Lista de exercícios 3

Análise Funcional

Professor: Freddy Hernández

1. Prove que uma base de Hamel de um espaço de Banach de dimensão infinita não pode ser enumerável. **Dica:** Use o teorema de Baire.

2. Seja X um espaço vetorial complexo e denote por $X_{\mathbb{R}}$ o espaço vetorial real subjacente a E.

   (a) Prove que $f(x) := f_{\mathbb{R}}(x) - if_{\mathbb{R}}(ix)$, onde $f_{\mathbb{R}}$ é um funcional $\mathbb{R}$-linear, é um funcional $\mathbb{C}$-linear. Mas ainda, todo funcional $\mathbb{C}$-linear pode ser escrito desta forma.

   (b) Prove o Teorema de Hahn-Banach para espaços vetoriais complexos. Isto é, trocando positivamente homogêneo por $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ no enunciado da versão real.

3. Seja $X = \{u \in C([0,1] : \mathbb{R}) : u(0) = 0\}$ munido com a norma do máximo e considere o funcional linear $f(u) := \int_0^1 u(t)dt$. Mostre que $f \in X'$, calcule sua norma e veja se existe $u \in X$ tal que $\|u\|_X = 1$ e $f(u) = \|f\|_{X'}$.

4. Seja $X = (c_0, \|\cdot\|_\infty)$ e considere o funcional linear $f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} x_n$. Mostre que $f \in X'$, calcule sua norma e veja se existe $x \in X$ tal que $\|x\|_\infty = 1$ e $f(x) = \|f\|_{X'}$.

5. Seja X e.v.n real e $C \subset X$ aberto, convexo, limitado e simétrico (i.e. $C = -C$) tal que $0 \in C$. Mostre que o funcional de Minkowski $p_C(\cdot)$ é uma norma em X equivalente com a norma do espaço.

6. Considere em $X = (C([0,1] : \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ o conjunto $C = \{u \in X : \|u\|_2 < 1\}$. Mostre que o funcional de Minkowski $p_C(\cdot)$ é uma norma em X e veja se tal norma é equivalente com a norma do espaço.

7. Seja X e.v.n real e $C \subset X$ convexo tal que $0 \in C$. Defina

$$C^\star := \{f \in X' : f(x) \leq 1 \text{ para todo } x \in C\}$$
$$C^{\star\star} := \{x \in X : f(x) \leq 1 \text{ para todo } f \in C^\star\}.$$

   Prove que $C^{\star\star} = \overline{C}$.

8. Dado $X = \ell^1(\mathbb{R})$ (logo $X' = \ell^\infty(\mathbb{R})$) sabemos que c_0, o conjunto das sequências que convergem a zero, é um subespaço fechado de X'. Prove que ${c_0}^{\perp\perp} \neq c_0$.

9. Seja X e.v.n real e $M := [f = 0]$ para algum $f \in X' \setminus \{0\}$.

(a) Determine $M^\perp$.

(b) Prove que $\operatorname{dist}(x, M) = |f(x)|/\|f\|$ para todo $x \in X$.

(c) Considere o caso particular en que $X = \{u \in C([0,1] : \mathbb{R}) : u(0) = 0\}$ munido com a norma do máximo e considere o funcional linear $f(u) := \int_0^1 u(t)dt$. Veja que se $x \in X \setminus M$, então $\operatorname{dist}(x, M) \neq \|x - y\|_\infty$ para todo todo $y \in M$.

10. Sejam X e Y espaços de Banach e seja $T : X \to Y$ uma aplicação tal que para cada $f \in Y'$, tem-se $f \circ T \in X'$. Mostre que T é linear e contínua.

11. Sejam X e Y espaços de Banach e $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{B}(X, Y)$. Suponha que para cada $x \in X$ a sequência $\{T_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ tem um limite, que denotamos por $T(x)$. Prove que se $x_n \to x$ então $T_n(x_n) \to T(x)$.

12. Seja (a_n) uma sequência de números reais e fixe $1 \leq p \leq \infty$. Mostre que se $\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n x_n| < \infty$ para todo $(x_n) \in \ell^p$, então $(a_n) \in \ell^{p'}$, onde p' é o par conjugado de p.

13. Seja X espaço de Banach e $T : X \to X'$ um operador linear satisfazendo alguma das seguintes propriedades:

    (a) $\big(T(x), x\big)_{X'\times X} \geq 0$ para todo $x \in X$.

    (b) $\big(T(x), y\big)_{X'\times X} = \big(T(y), x\big)_{X'\times X}$ para todo $x, y \in X$.

    Prove que T é limitado.

14. Sejam $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ espaços de Banach e seja $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ tal que $T(X)$ é fechado e $\operatorname{Ker}(T)$ tem dimensão finita. Dennote por $|\cdot|$ uma outra norma em X mais fraca que $\|\cdot\|_X$. Prove que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|x\|_X \leq C\big(\|T(x)\|_Y + |x|\big) \quad \text{para todo} \quad x \in X.$$

15. Seja $X = (C([0,1], \|\cdot\|_\infty)$. Considere a aplicação linear $A : D(A) \subset X \to X$ definida por $A(u) = u' = \frac{du}{dt}$. Veja nos seguintes casos se o operador A é fechado.

    (a) $D(A) = C^1([0,1])$.

    (b) $D(A) = C^2([0,1])$.