Capítulo 1

Sequências e Séries

1.1 Exercícios

1.1 Encontre uma fórmula para o termo geral da sequência $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ assumindo que o padrão dos primeiros termos continua.

(a) $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \cdots\}$.

(b) $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \cdots\}$.

(c) $\{2, 7, 12, 17, \cdots\}$.

(d) $\{-\frac{1}{4}, \frac{2}{9}, -\frac{3}{16}, \frac{4}{25}, \cdots\}$.

(e) $\{1, -\frac{2}{3}, \frac{4}{9}, -\frac{8}{27}, \cdots\}$.

(f) $\{5, 1, 5, 1, \cdots\}$.

1.2 Determine se a sequência converge ou diverge. Se ela convergir, encontre o limite.

(a) $a_n = n(n-1)$.

(b) $a_n = \frac{n+1}{3n-1}$.

(c) $a_n = \frac{3+5n^2}{n+n^2}$.

(d) $a_n = \frac{\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}}$.

(e) $a_n = \frac{2^n}{3^{n+1}}$.

(f) $a_n = \frac{n}{1+\sqrt{n}}$.

(g) $a_n = \frac{(-1)^{n+1}n}{1+n^2}$.

(h) $a_n = \frac{(-1)^n n^3}{n^2+2n+1}$.

(i) $a_n = \cos(n/2)$.

(j) $a_n = \cos(2/n)$.

(k) $a_n = \frac{(2n-1)!}{(2n+1)!}$.

(l) $a_n = \arctan(2n)$.

(m) $a_n = \frac{e^n+e^{-n}}{e^{2n}-1}$.

(n) $a_n = \frac{\ln(n)}{\ln(2n)}$.

(o) $a_n = n^2 e^{-n}$.

(p) $a_n = n\cos(\pi n)$.

(q) $a_n = \frac{\cos^2(n)}{2^n}$.

(r) $a_n = \ln(n+1) - \ln(n)$.

(s) $a_n = n\,\mathrm{sen}(1/n)$.

(t) $a_n = \sqrt{n} - \sqrt{n^2-1}$.

(u) $a_n = (1+\frac{2}{n})^{1/n}$.

(v) $a_n = \frac{\mathrm{sen}(2n)}{1+\sqrt{n}}$.

(w) $a_n = \frac{n!}{2^n}$.

(x) $a_n = \frac{(-3)^n}{n!}$.

1.3 Prove que $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$.

1.4 Determine o valor da constante c tal que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{53^k}{(1+c)^k} = 10$.

1.5 Determine o valor de $\sum_{k=1}^{\infty} e^n \pi^{-n}$.

1.6 Prove que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ diverge.

1.7 Determine os valores de $p \in \mathbb{R}$ para os quais $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ converge.

1.8 Estude a convergência da série $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ nos seguintes casos:

(a) $a_n = \frac{\operatorname{sen}(2n)}{4^n}$.

(b) $a_n = \frac{4n}{(2n^2+3)^2}$.

(c) $a_n = \frac{(-1)^n}{\ln(n)}$.

(d) $a_n = \frac{\cos(n)}{n^2}$.

(e) $a_n = \frac{n^2+2n+1}{3^n+2}$.

(f) $a_n = \frac{n!}{\sqrt{n!}}$.

(g) $a_n = \frac{n}{2^n}$.

(h) $a_n = \frac{7^{n+2}}{n6^n}$.

(i) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+\sqrt{n+1}}}$.

(j) $a_n = \frac{n3^n}{n+2}$.

(k) $a_n = \frac{2^n\sqrt{n}}{n!}$.

(l) $a_n = n^{-1}e^{-1/n}$.

(m) $a_n = \frac{n}{n+1}\sqrt{\frac{\ln n}{n}}$.

(n) $a_n = (-1)^{n+1}\frac{n^2}{n^3+1}$.

(o) $a_n = \frac{\ln n}{n^{7/6}}$.

(p) $a_n = \frac{2n(\ln n)^n}{\sqrt{n^4+4}}$.

(q) $a_n = \frac{2n^2+3n}{5+n^5}$.

(r) $a_n = \frac{(2n)!}{2^n n!}$.

(s) $a_n = \frac{n^2+3}{n^2(n+1)^2}$.

(t) $a_n = \frac{2^n+6^n}{3^n+3^{2n}}$.

(u) $a_n = \frac{(-1)^{n+1}\sqrt{n}}{n+1}$.

(v) $a_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

(w) $a_n = \frac{(-1)^n}{n\ln n-1}$.

(x) $a_n = \frac{n-1}{n4^n}$.

Capítulo 2

Transformada de Laplace

Dada a função $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ denotamos por $F(s)$ (ou $\mathcal{L}\{f(t)\}$) a transformada de Laplace definida pela integral

$$F(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt,$$

para todo s onde a integral existir. Lembre das seguintes transformadas que foram calculadas em aula.

Tabela de Transformadas de Laplace	
$f(t)$	$\mathcal{L}(f)$
e^{at}	$\dfrac{1}{s-a}, \quad s > a.$
t^n para $n = 0, 1, \ldots$	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0.$
$\sin at \ , \ \cos at$	$\dfrac{a}{s^2+a^2} \ , \ \dfrac{s}{s^2+a^2}, \quad s > 0.$
$\sinh at \ , \ \cosh at$	$\dfrac{a}{s^2-a^2} \ , \ \dfrac{s}{s^2-a^2}, \quad s > \lvert a \rvert.$
$\mathfrak{U}(t-a)$	$\dfrac{e^{-as}}{s}, \quad s > 0.$
$\delta(t-a)$	$e^{-as}.$

Por outra parte, o produto de convolução (o simplesmente, convolução) entre duas funções $f, g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ é definido como

$$(f * g)(t) \ = \ \int_0^t f(t-\tau) g(\tau) d\tau.$$

O produto de convolução é comutativo, associativo e distributivo. Além disso, tem como elemento neutro a "função" delta de Dirac (isto é, $(f * \delta)(t) = f(t)$).

Lembre das seguintes propriedades estudadas em aula.

(i) $\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\} = aF(s) + bG(s)$.

(ii) $\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a} F(\frac{s}{a})$.

(iii) $\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$.

(iv) $\mathcal{L}\{\int_0^t f(u) du\} = \frac{F(s)}{s}$.

(v) $\mathcal{L}\{tf(t)\} = -F'(s)$.

(vi) $\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)$.

(vii) $\mathcal{L}\{\mathcal{U}(t-a)f(t-a)\} = e^{-as}F(s)$.

(viii) $\mathcal{L}\{(f*g)(t)\} = F(s)G(s)$.

(ix) $\mathcal{L}\{f(t)/t\} = \int_s^\infty F(u)du$, se $\lim_{t\to 0} f(t)/t$ existir.

(x) $\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1-e^{-sT}} \int_0^T e^{-st}f(t)dt$ para f de período $T > 0$.

(xi) $\mathcal{L}\{\delta(t-a)\} = e^{-as}$.

Note que cada transformada calculada e propriedade enunciada acima, corresponde ao cálculo de uma transformada inversa ou a uma propriedade da tranformada inversa de Laplace. Por exemplo,

$$\mathcal{L}^{-1}\Big\{\frac{a}{s^2+a^2}\Big\} = \operatorname{sen} at \quad \text{e} \quad \mathcal{L}^{-1}\{F(s)/s\} = \int_0^t f(u)du.$$

2.1 Exercícios

2.1 Usando a definição de transformada de Laplace, calcule $\mathcal{L}\{t^{-1/2}\}$. Dica: Use que $\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

2.2 Determine as transformadas de Laplace das seguintes funções:

(a) $f(t) = e^{3t}\cos(2t)$.

(b) $f(t) = \cos^2(at),\ a \in \mathbb{R}$.

(c) $f(t) = \operatorname{sen}(5t)\cos(2t)$.

(d) $f(t) = t^2 \operatorname{sen} t$.

(e) $f(t) = t^3 e^{-t}$.

(f) $f(t) = te^{at}\cos(bt),\ a, b \in \mathbb{R}$.

2.3 Determine a transformada de Laplace de $f(t) = t^{5/2}$. Dica: use o exercicio 2.1.

2.4 Determine a transformada de Laplace das seguintes funções:

(a) $f(t) = \frac{\operatorname{sen} t}{t}$.

(b) $f(t) = \frac{\cos(at)-1}{t}$.

(c) $f(t) = \frac{e^{at}-e^{-at}}{t}$.

2.5 Ache a transformada de Laplace das seguintes funções periódicas definidas em $[0, \infty)$:

(a) $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } \ 2k \le t < 2k+1,\ k \in \mathbb{N}, \\ -1 & \text{se } \ 2k+1 \le t < 2(k+1),\ k \in \mathbb{N}. \end{cases}$

(b) $f(t) = \begin{cases} t-2k & \text{se } \ 2k \le t < 2k+1,\ k \in \mathbb{N}, \\ t-(2k+1) & \text{se } \ 2k+1 \le t < 2(k+1),\ k \in \mathbb{N}. \end{cases}$

2.6 Calcule a transformada inversa de Laplace para as seguintes funções:

(a) $F(s) = (s-2)^{-2}$.

(b) $F(s) = \frac{7}{(s-1)^3} + \frac{1}{(s+1)^2-4}$.

(c) $F(s) = \frac{s}{(s+1)^2(s^2+1)}$.

(d) $F(s) = \frac{e^{-\pi s}}{s^2+16}$.

(e) $F(s) = \arctan(4/s)$.

(f) $F(s) = \frac{1}{(s^2+1)^2}$.

2.7 Usando a transformada de Laplace, determine a solução geral das seguintes equações em $[0, \infty)$:

(a) $y' + 2y = e^t$.

(b) $y'' + 4y' + 3y = 0$.

2.8 Use a transformada de Laplace para resolver os seguintes problemas de valor inicial em $[0, \infty)$.

(a) $\begin{cases} y'' + 4y' + 4y = e^{-t}, \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1. \end{cases}$

(b) $\begin{cases} y'' + 4y' + 3y = 0, \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1. \end{cases}$

(c) $\begin{cases} y'' + 6y' - 7y = 0, \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0. \end{cases}$

(d) $\begin{cases} y'' - y' - 2y = t, \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0. \end{cases}$

(e) $\begin{cases} y^{(iv)} - k^4 y = 0, \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = 0,\ y'''(0) = 0. \end{cases}$

(f) $\begin{cases} y'' - 2y' + 5y = 0, \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1. \end{cases}$

(g) $\begin{cases} y'' - 9y' = 5e^{-2t}, \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 2. \end{cases}$

(h) $\begin{cases} y'' - 5y' + 6y = 3e^{3t}, \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0. \end{cases}$

(i) $\begin{cases} y'' + 4y = 9t, \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 7. \end{cases}$

(j) $\begin{cases} y'' + y = \cos t, \\ y(0) = 0,\ y'(0) = -1. \end{cases}$

(k) $\begin{cases} y''' - 4y' = \operatorname{senh} t, \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = 0. \end{cases}$

(l) $\begin{cases} y''' + y' - 2y = 5e^{-t}\operatorname{sen}(2t), \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0. \end{cases}$

2.9 Determine a solução dos seguintes problemas de valor inicial onde se aplica uma força exterior dada pela função $g(t)$:

(a) $\begin{cases} y'' + 4y = g(t), \\ y(0) = 3,\ y'(0) = -2, \end{cases}$

$$g(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } \ 0 \le t < 4, \\ 0 & \text{se } \ t \ge 4. \end{cases}$$

(b) $\begin{cases} y'' + y = g(t), \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0, \end{cases}$

$$g(t) = \begin{cases} 2 & \text{se } \ 0 \le t < 3, \\ 3t - 7 & \text{se } \ t \ge 3, \end{cases}$$

(c) $\begin{cases} y'' + 2y' + y = g(t), \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1. \end{cases}$

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } \ 0 \le t < 3, \\ 2(t-3) & \text{se } \ t \ge 3, \end{cases}$$

(d) $\begin{cases} y'' + y = g(t), \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1, \end{cases}$

$$g(t) = \delta(t - 2\pi).$$

(e) $\begin{cases} y'' + 4y' + 13y = g(t), \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0, \end{cases}$

$$g(t) = \delta(t - \pi) + \delta(t - 3\pi).$$

(f) $\begin{cases} y'' + 2y' + 2y = g(t), \\ y(0) = 1,\ y'(0) = -1, \end{cases}$

$$g(t) = \delta(t - 3\pi)\cos t.$$

2.10 Determine a solução das seguintes equações integro-diferencias com valor inicial:

(a) $\begin{cases} y'(t) + 2y(t) + \int_0^t y(u)du \ = \ \operatorname{sen} t, \\ y(0) = 1. \end{cases}$

(b) $\begin{cases} y'(t) \ = \ \operatorname{sen} t + \int_0^t y(t-u)\cos u\, du, \\ y(0) = 0. \end{cases}$

2.11 Use o produto de convolução para achar as transformadas inversas de Laplace das seguintes funções:

(a) $F(s) = \frac{s}{(s+1)(s^2+4)}$.

(b) $F(s) = \frac{1}{(s+1)^2(s^2+4)}$.

2.12 Exprima a solução dos seguintes problemas de valor inicial em termos do produto de convolução.

(a) $\begin{cases} y'' + 2y' + 2y = \operatorname{sen}(\alpha t), \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1. \end{cases}$

(b) $\begin{cases} y'' + y' + \frac{5}{4}y = 1 - \mathcal{U}(t-\pi), \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 1. \end{cases}$

(c) $\begin{cases} y'' + 3y' + 2y = \cos(\alpha t), \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0. \end{cases}$

Capítulo 3

Sistemas de Equações Lineares

3.1 Exercicios

3.1 Encontre a solução geral dos seguintes sistemas de equações diferenciais:

(a) $X'(t) = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} X(t)$

(b) $X'(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} X(t)$

(c) $X'(t) = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} X(t)$

(d) $X'(t) = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 8 & -6 \end{bmatrix} X(t)$

(e) $X'(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} X(t)$

(f) $X'(t) = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix} X(t)$

(g) $X'(t) = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} X(t)$

(h) $X'(t) = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} X(t)$

(i) $X'(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} X(t)$

(j) $X'(t) = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix} X(t)$

3.2 Resolva os seguinte problemas de valor inicial:

(a) $X'(t) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} X(t) \ ; \ X(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$

(b) $X'(t) = \begin{bmatrix} 2 & 3/2 \\ -3/2 & -1 \end{bmatrix} X(t) \ ; \ X(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$

(c) $X'(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 2 \end{bmatrix} X(t) \ ; \ X(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -30 \end{pmatrix}.$

(d) $X'(t) = \begin{bmatrix} -5/2 & 1 & 1 \\ 1 & -5/2 & 1 \\ 1 & 1 & -5/2 \end{bmatrix} X(t) \ ; \ X(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$

Respostas

Soluções do Capítulo 1

1.1 (a) $a_n = \frac{1}{2^n}$ (c) $a_n = 5(n-1)+2$ (e) $a_n = (-2/3)^{n-1}$

(b) $a_n = \frac{1}{2n}$ (d) $a_n = \frac{(-1)^n}{(n+1)^2}$ (f) $a_n = 5\frac{1-(-1)^n}{2} + \frac{1-(-1)^{n+1}}{2}$

1.2 (a) Diverge.
(b) Converge a 1/3.
(c) Converge a 5.
(d) Converge a 1.
(e) Converge a 0.
(f) Diverge.
(g) Converge a 0.
(h) Diverge.
(i) Diverge.
(j) Converge a 1.
(k) Converge a 0.
(l) Converge a $\pi/2$.
(m) Converge a 0.
(n) Converge a 1.
(o) Converge a 0.
(p) Diverge.
(q) Converge a 0.
(r) Converge a 0.
(s) Converge a 1.
(t) Diverge.
(u) Converge a 1.
(v) Converge a 0.
(w) Diverge.
(x) Converge a 0.

1.4 $c = 7/2$.

1.5 $c = 7/2$.

1.6 Verifique que $\sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} \geq 1 + \frac{n}{2}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ ou use o critério da integral.

1.7 $p \in (1, \infty)$.

1.8 (f), (h), (i), (j), (l), (m), (p), (r), (v) divergem. Todas as outras convergem.

Soluções do Capítulo 2

2.1 $\mathcal{L}\{t^{-1/2}\} = \sqrt{\frac{\pi}{s}}, \quad s > 0.$

2.2 (a) $F(s) = \frac{s-3}{(s-3)^2+4}, \quad s > 3.$

(b) $F(s) = \frac{1}{s} - \frac{2a^2}{s(s^2+4a^2)}, \quad s > 0.$

(c) $F(s) = \frac{1}{2}\left(\frac{7}{s^2+49} + \frac{3}{s^2+9}\right), \quad s > 0.$

(d) $F(s) = \frac{6s^2-2}{(s^2+1)^3}, \quad s > 0.$

(e) $F(s) = \frac{6}{(s+1)^4}, \quad s > -1.$

(f) $F(s) = \frac{(s-a)^2-b^2}{[(s-a)^2+b^2]}, \quad s > a.$

2.3 $F(s) = \frac{15}{8}\sqrt{\pi}\frac{1}{s^3\sqrt{s}}, \quad s > 0.$

2.5 (a) $\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1-e^{-s}}{s(1+e^{-s})}, \quad s > 0.$

(b) $\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1-(1+s)e^{-s}}{s^2(1-e^{-s})}, \quad s > 0.$

2.4 (a) $F(s) = \frac{\pi}{2} - \arctan s, \quad s > 0.$

(b) $F(s) = -\ln \frac{\sqrt{s^2+a^2}}{s}, \quad s > 0.$

(c) $F(s) = \ln \left|\frac{s+a}{s-a}\right|, \; s > |a|.$

2.6 (a) $f(t) = te^{2t}.$

(b) $f(t) = \frac{7}{2}t^2e^t + \frac{1}{2}e^{-t}\operatorname{senh}(2t).$

(c) $f(t) = -\frac{1}{2}te^{-t} + \frac{1}{2}\operatorname{sen} t.$

(d) $f(t) = \begin{cases} 0, & t < \pi, \\ \frac{1}{4}\operatorname{sen}(4t), & t \geq \pi. \end{cases}$

(e) $f(t) = \frac{1}{t}\operatorname{sen}(4t).$

(f) $f(t) = \frac{1}{2}\operatorname{sen} t - \frac{1}{2}t\cos t.$

2.7 (a) $y(t) = c_1e^{-2t} + \frac{1}{3}e^t.$

(b) $y(t) = c_1e^{-3t} + c_2e^{-t}.$

2.8 (a) $y(t) = e^{-t} - e^{-2t}.$

(b) $y(t) = \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t}.$

(c) $y(t) = \frac{7}{6} - \frac{1}{6}\cos(\sqrt{6}t).$

(d) $y(t) = \frac{1}{4} - \frac{t}{2} - \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{12}e^{2t}.$

(e) $y(t) = \frac{1}{4}e^{kt} + \frac{1}{4}e^{-kt} + \frac{1}{2}\cos(kt).$

(f) $y(t) = \frac{1}{2}e^t\operatorname{sen}(2t).$

(g) $y(t) = \frac{1}{2} + \frac{3}{11}e^{9t} + \frac{5}{22}e^{-2t}.$

(h) $y(t) = 3te^{3t} - 3e^{3t} + 3e^{2t}.$

(i) $y(t) = \frac{9}{4}t + \frac{19}{8}\operatorname{sen}(2t).$

(j) $y(t) = -\operatorname{sen} t + \frac{1}{2}t\operatorname{sen} t.$

(k) $y(t) = \frac{1}{4} - \frac{1}{3}\cosh t + \frac{1}{12}\cosh(2t).$

(l) $y(t) = \frac{13}{12}e^t - \frac{1}{3}e^{-2t} + \frac{1}{4}e^{-t}\cos(2t) - \frac{3}{4}e^{-t}\operatorname{sen}(2t).$

2.9 (a) $y(t) = \frac{1}{4} + \frac{11}{4}\cos(2t) - \sin(2t) + \frac{1}{4}[\cos(2(t-4)) - 1]\,\mathcal{U}(t-4).$

(b) $y(t) = \begin{cases} 2(1-\cos t), & \text{se} \;\; 0 \leq t < 3, \\ 3t - 7 - 2\cos t - 3\operatorname{sen}(t-3), & \text{se} \;\; t \geq 3, \end{cases}$

(c) $y(t) = te^{-t} + 2[(t-5) + e^{3-t}(t-1)]\,\mathcal{U}(t-3).$

(d) $y(t) = \operatorname{sen}(t)[1 + \mathcal{U}(t-2\pi)].$

(e) $y(t) = e^{-2t}\cos(3t) + \frac{2}{3}e^{-2t}\operatorname{sen}(3t) + \frac{1}{3}e^{-2(t-\pi)}\operatorname{sen}(3(t-\pi))\,\mathcal{U}(t-\pi) + \frac{1}{3}e^{-2(t-3\pi)}\operatorname{sen}(3(t-3\pi))\,\mathcal{U}(t-3\pi).$

(f) $y(t) = e^{3\pi-t}\operatorname{sen} t\,\mathcal{U}(t-3\pi) + e^{-t}\cos(t).$

2.10 (a) $y(t) = -\frac{3}{2}te^{-t} + e^{-t} + \frac{1}{2}\operatorname{sen} t.$

(b) $y(t) = \frac{1}{2}t^2.$

2.11 (a) $f(t) = \int_0^t e^{-(t-\tau)}\cos(2\tau)d\tau.$

(b) $f(t) = \frac{1}{2}\int_0^t (t-\tau)e^{-(t-\tau)}\operatorname{sen}(2\tau)d\tau.$

2.12 (a) $y(t) = \int_0^t e^{-(t-\tau)}\operatorname{sen}(t-\tau)\operatorname{sen}(\alpha\tau)d\tau.$

(b) $y(t) = e^{-t/2}\cos t - \frac{1}{2}e^{-t/2}\operatorname{sen} t + \int_0^t e^{-(t-\tau)/2}\operatorname{sen}(t-\tau)[1 - \mathcal{U}(\tau-\pi)]d\tau.$

(c) $y(t) = 2e^{-t} - e^{-2t} + \int_0^t [e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)}]\cos(\alpha\tau)d\tau.$