Universidade Federal Fluminense
EGM - Instituto de Matemática
GMA - Departamento de Matemática Aplicada

LISTA 11 - 2011-2

EDO linear de ordem n:
PVI, existência e unicidade
Funções L. I. e Wronskiano
Conjunto fundamental de soluções
EDO linear de 2ª ordem: redução de ordem

Nos exercícios 1 a 4 determine o maior intervalo na vizinhança de x_0 onde se tem certeza que o PVI (problema de valor inicial) dado tem solução única.

1. $2y^{iv} - 3x^2y'' + 4xy = 3\,\mathrm{sen}\, x; \quad y(\pi) = 2\ ; \quad y'(\pi) = -1; \quad y''(\pi) = 0; \quad y'''(\pi) = 1$
2. $2y^{iv} - 3x^2y'' + 4xy = 3\ln x; \quad y(2) = -1\ ; \quad y'(2) = 0; \quad y''(2) = 0; \quad y'''(2) = 2$
3. $(x^2-4)y''' + (x-1)y' + 4xy = e^{2x}; \quad y(-1) = -1\ ; \quad y'(-1) = 1; \quad y''(-1) = 0$
4. $(x^2-4)y''' + (x-1)y' + 4xy = \dfrac{1}{x}; \quad y(-1) = -1\ ; \quad y'(-1) = 1; \quad y''(-1) = 0$

Nos exercícios 5 e 6 verificar que qualquer membro da família dada é uma solução da EDO linear no intervalo I. Encontrar, se possível, a única solução que satisfaz as condições iniciais dadas.

5. $x^2y'' - 20y = 0;$ família: $y = C_1x^5 + \dfrac{C_2}{x^4}$ em $I = (0, \infty)$
   condições iniciais: $y(1) = 4;\ y'(1) = 2$
6. $y''' - 2y'' + 2y' = \cos x + 2\,\mathrm{sen}\, x;$ família: $y = C_1 + e^x(C_2 \cos x + C_3\,\mathrm{sen}\, x) + \mathrm{sen}\, x$ em $I = \mathbb{R}$
   condições iniciais: $y(0) = 3,\ y'(0) = 6,\ y''(0) = 6$
7. Sabe-se que $y = C_1 + C_2x^2$, $x \in \mathbb{R}$ é uma família a dois parâmetros de soluções de $x^2y'' - y' = 0$.
   (a) Mostre que não existem constantes C_1 e C_2 para que um membro da família satisfaça as condições $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. Explique porque isso não constitui uma violação do Teorema da Existência e Unicidade para um PVI linear.
   (b) Encontre dois membros da família que satisfazem $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

Nos exercícios 8 a 13 verifique se o conjunto de funções dadas são linearmente independentes. Se forem linearmente dependentes determine a relação de dependência entre elas.

8. $2x-3,\ x^2+1,\ 2x^2-x$
9. $2x-3,\ 2x^2+1,\ 3x^2+x$
10. $2x-3,\ x^2+1,\ 2x^2-x,\ x^2+x+1$
11. $2x-3,\ x^3+1,\ 2x^2-x,\ x^2+x+1$
12. $e^x,\ e^{-x},\ \mathrm{senh}\, x$
13. $x,\ x\ln x,\ x^2\ln x, \quad x > 0$

14. Mostre que as funções $y = x$, $y = x^{-2}$, $y = x^{-2}\ln x$, $x > 0$ formam um conjunto fundamental (base) de soluções da EDO $x^3y''' + 6x^2y'' + 4xy' - 4y = 0$. Forme a solução geral.

Nos exercícios 15 a 18 encontre uma segunda solução da EDO linear de 2ª ordem, a partir da solução dada, isto é, use o método da redução de ordem para encontrar uma segunda solução.

15. $y'' - y = 0, \quad y_1 = \cosh x$
16. $x^2y'' - 7xy' + 16y = 0, \quad y_1 = x^4$
17. $(1+2x)y'' + 4xy' - 4y = 0, \quad y_1 = e^{-2x}$
18. $x^2y'' - 5xy' + 9y = 0, \quad y_1 = x^3\ln x$

Nos exercícios 19 e 20 resolva o PVI, se uma solução $y_1(x)$ da EDO é dada.

19. $y'' - 3(\tan x)y' = 0; \quad y_1(x) = 1; \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 6$
20. $x^2y'' - 4xy' + 6y = 0, \quad y_1(x) = x^2 + x^3, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 3$

RESPOSTAS DA LISTA 11 (Com indicação ou resumo de algumas resoluções)

1. $(-\infty, \infty)$
2. $(0, \infty)$
3. $(-2, 2)$
4. $(-2, 0)$

5. $x^2y'' - 20y = x^2\left(20C_1x^3 + 20C^2x^{-6}\right) - 20\left(C_1x^5 + C^2x^{-4}\right) = 20C_1x^5 + 20C_2x^{-4} - 20C_1x^5 - 20C_2x^{-4} = 0$
   $x_0 = 1 \in I = (0, \infty)$; única solução: $y = x^5 + 1/x^4$

6. Determinando as derivadas até a ordem 3 e simplificando, encontra-se
   $y' = e^x[(-C_2+C_3)\operatorname{sen} x + (C_3+C_2)\cos x] + \cos x \Longrightarrow 2y' = e^x[(-2C_2+2C_3)\operatorname{sen} x + (2C_3+2C_2)\cos x] + 2\cos x$
   $y'' = e^x[2C_3\cos x - 2C_2\operatorname{sen} x] - \operatorname{sen} x \quad \Longrightarrow \quad -2y'' = e^x[-4C_3\cos x + 4C_2\operatorname{sen} x] + 2\operatorname{sen} x$
   $y''' = e^x[(2C_3 - 2C_2)\cos x - (2C_2 + 2C_3)\operatorname{sen} x] - \cos x$
   Substituindo na EDO dada, $y''' - 2y'' + 2y' = e^x\left[(2C_3 - 2C_2 - 4C_3 + 2C_3 + 2C_2)\cos x\right] +$
   $+\ e^x\left[(-2C_2 - 2C_3 + 4C_2 - 2C_2 + 2C_3)\operatorname{sen} x\right] - \cos x + 2\operatorname{sen} x + 2\cos x = \cos x + 2\operatorname{sen} x$ c.q.d.
   Única solução: $y = 1 + e^x(2\cos x + 3\operatorname{sen} x) + \operatorname{sen} x$

7. (a) $y = C_1 + C_2x^2 \Longrightarrow y' = 2C_2x \Longrightarrow y'(0) = 0 \neq 1$. Neste caso a hipótese $a_2(x) = x^2 \neq 0$ do teorema da existência e unicidade não está satisfeita, logo não é possível garantir que existe solução que satisfaz o PVI.
   (b) $y = x^2$ e $y = -x^2$. Na verdade qualquer parábola $y = C_2x^2$ satisfaz o PVI.

8. São L. I. porque $W(2x-3, x^2+1, 2x^2-x) = -14 \neq 0$

9. São L. D. Relação de dependência: $(2x-3) + 3(2x^2+1) - 2(3x^2+x) = 0$

10. São L. D. Relação de dependência: $2(2x-3) + 13(x^3+1) - 3(2x^2-x) - 7(x^2+x+1)$

11. São L. I. porque $W(2x-3, x^3+1, 2x^2-x, x^2+x+1) = 156 \neq 0$

12. São L. D. Relação de dependência: $e^x - e^{-x} - 2\operatorname{senh} x = 0$

13. São L. I. porque $W(x, x\ln x, x^2\ln x) = 2x + x\ln x \neq 0, \forall x \neq e^{-2}$. Atenção: para ser L. I. basta o wronskiano ser não nulo em um dos pontos do intervalo.

14. Para ver que são soluções é preciso derivar cada função, substituir no lado esquerdo da EDO e verificar que se anula.
    São L. I. porque $W(x, x^{-2}, x^{-2}\ln x) = 9/x^6 \neq 0,\ \forall x > 0$.

15. $y_2 = \operatorname{senh} x$

16. $y_2 = x^4 \ln|x|$

17. $y_2 = x$

18. $y_2 = x^3$

19. Solução geral: $y = C_1 + C_2(\tan x \sec x + \ln|\sec x + \tan x|)$
    Solução do PVI: $y = 2 + 6(\tan x \sec x + \ln|\sec x + \tan x|)$

20. Solução geral: $y = C_1x^2 + C_2x^3$ Solução do PVI: $y = -3x^2 + 3x^3$