



Universidade Federal Fluminense
EGM - Instituto de Matemática
GMA - Departamento de Matemática Aplicada

LISTA 9 - 2011-2
EDO's de primeira ordem:
linear e homogênea
Trajetórias ortogonais
Algumas aplicações de EDO

Nos exercícios 1 a 8 algumas das equações são lineares de primeira ordem. Identifique-as e ache sua solução geral.

1. $(1+x)ydx + xdy = 0$
2. $(x^2 + y^2)dx - 2xydy = 0$
3. $\frac{dy}{dx} - y \tan(x) = \sin(x)$
4. $(2y - x^4)dx + xdy = 0$
5. $y^2dx - (2xy + 3)dy = 0$
6. $y' + \frac{y}{\sin(x)} - y^2 = 0$
7. $x^3y' + 4x^2y + e^x = 0$
8. $\frac{dr}{d\theta} + 2r \cos(2\theta) = \sin(4\theta)$

Nos exercícios 9 e 10 resolva o problema de valor inicial.

9. $y' - xy = (1 - x^2)e^{\frac{1}{2}x^2}$, $y(0) = 0$
10. $(y - 1)x' - 3x = (y - 1)^5$, $x(-1) = 16$
11. Mostre que a equação $\cos(y)y' + 2x \sin(y) = -2x$ pode ser transformada numa equação linear e resolva o PVI com $y(0) = 0$. (sugestão: $z = \sin(y)$)

Nos exercícios 12 a 17 verifique quais equações são homogêneas e resolva-as.

12. $(5x - y)dx + 3xdy = 0$
13. $(x^2 + y^2)dx - 2xydy = 0$
14. $(xy + 1)dx + y^2dy = 0$
15. $xy' + y = 3$
16. $e^{\frac{y}{x}} + y' - \frac{y}{x} = 0$
17. $y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$

18. Considere a equação da forma $\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{ax + by + c}{Ax + By + C}\right)$, onde a, b, c, A, B, C são constantes reais.

Verifique que:

- (a) quando $aB - Ab \neq 0$, pode-se reduzir essa equação em uma equação homogênea nas variáveis z e w se $z = x - h$ e $w = y - k$, onde h e k são as soluções do sistema linear $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ Ax + By + C = 0 \end{cases}$
- (b) quando $aB - Ab = 0$ e a e b não simultaneamente nulos, pode-se reduzir essa equação em uma equação de variáveis separáveis nas variáveis x e z , se fizermos a substituição $z = ax + by$.
- (c) quando $aB - Ab = 0$ e A e B não simultaneamente nulos, pode-se reduzir essa equação em uma equação de variáveis separáveis nas variáveis x e z , se fizermos a substituição $z = Ax + By$.

Nos exercícios 19 a 21 use o método desenvolvido acima, para determinar a solução geral das equações.

19. $y' = \frac{x + y + 4}{x - y - 6}$
20. $y' = \frac{x + y + 4}{x + y - 6}$
21. $y' = \frac{y}{x - y - 1}$

22. Resolva o PVI $y' = \frac{2x + y - 4}{x - y + 1}$, $y(2) = 2$.

23. Encontre a família de curvas ortogonais à família de parábolas $y = cx^2$.

24. Encontre a família de curvas ortogonais à família de elipses $x^2 + 4y^2 = c$, $x > 0$, $y > 0$.

25. Encontre a família de curvas ortogonais à família de hipérbolas $xy = c$, $c \neq 0$.
26. Encontre a família de curvas ortogonais à família de círculos que contém os pontos $(1, 0)$ e $(-1, 0)$.
27. Suponha que a taxa de desintegração de uma substância radioativa é proporcional à quantidade de substância existente em cada instante de tempo.
 Numa amostra de uma certa substância quando decorridos 1200 anos há uma perda de 36% dessa substância.
- Escreva a equação diferencial que descreve o processo de desintegração.
 - Determine a constante de desintegração dessa substância.
 - Determine a quantidade da amostra que desaparece em 600 anos.
 - Em quantos anos haverá apenas $1/50$ da quantidade original da amostra?
 - Lembre que a *meia vida* de uma substância radioativa é o tempo em que uma amostra da substância se desintegra à metade da quantidade original. Determine a meia vida dessa substância.
28. Resolva a equação $L \frac{dI}{dt} + RI = E \sin(wt)$ onde L, R, E e w são constantes e I é uma função de t . (Esta função dá a corrente em um circuito de resistência R e indutância L impulsionada por um gerador de corrente alternada de frequência $\frac{w}{2\pi}$ e voltagem máxima E).

RESPOSTAS DA LISTA 9 (Com indicação ou resumo de algumas resoluções)

- $y(x) = \frac{C}{x} e^{-x}$
- Não é linear
- $y(x) = \frac{1}{2} \sec x (\sin^2(x) + C)$
- $y(x) = \frac{x^4}{6} + \frac{C}{x^2}$
- $x(y) = -\frac{1}{y} + Cy^2$
- Não é linear
- $y(x) = \frac{1}{x^4} (e^x - xe^x + C)$
- $r(\theta) = -1 + \sin(2\theta) + Ce^{-\sin(2\theta)}$
- $y(x) = e^{\frac{x^2}{2}} \left(x - \frac{1}{3}x^3 \right)$, $x \in \mathbb{R}$
- $x(y) = \left(\frac{y^2}{2} - y - \frac{7}{2} \right) (y - 1)^3$, $y < 1$
- $y(x) = \arcsen(e^{-x^2} - 1)$, $x \in \mathbb{R}$
- $-\frac{5}{2}x + Cx^{\frac{1}{3}}$
- $y = y(x)$ implícita em $y^2 = x^2 + Cx$
- Não é homogênea
- Não é homogênea
- $y(x) = -x \ln(\ln(C|x|))$
- $y = y(x)$ implícita em $y^2 = 2x^2 \ln(C|x|)$

18. (a) Temos que $w = w(y) = y - k$ e $y = y(x)$, logo $w = w(y) \Rightarrow w = w(y(x))$.

Mas $z = x - h$ ou $x = x(z) = z + h$. Logo $w = w(y(x(z)))$.

Aplicando a regra da cadeia duas vezes obtemos: $\frac{dw}{dz} = \frac{dw}{dy} \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dz}$

Observando que $\frac{dw}{dy} = 1$ e $\frac{dx}{dz} = 1$, concluímos que $\frac{dw}{dz} = \frac{dy}{dx}$.

Agora, substituindo x , y e $\frac{dy}{dx}$ na equação original, obtemos

$$\frac{dw}{dz} = F \left(\frac{a(z+h) + b(w+k) + c}{A(z+h) + B(w+k) + C} \right) = F \left(\frac{az + bw + (ah + bw + c)}{Az + Bw + (Ah + Bk + C)} \right)$$

Supondo que $aB - Ab \neq 0$, o sistema $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ Ax + By + C = 0 \end{cases}$ tem solução. Se $x = h$ e $y = k$ é a solução desse sistema, encontramos

$\frac{dw}{dz} = F \left(\frac{az + bwk + 0}{Az + Bwk + 0} \right)$ que é uma equação homogênea nas variáveis z e w .

(b) Supondo que $aB = Ab$, a e b não são simultaneamente nulos, faz-se a substituição $z = ax + by$.

$$\text{Podemos escrever } \frac{dy}{dx} = F\left(\frac{ax + by + c}{Ax + By + C}\right) =$$

$$F\left(\frac{b(ax + by + c)}{bAx + bBy + bC}\right) = F\left(\frac{b(ax + by + c)}{aBx + bBy + bC}\right) = F\left(\frac{b(ax + by + c)}{B(ax + by) + bC}\right) = F\left(\frac{b(z + c)}{Bz + bC}\right)$$

Temos ainda que $\frac{dz}{dx} = a + b\frac{dy}{dx}$. Substituindo $\frac{dy}{dx}$ encontrado acima nesta última equação, obtemos

$$\frac{dz}{dx} = a + bF\left(\frac{b(z + c)}{Bz + bC}\right) \quad \text{que é uma equação de variáveis separáveis nas variáveis } z \text{ e } x.$$

(c) Análogo ao item anterior.

$$19. \arctan \frac{y+5}{x-1} = \frac{1}{2} \ln C ((x-1)^2 + (y+5)^2)$$

$$20. y - x - 5 \ln |x + y - 1| = C$$

$$21. y \text{ implícita em } y \ln(Cy) = 1 - x$$

$$22. \sqrt{2} \arctan \left(1 + \frac{(y-2)^2}{2(x-1)^2} \right) = \ln \left(\frac{e^{\frac{\pi\sqrt{2}}{4}}}{2} [(x-1)^2 + (y-2)^2] \right), \quad x > 1$$

$$23. x^2 + 2y^2 = C$$

$$24. y = Cx^4$$

$$25. x^2 - y^2 = C$$

$$26. (x - C)^2 + y^2 = C^2 - 1$$

27. Suponha que $q(t)$ é a quantidade de substância quando decorridos t anos e q_0 a quantidade da substância no início de um período de t anos, isto é, $q_0 = q(0)$.

(a) $\frac{dq(t)}{dt} = kq(t)$, onde k é uma constante de proporcionalidade.

(b) Resolvendo o PVI, encontra-se $Q(t) = q_0 e^{kt}$.

$$\text{Calculando, } q(1200) = q_0 e^{k \cdot 1200}. \text{ Por outro lado, é dado que } q(1200) = \frac{64}{100} q_0.$$

$$\text{Resolvendo a equação } q_0 e^{k \cdot 1200} = \frac{64}{100} q_0, \text{ encontra-se } k = \frac{1}{600} \ln \left(\frac{4}{5} \right).$$

(c) Substituindo o valor de k , encontra-se $q(t) = q_0 e^{\frac{1}{600} (\ln(\frac{4}{5})) t}$.

$$\text{Calculando, a perda em 600 anos é igual a } q(0) - q(600) = q_0 - q_0 e^{\frac{600}{600} (\ln(\frac{4}{5}))} = q_0 - \frac{4}{5} q_0 = \frac{1}{5} q_0.$$

Logo em 600 anos a perda é de 20%.

(d) $q(t) = q_0 e^{\frac{1}{600} (\ln(\frac{4}{5})) t} = \frac{1}{50} q_0$.

$$\text{Resolvendo a equação, encontramos } t = 600 \left(\frac{\ln 2 - \ln 25}{\ln 4 - \ln 5} \right) \cong 6.791, 31 \text{ anos.}$$

(e) $q(t) = q_0 e^{\frac{1}{600} (\ln(\frac{4}{5})) t} = \frac{1}{2} q_0$.

$$\text{Resolvendo a equação, encontramos } t = 600 \left(\frac{-\ln 2}{\ln 4 - \ln 5} \right) \cong 1.863, 77 \text{ anos.}$$

$$28. I = \frac{E(R \operatorname{sen} \omega t - \omega L \operatorname{cos} \omega t)}{R^2 + \omega^2 L^2} + C e^{-\frac{R}{L} t}$$