Lista de exercícios 4

Análise Funcional

Professor: Freddy Hernández

En todos os exercicios suponha que X é um espaço de Banach, a menos que o contrário seja dito.

1. Prove que se a sequência (x_n) converge fracamente para x, então existe uma sequência de combinações convexas de elementos em $\{x_n\}$ que converge forte para x.

2. Sejam X e Y espaços de Banach e $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Mostre que $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ se e somente se $T : (X, \sigma(X, X')) \to (Y, \sigma(Y, Y'))$. **Dica:** Na implicação $\Leftarrow$ use o teorema do gráfico fechado.

3. Prove que todo subespaço fechado de um espaço reflexivo é reflexivo. **Dica:** Use a caraterização de reflexividade fornecida pelo teorema de Kakutani.

4. Prove que X é reflexivo se e somente se X' é reflexivo.

   Um espaço de Banach X é dito *uniformemente convexo* se para todo x e y na bola unitária, tem-se que dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que
   $$\|x - y\| > \epsilon \;\Rightarrow\; \left\|\frac{x+y}{2}\right\| < 1 - \delta.$$

5. Seja X um espaço uniformemente convexo. Mostre que se a sequência (x_n) converge fracamente a x e $\limsup_{n\to\infty} \|x_n\| \leq \|x\|$, então (x_n) converge fortemente a x.

6. Mostre que todos os subconjuntos fracamente compactos de um espaço de Banach são limitados.

7. Mostre que se toda sequência fracamente convergente contida em um conjunto compacto (com a topologia forte) converge fortemente.

8. Sejam A e B dois subconjuntos de X, um deles fracamente fechado e o outro fracamente compacto. Então $A + B$ é fracamente fechado.

9. Seja X um espaço de Banach tal que a topologia fraca $\sigma(X, X')$ é metrizável. Prove que X tem dimensão finita **Dica:** Use que para todo $k \in \mathbb{N}$, existe uma vizinhança fundamental de zero contida em $\{x \in X : d(x, 0) \leq 1/k\}$ e obtenha um conjunto enumerável de elementos de X'. Usando que para cada $g \in X'$ o conjunto $V = \{x \in X : |g(x)| < 1\}$ é uma vizinhança de zero para todo $g \in X'$, e por tanto contém um conjunto da forma $\{x \in X : d(x, 0) \leq 1/k\}$, prove que a familia obtida acima é de fato uma base de Hamel para X'.

10. Usando as mesmas ideias que no exercicio 9, mostre que se X' é um espaço de Banach tal que a topologia fraca-$*$ $\sigma(X', X)$ é metrizável, então X' tem dimensão finita.

11. Seja X um espaço de Banach de dimensão infinita que seja reflexivo ou com dual separável. Mostre que existe uma sequência de vetores unitários que converge fracamente para zero.

    Ums sequência (x_n) é dita *fracamente de Cauchy* se para todo $f \in X'$ a sequência $(f(x_n))$ é de Cauchy. Se toda sequência fracamente de Cauchy for fracamente convergente, diremos que o espaço X é *fracamente completo*

12. Mostre as seguintes afirmações:

    (a) Toda sequência fracamente de Cauchy é limitada.

    (b) Seja $A \subset X$. Se todo subconjunto não vazio de A contém uma sequência fracamente de Cauchy, então A é limitado.

    (c) Todo espaço reflexivo é fracamente completo.