Lista de exercícios 1

Análise Funcional

Professor: Freddy Hernández

1. Seja (X, d) um espaço métrico e $A \subset X$. Então,

   (a) A função $\operatorname{dist}(\cdot, A) : X \to \mathbb{R}$ é Lipschitz-contínua.

   (b) As r-vizinhanças de A, $B_r(A) := \{x \in X : d(x, A) < r\}$, são conjuntos abertos.

   (c) Dados $r_1, r_2 > 0$, tem-se $B_{r_1}(B_{r_2}(A)) \subset B_{r_1+r_2}(A)$. Dê exemplos de métricas onde a igualdade seja verdadeira.

2. Seja $\psi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ uma função estritamente monôtona e contínuamente diferenciável, tal que $\psi(0) = 0$ e sua derivada ψ' é não crescente. Prove que se d é uma métrica em X, então $\psi \circ d$ também o será.

3. O produto Cartesiano $X \times Y$ de dois espaços métricos (X, d_X) e (Y, d_Y) pode ser dotado com estrutura métrica de muitas maneiras diferentes. Por exemplo, verifique que as seguintes são distâncias para $X \times Y$:

   (a) $d_1((x_1, y_1), (x_1, y_2)) := d_X(x_1, x_2) + d_Y(y_1, y_2)$.

   (b) $d_2((x_1, y_1), (x_1, y_2)) := (d_X^2(x_1, x_2) + d_Y^2(y_1, y_2))^{1/2}$.

   (c) $d_\infty((x_1, y_1), (x_1, y_2)) := \max\{d_X(x_1, x_2),\ d_Y(y_1, y_2)\}$.

4. Sejam $a < b$ números reais e I o intervalo fechado $[a, b]$. Defina,

$$B[a, b] := \{f : I \to \mathbb{R} : f \text{ é limitada}\} \quad e \quad d_\infty(f, g) := \sup_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|.$$

   Prove que $\big(B[a, b], d_\infty\big)$ é um espaço métrico não separável.

5. Prove que em um espaço métrico qualquer, se uma sequência de Cauchy tem uma subsequência convergente, então a propria sequência é convergente.

6. Sejam (x_n) e (y_n) sequências de Cauchy no espaço métrico (X, d). O que pode ser dito sobre a convergência da sequência (a_n) definida por $a_n := d(x_n, y_n)$?

7. Estude a completitude dos seguintes espaços métricos (X, d).

   (a) $X = \mathbb{Z}$ e $d(n, m) = |n - m|$.

   (b) $X = \mathbb{Z}$ e $d(n, m) = |\frac{1}{n} - \frac{1}{m}|$.

(c) $X = \mathbb{R}$ e $d(x,y) = |\arctan x - \arctan y|$.

(d) X é o conjunto das sequências de números reais com um número finito de elementos diferentes de zero e $d((x_n),(y_n)) = \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n - y_n|$.

8. Dois espaços topológicos são ditos **homeomorfos** se existe uma bijeção contínua com inversa contínua entre eles. Por outra parte, dois espaços métricos (X, d_X) e (Y, d_Y) são ditos **isométricos** se existe uma bijeção entre eles que preserva as métricas.

   (a) Mostre que se (X, d_X) e (Y, d_Y) são isométricos, então eles são homeomorfos.

   (b) Um espaço completo pode ser isométrico a um espaço incompleto?.

   (c) Um espaço completo pode ser homeomorfo a um espaço incompleto?.

9. Verifique as seguintes afirmações:

   (a) Se (X, d) é um espaço métrico, então $d : X \times X \to \mathbb{R}$ é uma função contínua.

   (b) Se $(X, \|\cdot\|)$ é um espaço vetorial normado, então a norma é contínua.

   (c) Se $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ é um espaço vetorial com produto interno, então o produto interno é contínuo.

   Obs: As afirmações (a) e (c) são com respeito da topologia produto.

10. Sejam $a < b$ números reais e I o intervalo fechado $[a, b]$. Defina,

$$P_n := \{\text{polinômios de grau menor o igual a } n\} \quad \text{e} \quad P = \cup_{n\in\mathbb{N}} P_n.$$

   Prove que $(P, \|\cdot\|_\infty)$ é um espaço vetorial normado que não é completo.

11. Prove ou encontre um contra-exemplo para as seguintes afirmações:

   (a) $c_0 := \{(x_i) : \lim_{i\to\infty} x_i = 0\} \subset \cup_{1<p<\infty} \ell^p$.

   (b) $\cap_{1<p<\infty} \ell^p \subset \ell^\infty$.

12. Seja E um espaço normado. Suponha que A seja um subconjunto compacto de E e que B seja um subconjunto fechado de E. Prove que

$$A + B = \{a + b : a \in A,\ b \in B\}$$

   é um subconjunto fechado de E.

13. Seja E um espaço normado.

   (a) Mostre que E tem dimensão finita se, e somente se, todos os funcionais lineares são contínuos.

   (b) Para cada funcional linear $\phi : E \to \mathbb{K}$, mostre que a aplicação

$$x \in E \to \|x\| + |\phi(x)| \in \mathbb{R}$$

   define uma norma em E.

(c) Suponha que quaisquer duas normas em E sejam equivalentes. Prove que E tem dimensão finita.

14. Seja um E espaço normado. Um **hiperplano** em E é um conjunto da forma $H = \{x \in E : \phi(x) = \alpha\}$, onde $\phi : E \to \mathbb{K}$ é um funcional linear não identicamente nulo e $\alpha \in \mathbb{K}$. Prove que as seguintes condições são equivalentes:

    (a) H é um conjunto fechado.

    (b) $\phi \in E'$.

    Em particular, conclua que $\phi \in E'$ se, e somente se, $\mathrm{Ker}(\phi)$ é um subconjunto fechado de E.

15. Sejam E um espaço vetorial e M um subespaço de E. Dizemos que $x \in E$ e $y \in E$ são equivalentes módulo M se $x - y \in M$. Nesse caso, escrevemos $x = y(\mathrm{mod} M)$.

    (a) Mostre que a relação estabelecida no enunciado é de equivalência. Assim, denotaremos por $[x]$ a classe de equivalência de cada elemento $x \in E$.

    (b) Considere o conjunto quociente de E módulo M, definido por $E/M = \{[x] : x \in E\}$. Mostre que as aplicações

    $$([x], [y]) \in E/M \times E/M \to [x + y] \in E/M$$

    e

    $$(\lambda, [x]) \in \mathbb{K} \times E/M \to [\lambda x] \in E/M$$

    estão bem definidas. Em seguida, prove que E/M é um espaço vetorial com estas operações.

    (c) Seja F um espaço vetorial e considere uma aplica¸ao linear $T : E \to F$. Mostre que existe uma bijeção linear entre $E/\mathrm{Ker}(T)$ e $\mathrm{Im}(T)$.

16. Sejam E um espaço normado e M um subespaço fechado de E. Para cada $X \in E/M$ ponhamos

    $$\|X\| = \inf\{\|x\| : x \in X\}.$$

    (a) Mostre que $[x] = x + M$ e que $\|[x]\| = d(x, M)$ para cada $x \in E$.

    (b) Mostre que a função definida no enunciado é uma norma em E/M.

    (c) Mostre que a sobrejeção canônica $x \in E \to [x] \in E/M$ é contínua e aberta.

    (d) Se E for completo, mostre que E/M também será.

17. Sejam E, F e G três espaços normados, e considere uma aplicaçao bilinear $b : E \times F \to G$. Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes:

    (a) b é contínua.

    (b) b é contínua em $(0, 0) \in E \times F$.

    (c) Existe $C > 0$ tal que $\|b(x, y)\| \leq C\|(x, y)\|$ para todo $(x, y) \in E \times F$.

18. Seja E um espaço normado e suponha que $x_1, \cdots, x_n \in E$ sejam linearmente independentes, onde $n \in \mathbb{N}$. Prove que existem $\phi_1, \cdots, \phi_n \in E'$ tais que $\phi_j(x_k) = \delta_{jk}$ para quaisquer $j, k \in \{1, \cdots, n\}$.

19. Seja E um espaço normado separável. Prove que E é isometricamente isomorfo a um subespaço próprio de ℓ_∞.

20. O **operador transposto** de $T \in \mathcal{L}(E, F)$ é a aplicação $T : F' \to E'$ que, a cada $\phi \in F'$, associa o funcional linear contínuo $T'(\phi)$ definido para cada $x \in E$ como

$$T(\phi)(x) := \phi(T(x)).$$

Prove que:

(a) $T' \in \mathcal{L}(F', E')$.

(b) $\|T'\| = \|T\|$.