^2$ é harmonica. Quais funções do item 5 são harmonicas.

Lista 6 de Calculo IIB

2^o semestre de 2014

1. Encontre o dominio das seguintes funções:

   (a) $\overrightarrow{f}(x,y) = (x^2 - xy, e^x e^y)$.

   (b) $\overrightarrow{f}(x,y) = (x-1, cos(xy))$.

   (c) $\overrightarrow{f}(x,y) = (\frac{x^2.y^2}{xy-1}, e^x y^3)$.

   (d) $\overrightarrow{f}(x,y) = (\frac{1}{y}, \frac{x^4}{e^y})$.

   (e) $\overrightarrow{f}(x,y) = (\frac{x.y}{x-y}, tan(xsen(x)))$.

   (f) $\overrightarrow{f}(x,y) = (ln(x-y^3), ln(xy+1))$.

   (g) $\overrightarrow{f}(x,y) = (\sqrt{25-y^2}, e^{xcos(y)})$.

   (h) $\overrightarrow{f}(x,y,z) = (\frac{x^2+z}{z-2}, z^2+x+y, z^2x+zy^2)$.

   (i) $\overrightarrow{f}(x,y,z) = (\frac{x^2-y^2}{z^2.y^2}, zcos(x)+y^2, z^2sen(yx))$.

   (j) $\overrightarrow{f}(x,y,z) = (\frac{cos(x^2.y^2)}{z+1}, e^{zxy}, ln(cos(x(y+z))))$.

   (k) $\overrightarrow{f}(x,y,z) = (\sqrt{1-x^2-y^2}, \sqrt{4-x^2-y^2}, z)$

   (l) $\overrightarrow{f}(x,y,z) = (\sqrt{1-x^2-y^2}, \sqrt{xy}, \frac{x}{z-1})$

2. Represente geometricamente os seguintes campos vetoriais:

   (a) $\overrightarrow{f}(x,y) = (0, y)$.

   (b) $\overrightarrow{f}(x,y) = (|x|, 0)$.

   (c) $\overrightarrow{f}(x,y) = (3x, 3y)$.

   (d) $\overrightarrow{f}(x,y) = (-y, x)$.

   (e) $\overrightarrow{f}(x,y) = (x+1, y+2)$.

   (f) $\overrightarrow{f}(x,y) = (3, -1)$.

   (g) $\overrightarrow{f}(x,y) = (-x, -y)$.

   (h) $\overrightarrow{f}(x,y,z) = (x, y, 0)$.

   (i) $\overrightarrow{f}(x,y,z) = (x, y, z)$.

(j) $\overrightarrow{f}(x,y,z) = (1,-y,z)$.

(k) $\overrightarrow{f}(x,y,z) = (-x,-y,-z)$

(l) $\overrightarrow{f}(x,y,z) = (2x,y+1,-z)$

3. Calcule os seguintes limites:

(a) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} (x^2 - xy^2, e^x e^y)$.

(b) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} (x-1, cos(xy))$.

(c) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} (\frac{x^2.y^2-y^2}{xy-y}, e^y x^3)$.

(d) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} (\frac{1}{x^2y^2+1}, \frac{x^4}{e^y})$.

(e) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (\frac{sen(x.y)}{xy}, tan(xsen(x)))$.

(f) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} (ln(x-y^3), ln(xy+1))$.

(g) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(1,1,1)} (\frac{x^2+z}{z-2}, z^2+x+y, z^2x+zy^2)$.

(h) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(1,0,0)} (\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, zcos(x)+y^2, z^2sen(yx))$.

(i) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,1)} (\frac{cos(x^2.y^2)}{z+1}, e^{zxy}, ln(cos(x(y+z))))$.

(j) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} (\sqrt{1-x^2-y^2}, \sqrt{4-x^2-y^2}, z)$

(k) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(-1,-1,2)} (\sqrt{1-x^2-y^2}, \sqrt{xy}, \frac{x}{z-1})$

4. Determine a continuidade das seguintes funções:

(a)

$$f(x,y) = \begin{cases} (\frac{x^2}{x^2+y^2}, xy) & \text{se } (x,y) \neq (0,0); \\ (1,0) & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(b)

$$f(x,y) = \begin{cases} (\frac{x^2y}{x^2+y^2}, x+1) & \text{se } (x,y) \neq (0,0); \\ (y,y) & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(c)

$$f(x,y) = \begin{cases} (\frac{sen(x^2+y^2)}{x^2+y^2}, 2-y) & \text{se } (x,y) \neq (0,0); \\ (1, 2+x) & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

5. Calcule as derivadas parciais $\frac{\partial \overrightarrow{f}}{\partial x_i}(X)$ das seguintes funções:

   (a) $\overrightarrow{f}(x,y) = (x^2 - xy, e^x e^y)$.

   (b) $\overrightarrow{f}(x,y) = (x-1, cos(xy))$.

   (c) $\overrightarrow{f}(x,y) = (\frac{x^2.y^2}{xy-1}, e^x y^3)$.

   (d) $\overrightarrow{f}(x,y) = (\frac{1}{y}, \frac{x^4}{e^y})$.

   (e) $\overrightarrow{f}(x,y) = (\frac{x.y}{x-y}, tan(xsen(x)))$.

   (f) $\overrightarrow{f}(x,y) = (ln(x-y^3), ln(xy+1))$.

   (g) $\overrightarrow{f}(x,y) = (\sqrt{25-y^2}, e^{xcos(y)})$.

   (h) $\overrightarrow{f}(x,y,z) = (\frac{x^2+z}{z-2}, z^2+x+y, z^2x+zy^2)$.

   (i) $\overrightarrow{f}(x,y,z) = (\frac{x^2-y^2}{z^2.y^2}, zcos(x)+y^2, z^2sen(yx))$.

   (j) $\overrightarrow{f}(x,y,z) = (\frac{cos(x^2.y^2)}{z+1}, e^{zxy}, ln(cos(x(y+z))))$.

Lista 7 de Calculo IIB
2^o semestre de 2014

1. Determine se as seguintes funções são diferenciaveis:

   (a) $\overrightarrow{f}(x,y) = (x^6 - x^4y, e^x y)$.

   (b) $\overrightarrow{f}(x,y) = (y - sen(x), sen(xy))$.

   (c) $\overrightarrow{f}(x,y) = (\frac{x^2.y^2}{xy-1}, e^x y^3)$.

   (d) $\overrightarrow{f}(x,y) = (\frac{1}{y}, \frac{x^4}{e^y})$.

   (e) $\overrightarrow{f}(x,y) = (\sqrt{25 - y^2}, e^{xcos(y)})$.

   (f) $\overrightarrow{f}(x,y,z) = (\frac{x^2+z}{z-2}, z^2 + x + y, z^2x + zy^2)$.

   (g) $\overrightarrow{f}(x,y,z) = (\frac{x^2-y^2}{z^2.y^2}, zcos(x) + y^2, z^2 sen(yx))$.

   (h) $\overrightarrow{f}(x,y,z) = (\frac{cos(x^2.y^2)}{z+1}, e^{zxy}, ln(cos(x(y+z))))$.

   (i) $\overrightarrow{f}(x,y,z) = (\sqrt{1 - x^2 - y^2}, \sqrt{xy}, \frac{x}{z-1})$

   (j)
$$f(x,y) = \begin{cases} (\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}, x+1) & \text{se } (x,y) \neq (0,0); \\ (y,y) & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

   (k)
$$f(x,y) = \begin{cases} (\frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, e^x) & \text{se } (x,y) \neq (0,0); \\ (0, x+1) & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

   (l)
$$f(x,y) = \begin{cases} (\sqrt{4 - x^2 - y^2}, x^2 + y^2) & \text{se } x^2 + y^2 < 4; \\ (0,4) & \text{se } x^2 + y^2 \geq 4. \end{cases}$$

2. Calcule a matriz jacobiana e seu determinante das seguintes funções:

   (a) $\overrightarrow{f}(x,y) = (e^{x^2+y^2}, ycos(x))$.

   (b) $\overrightarrow{f}(x,y) = (x^3 + y^2x^3, cos(xy))$.

   (c) $\overrightarrow{f}(x,y) = (\frac{x^2+y^2}{x^3}, arctan(x+y))$.

   (d) $\overrightarrow{f}(x,y) = (-y + tan(x), x^4)$.

(e) $\overrightarrow{f}(x,y) = (x+1, y+2)$.

(f) $\overrightarrow{f}(x,y) = (x^3, y^x)$.

(g) $\overrightarrow{f}(x,y) = (-x, -y)$.

(h) $\overrightarrow{f}(x,y,z) = (x, z, y)$.

(i) $\overrightarrow{f}(x,y,z) = (x, y^2e^x, z^3e^x)$.

(j) $\overrightarrow{f}(x,y,z) = (x^2, -y^4, z+8)$.

(k) $\overrightarrow{f}(x,y,z) = (-x, -y, -z)$

(l) $\overrightarrow{f}(x,y,z) = (2x+z, y+x, -z+x)$

(m) $\overrightarrow{f}(r,\theta) = (rcos(\theta), rsen(\theta))$

(n) $\overrightarrow{f}(r,\theta,z) = (rcos(\theta), rsen(\theta), z)$

(o) $\overrightarrow{f}(\rho,\theta,\varphi) = (\rho sen(\varphi)cos(\theta), \rho sen(\varphi)sen(\theta), \rho cos(\varphi))$

3. Calcule a matriz jacobiana $J_{f\circ g}$ onde:

(a) $\overrightarrow{f}(x,y) = (e^{x^2+y^2}, ycos(x))$ e $\overrightarrow{g}(x,y) = (x^3, y^2)$.

(b) $\overrightarrow{f}(x,y) = (x^3 + y^2x^3, cos(xy))$ e $\overrightarrow{g}(x,y) = (sen(y), ycos(x))$.

(c) $f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{x^3}$ e $\overrightarrow{g}(t) = (e^t cos(t), tsen(t))$

(d) $\overrightarrow{f}(t) = (-t + tan(t), t^4)$ e $g(x,y) = e^{x^2+y^2} + ycos(x)$.

(e) $\overrightarrow{f}(t) = (t+1, t^3+2, tsen(t))$ e $g(x,y) = x^2 + cos(xy)$.

(f) $\overrightarrow{f}(t) = (t^3, 3t^2, sec(t), t)$ e $g(x,y) = x + y$.

(g) $\overrightarrow{f}(x,y,z) = (-x, -y, cos(z))$ e $\overrightarrow{g}(x,y,z) = (y^2, ycos(x), zsen(z))$.

(h) $\overrightarrow{f}(x,y,z) = (x, z, y)$ e $\overrightarrow{g}(x,y,z) = (-z, y, x)$.

(i) $\overrightarrow{f}(x,y,z) = (x, y^2e^x, z^3e^x)$ e $\overrightarrow{g}(x,y) = (e^{x^2}, y, x+y)$.

(j) $\overrightarrow{f}(x,y) = (x^2, -y^4, xy+8)$ e $\overrightarrow{g}(x,y) = (-y, cos(x))$.

(k) $\overrightarrow{f}(x,y) = (-x, -y, e^{xy})$ e $\overrightarrow{g}(x,y,z) = (xz, ye^z)$

4. Determine o conjunto onde as seguintes funções são localmente invertivel:

(a) $\overrightarrow{f}(x, y) = (x^2 - xy, e^x e^y)$.

(b) $\overrightarrow{f}(x, y) = (x - 1, cos(xy))$.

(c) $\overrightarrow{f}(x, y) = (e^{x-y}, e^{x+y})$.

(d) $\overrightarrow{f}(x, y, z) = (\frac{x^2+z}{z-2}, z^2 + x + y, z^2x + zy^2)$.

(e) $\overrightarrow{f}(x, y, z) = (\frac{x^2-y^2}{z^2.y^2}, zcos(x) + y^2, z^2sen(yx))$.

(f) $\overrightarrow{f}(x, y, z) = (\frac{cos(x^2.y^2)}{z+1}, e^{zxy}, ln(cos(x(y + z))))$.

5. Calcule a inversa das seguintes funções se existir

(a) $\overrightarrow{f}(x, y) = (3x, 4y)$.

(b) $\overrightarrow{f}(x, y) = (x, 5y)$.

(c) $\overrightarrow{f}(x, y, z) = (x, y^3, z^5))$.

(d) $\overrightarrow{f}(x, y, z) = (y, z, x)$.

6. (a) Verifique as hipotese do teorema da função implicita no ponto $(1, 1)$ para $ln(xy) + cos(\pi x)y + 1 = 0$

(b) Dada a equação $x^3 + yx - xe^y = 0$. Podemos definir $y = f(x)$ entorno de $(0, 0)$, de $(0, 1))$ e de $(1, 0)$

(c) Verifique que a equação $y^3 + yx - x^3 - 3 = 0$ define implicitamente uma função $y = g(x)$ tal que $g(1) = 1$. Calcule $g'(1)$.

(d) Verifique que a equação $sen^2(x) + sen^2(y) + sen^2(z) = \frac{5}{2}$ define implicitamente uma função $z = g(x, y)$ tal que $g(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{4}$. Calcule $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

(e) Enuncie o teorema da função implicita. As funções podem ser definida implicitamente globalmente?

7. Caclue o divergente e o rotacional dos seguintes campos vetoriais:

(a) $\overrightarrow{f}(x, y) = (x^2 - xy, e^x e^y)$.

(b) $\overrightarrow{f}(x, y) = (x - 1, cos(xy))$.

(c) $\overrightarrow{f}(x, y) = (e^{x-y}, e^{x+y})$.

(d) $\overrightarrow{f}(x, y, z) = (\frac{x^2+z}{z-2}, z^2 + x + y, z^2x + zy^2)$.

(e) $\overrightarrow{f}(x,y,z) = (\frac{x^2-y^2}{z^2.y^2}, zcos(x) + y^2, z^2sen(yx))$.

(f) $\overrightarrow{f}(x,y,z) = (\frac{cos(x^2.y^2)}{z+1}, e^{zxy}, ln(cos(x(y+z))))$.

8. Determine se o seguintes campos são conservativos em algun dominio. Se for de sua função potencial:

   (a) $\overrightarrow{f}(x,y) = (x^2, xe^y)$.

   (b) $\overrightarrow{f}(x,y) = (x-1, sen(xy))$.

   (c) $\overrightarrow{f}(x,y) = (e^{x-y}, e^{x+y})$.

   (d) $\overrightarrow{f}(x,y,z) = (\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}})$.

   (e) $\overrightarrow{f}(x,y,z) = (ye^z, xe^z, xye^z)$.

   (f) $\overrightarrow{f}(x,y,z) = (e^x, 2e^y, 3e^z)$.