Lista de exercícios 5

Análise Funcional

Professor: Freddy Hernández

Em todos os exercícios a seguir suponha que X é um espaço de Banach complexo, a menos que o contrário seja dito.

1. Dada (α_n) uma sequência densa em $[0,1]$, defina $T : \ell^2 \to \ell^2$ como $T((x_i)) = (\alpha_i x_i)$. Encontre $\sigma_p(T)$ e $\sigma_p(T)$.
2. Dado $K \subset \mathbb{C}$ compacto, encontre um operador linear $T : \ell^2 \to \ell^2$ tal que $\sigma(T) = K$.
3. Prove que $\lim_{\lambda\to\infty} \|R_\lambda(T)\| = 0$ para todo $T \in \mathcal{B}(X,X)$.
4. Seja $T : \ell^p \to \ell^p$ definido por $T((x_i)) = (x_{i+1})$.
   (a) Mostre que no caso $p = \infty$, $\sigma(T) = \sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\}$.
   (b) O que pode ser dito do caso $1 \leq p < \infty$?
5. Mostre que para todo $T \in \mathcal{B}(X,X)$, $\alpha \in \mathbb{C}$ e $k \in \mathbb{N}$, o raio espectral $r(T)$ satisfaz $r(\alpha T) = |\alpha| r(T)$ e $r(T^k) = r(T)^k$.
6. Mostre que se $T \in \mathcal{B}(X,X)$ é um operador *idempotente* (i.e. $T^2 = T$) diferente dos operadores nulo e identidade, então $\sigma(T) = \{0,1\}$.
7. Mostre que se $T \in \mathcal{B}(X,X)$ é um operador *nilpotente* (i.e. $T^k = 0$ para algum $k \in \mathbb{N}$) e $X \neq \{0\}$, então $\sigma(T) = \{0\}$.
8. Seja H um espaço de Hilbert e $T \in \mathcal{B}(H,H)$ é um operador *normal* (i.e. $T^*T = TT^*$). Mostre que o raio espectral de T é igual a $\|T\|$.
9. Seja $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Prove que auto-vetores correspondentes a auto-valores diferentes são linearmente independentes.
10. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ e $X = C_b(\Omega, \mathbb{C})$. Dada $m \in C(\Omega, \mathbb{C})$, considere o operador de multiplicação $A_m f = mf$ definido em $D(A) = \{f \in X : mf \in X\}$. Prove que:
    (a) A_m é fechado.
    (b) $\sigma(A_m) = \overline{m(\Omega)}$.
    (c) $R(\lambda, A_m) f = \frac{f}{\lambda - m}$.

Em particular, para todo $S \subset \mathbb{C}$ fechado (compacto), existe um operador fechado (limitado) tal que o espectro coincide com S.

Denote por $\mathcal{K}(X,Y)$ o espaço vetorial dos operadores compactos de X em Y e $\mathcal{K}_0(X,Y)$ o subespaço dos operadores $T \in \mathcal{K}(X,Y)$ com imagem finita (i.e $\dim(T(X)) < \infty$).

11. Prove que o operador $T : \ell^2 \to \ell^2$ definido como $T((x_i)) = (\frac{x_i}{i})$ é compacto. **Dica:** Aproxime T por operadores em $\mathcal{K}_0(\ell^2, \ell^2)$.

12. Sejam X espaço de Banach e H um espaço de Hilbert. Prove que todo operador compacto $T \in \mathcal{K}(X,H)$ pode ser aproximado por elementos de $\mathcal{K}_0(X,H)$.

13. Sejam X e Y espaços de Banach. Prove que se $T \in \mathcal{K}(X,Y)$, então toda sequência fracamente convergente em X é enviada por T para uma sequência fortemente convergente. Se X for reflexivo, a recíproca também é válida.

14. Use que $T \in \mathcal{K}(X,Y) \Rightarrow T^* \in \mathcal{K}(Y', X')$ (resultado provado em aula) para provar o resultado recíproco.

15. Veja se o operador $T : \ell^2 \to \ell^2$ definido como $T((x_i)) = (\frac{1-(-1)^{i+1}}{2}\ x_i)$ é compacto e encontre $\mathrm{Ker}(T_\lambda^n)$.

16. Prove que o operador $T : \ell^2 \to \ell^2$ definido como $T((x_i)) = (\frac{x_{i+1}}{i})$ é compacto e $\sigma_p(T) = \{0\}$.

17. Prove que o operador $T : \ell^2 \to \ell^2$ definido como $T((x_i)) = (0, (\frac{x_i}{i}))$ é compacto e $\sigma(T) = \sigma_r(T) = \{0\}$.