Lista de exercícios 2

Análise Funcional

Professor: Freddy Hernández

1. Dado $(X, \langle , \rangle)$ e.v. complexo, mostre a **identidade de polarização**, a saber

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\langle x, y\rangle &= \frac{1}{4}\Big(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\Big)\\ \mathrm{Im}\langle x, y\rangle &= \frac{1}{4}\Big(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2\Big).\end{aligned}$$

2. Seja $(X, \langle , \rangle)$ e.v. real. Mostre que

   (a) $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ implica $x \perp y$.

   (b) $\|x\| = \|y\|$ implica $x + y \perp x - y$.

   O que acontece se o espaço X for complexo?

3. Dado $(X, \langle , \rangle)$ e.v. complexo. Mostre que se $T \in B(X; X)$ é tal que $\langle Tx, x\rangle = 0$ para todo $x \in X$, então $T = 0$. O que acontece se o espaço X for real?

4. Prove que $(\ell^p, \|\|_p)$ para $p \neq 2$ e $(C([a, b]), \|\|_\infty)$ não são espaços com produto interno.

5. Sejam (x_n) uma sequência em $(X, \langle , \rangle)$ e $x \in X$ tal que $\|x_n\| \to \|x\|$ e $\langle x_n, x\rangle \to \langle x, x\rangle$. Prove que $x_n \to x$.

6. Prove que em um espaço com produto interno as seguintes afirmações são equivalentes:

   (a) $x \perp y$.

   (b) $\|x + \alpha y\| = \|x - \alpha y\|$ para todo $\alpha \in \mathbb{K}$.

   (c) $\|x + \alpha y\| \geq \|x\|$ para todo $\alpha \in \mathbb{K}$.

7. Seja H um espaço de Hilbert e $M \subset H$ convexo. Prove que se a sequência $(x_n) \subset M$ é tal que $\|x_n\| \to d(0, M)$, então (x_n) converge em H.

8. Mostre que um subespaço Y de um espaço de Hilbert H é fechado se e somente se $Y = Y^{\perp\perp}$.

9. Mostre que para todo M, subconjunto não vazio de um espaço de Hilbert H, $M^{\perp\perp}$ é o menor suespaço fechado que contem M.

10. Dê um exemplo de um elemento de ℓ^2 para o qual a desigualdade de Bessel seja estrita.

11. Mostre que toda série absolutamente convergente em um espaço de Hilbert é convergente.

12. Seja (e_i) uma sequência ortonormal em um espaço de Hilbert H. Suponha que $x = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i$ e $y = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i e_i$, onde as séries são absolutamente convergentes. Então, $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \bar{\beta}_i$.

13. Seja (e_i) uma sequência ortonormal em um espaço de Hilbert H e seja $M = \mathrm{span}(e_i)$. Mostre que $x \in \bar{M}$ se e somente se $x = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, \alpha_i\rangle e_i$.

14. Mostre que uma familia ortonormal $(e_i)_{i\in I}$ em um espaço de Hilbert H é total se e somente se $\langle x, y\rangle = \sum_i \langle x, e_i\rangle \overline{\langle y, e_i\rangle}$

15. Seja H um espaço de Hilbert e $M \subset H$. Mostre que M é total (i.e $\overline{\mathrm{span} M} = H$) se e somente se $\langle u, x\rangle = \langle v, x\rangle$ para todo $x \in M$ implica que $u = v$.

16. Mostre que a aplicação $z \to f_z(\cdot) := \langle \cdot, z\rangle$, considerada no teorema de representação de Riesz-Frechet, define uma bijeção isométrica que não é linear mas sim conjugada-linear, isto é, $\alpha z + \beta v \to \bar{\alpha} f_z + \bar{\beta} f_v$.

17. Mostre que o dual H' do espaço de Hilbert H é um espaço com produto interno com

$$\langle f_x, f_y\rangle := \langle y, x\rangle.$$

18. Mostre que todo espaço de Hilbert é topologicamente reflexivo.

19. Prove que toda forma sesquilinear semi-definida positiva (i.e $h(x, x) \geq 0$) é uma **forma Hermitiana** (i.e forma sesqui-linear tal que $h(x, y) = \overline{h(y, x)}$). Mais ainda, ela satisfaz a desigualdade de Cauchy-Schwarz.

$$|h(x, y)|^2 \leq h(x, x)h(y, y)$$