



Universidade Federal Fluminense

EGM - Instituto de Matemática

GMA - Departamento de Matemática Aplicada

LISTA 1 - 2012-1

Domínio, curva de nível e gráfico
de função real de duas variáveis

Domínio e superfície de nível
de função real de três variáveis

Nos exercícios 1. a 8. descreva e esboce o maior domínio possível da função real de duas ou de três variáveis, isto é, descreva analiticamente e represente geometricamente o maior subconjunto do $\mathbb{R}^2$ ou do $\mathbb{R}^3$ que torna a expressão que define a função, verdadeira em $\mathbb{R}$.

$$1. f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

$$2. f(x, y) = \ln x + \ln y$$

$$3. f(x, y) = \sqrt{|x| - |y|}$$

$$4. f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

$$5. f(x, y) = \ln(xy - 1)$$

$$6. f(x, y) = \arcsen(x - y)$$

$$7. f(x, y, z) = y + \sqrt{25 - x^2 - y^2 - z^2}$$

$$8. f(x, y, z) = \frac{\sqrt{4 - x^2} + \sqrt{9 - y^2}}{\sqrt{1 - z^2}}$$

9. Considere a função de duas variáveis

$$\begin{aligned} f: D \subset \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto z = f(x, y) = x^2 + y^2 \end{aligned}$$

definida em um subconjunto D de $\mathbb{R}^2$. Faça um esboço do gráfico de f em cada um dos três casos abaixo.

$$(a) D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

$$(b) D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; -1 \leq x \leq +1 \text{ e } -1 \leq y \leq +1\}.$$

$$(c) D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2/4 + y^2/9 \leq 1\}.$$

10. Considere a função

$$z = f(x, y) = \ln(e^{x+y} - 1).$$

(a) Escreva a equação da curva de nível de f que contém o ponto $(8, 2)$ e da curva de nível que contém o ponto $(-2, 3)$.

(b) Mais geralmente, escreva a equação da curva de nível de f que contém o ponto (a, b) , com $b > -a$.

(c) Mostre que o valor de f sobre a reta $y = -x + 2$ é constante, isto é, que $y = -x + 2$ está contida em um conjunto de nível de f .

(d) Mostre que o valor de f sobre a reta $y = -x + 3$ é constante, isto é, que $y = -x + 3$ está contida em um conjunto de nível de f .

(e) Se, por um momento, f representasse um lucro e você fosse um empresário, em qual reta você gostaria de estar: $y = -x + 2$ ou $y = -x + 3$? Justifique sua resposta.

Nos exercícios 11. a 18. esboce as curvas de nível e o gráfico da função dada.

$$11. f(x, y) = 8 - 2x - y$$

$$12. f(x, y) = x^2 - y$$

$$13. f(x, y) = 2x^2 + y^2$$

$$14. f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$15. f(x, y) = e^{-x^2 - y^2}$$

$$16. f(x, y) = xy$$

$$17. f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$$

$$18. f(x, y) = \frac{1}{y^2}$$

19. Na figura (1) temos, respectivamente, o desenho das curvas de nível das seis funções a seguir. Faça a associação destas seis curvas de nível com cada um dos seis gráficos apresentados na figura (2).

- (a) $z = f_1(x, y) = \sin(xy)/(xy),$
- (b) $z = f_2(x, y) = e^{-x^2} + e^{-4y^2},$
- (c) $z = f_3(x, y) = 15x^2y^2e^{-x^2-y^2}/(x^2 + y^2),$
- (d) $z = f_4(x, y) = (xy^3 - x^3y)/2,$
- (e) $z = f_5(x, y) = \sin(\sqrt{x^2 + y^2}),$
- (f) $z = f_6(x, y) = (y^4 - 8y^2 - 4x^2)/21.$

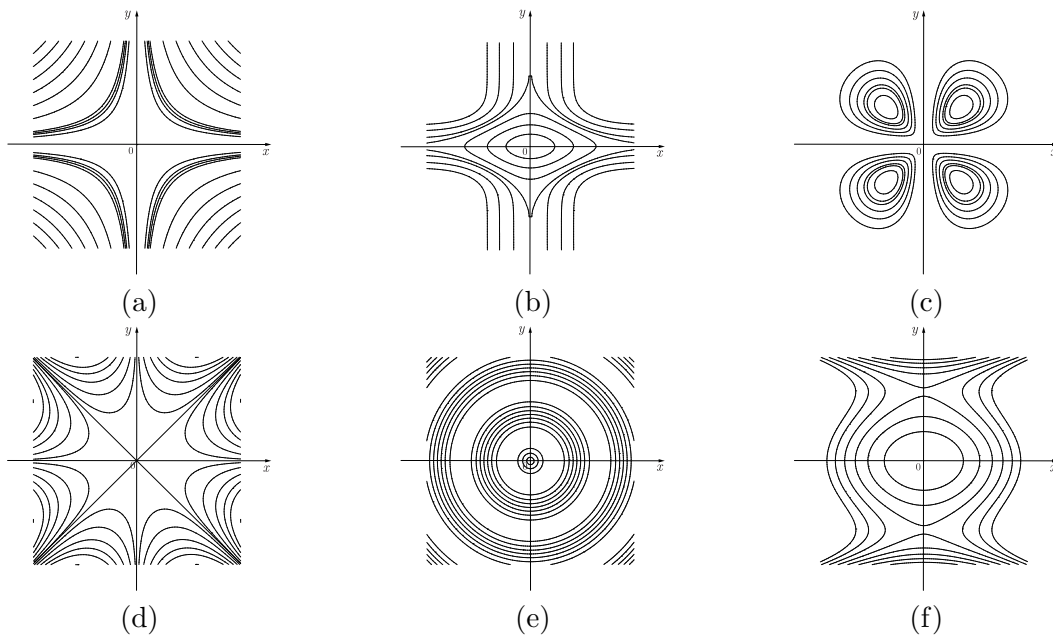


Figura 1: Curvas de nível de seis funções diferentes.

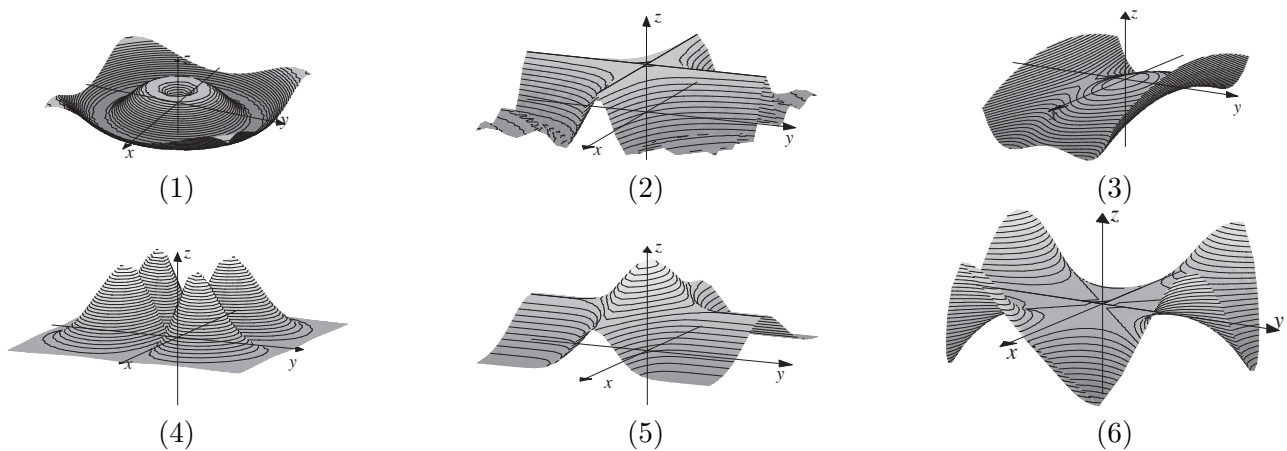


Figura 2: Gráfico de seis funções diferentes.

Nos exercícios 20. a 23. utilize os planos $x = k$, $y = k$ e $z = k$ para fazer um esboço da superfície de nível de cada uma das funções abaixo f associada ao nível $w = 0$. Se preciso, leia o comentário a seguir para resolver esses exercícios.

20. $w = f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 1$

21. $w = f(x, y, z) = x^2 - y$

22. $w = f(x, y, z) = x^2 + 2 - z$

23. $w = f(x, y, z) = |y| - z$

Comentário: **(Superfícies cilíndricas)** Todas estas superfícies de nível têm algo em comum: apesar de f depender de três variáveis, apenas *duas* aparecem na expressão algébrica que define f . Mais especificamente, temos

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \quad (x, y, z) \mapsto w = f(x, y, z) = g(x, y) \quad , \quad \text{onde} \quad g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R},$$

para o caso onde é a variável “ z ” que está faltando na definição de f . Como você deve ter percebido, para desenhar uma superfície de nível $w = k$ de uma função deste tipo, basta desenhar a curva de nível $g(x, y) = k$ de g no plano xy e então, sobre cada ponto desta curva, desenhar uma reta perpendicular ao plano xy (veja a figura abaixo). Os casos onde a variável “ x ” ou a variável “ y ” estão faltando são tratados de maneira análoga. Estas superfícies de nível são denominadas *superfícies cilíndricas*.

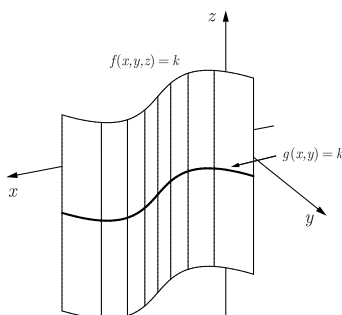


Figura 3: Uma superfície cilíndrica.

Em cada um dos exercícios 24. a 31. chame de n o nível da função dada e encontre todos os possíveis valores de n . Chame de $C_n(f)$ o conjunto de nível n de f e descreva analiticamente todos os possíveis conjuntos de nível n da função dada e ainda, se for possível, represente-os geometricamente.

24. $f(x, y) = \arcsen(xy)$

29. $f(x, y) = \frac{x}{y-1}$

25. $f(x, y) = x^2 + y^2 - z^2$

30. $f(x, y, z, w) = \frac{\sqrt{x-y}}{z-w}$

26. $f(x, y, z) = x + y + z$

31. $f(x, y) = y \sen x$

27. $f(x, y, z) = z - x^2 - y^2$

32. $f(x, y) = \arctan(x^2 + y^2)$

28. $f(x, y) = x^2 + y^2$

33. O desenho de uma superfície esférica de centro em $(0, 0, 0)$ e raio 1 pode ser o gráfico de alguma função $z = f(x, y)$ de duas variáveis? Justifique sua resposta.

34. As superfícies de nível da função $w = f(x, y, z) = z - x^2 - y^2$ associadas aos níveis $w = -2$, $w = 0$ e $w = 2$ podem se cortar? Justifique sua resposta!
35. Resolva as questões abaixo.
- Considere a função $w = f(x) = x^2$. Determine os conjuntos de nível de f e represente-os geometricamente no sistema de coordenadas adequado (reta, plano ou espaço tridimensional).
 - Considere a função $w = g(x, y) = x^2$. Determine as curvas de nível de g e represente-os geometricamente no sistema de coordenadas adequado (reta, plano ou espaço tridimensional).
 - Considere a função $w = h(x, y, z) = x^2$. Determine as superfícies de nível de h .
 - Suponha que você chegue em uma sala de aula onde a única sentença escrita no quadro é: “Faça um esboço do gráfico da função $w = x^2$!”. Que desenho você faria?
36. Resolva as questões abaixo.
- Faça o gráfico da função $y = f(x) = x^2$. Escreva uma função $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ cuja curva de nível associada ao nível 0 é igual ao gráfico de f .
 - Mais geralmente, dada uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, escreva uma função $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ cuja curva de nível associada ao nível 0 é igual ao gráfico de f . O que você pode dizer a respeito das curvas de nível de F para níveis diferentes de 0?
 - Seja $z = f(x, y) = x^2 + y^2$. Escreva uma função $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ cuja superfície de nível associada ao nível 0 é igual ao gráfico de f .
 - Mais geralmente, dada uma função $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, escreva uma função $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ cuja superfície de nível associada ao nível 0, é igual ao gráfico de f . O que você pode dizer a respeito das superfícies de nível de F para níveis diferentes de 0?

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

37. Uma chapa plana de metal está situada no plano xy de modo que a temperatura T (em °C) no ponto (x, y) é inversamente proporcional à distância da origem $(0, 0)$.
- Descreva as *isotérmicas*, isto é, as curvas de nível de T que representam pontos onde a temperatura é constante.
 - Se a temperatura no ponto $(4, 3)$ é 40°C, ache a equação da isotérmica para uma temperatura de 20°C.
38. O potencial elétrico V no ponto (x, y, z) é dado por
- $$V = 6/(x^2 + 4y^2 + 9z^2)^{1/2}.$$
- Descreva as *superfícies equipotenciais*, isto é, as superfícies de nível de V que representam pontos onde o potencial elétrico é constante.
 - Ache a equação da superfície equipotencial $V = 120$.
39. De acordo com a *lei de gravitação universal* de Newton, se uma partícula de massa m_0 está na origem $(0, 0, 0)$ de um sistema de coordenadas xyz , então o módulo F da força exercida sobre uma partícula de massa m situada no ponto (x, y, z) é dada por

$$F = G \cdot \frac{m_0 \cdot m}{x^2 + y^2 + z^2},$$

onde G é a constante de gravitação universal. F depende de quantas variáveis? Se $m_0 = 1.99 \cdot 10^{30}$ kg e $m = 5.98 \cdot 10^{24}$ kg, descreva as superfícies de nível da função resultante. Qual é o significado físico dessas superfícies de nível?

40. De acordo com a *lei dos gases ideais*, a pressão P , o volume V e a temperatura T de um gás confinado estão relacionados pela equação

$$P \cdot V = k \cdot T,$$

para uma constante k . Expresse P como função de V e T e descreva as curvas de nível associadas a esta função. Qual é o significado físico dessas curvas de nível?

41. A pressão atmosférica nas proximidades do solo em uma certa região é dada por

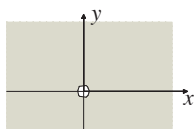
$$p(x, y) = a \cdot x^2 + b \cdot y^2 + c,$$

com a , b e c constantes positivas. Descreva as isobáricas (curvas de nível de p) para pressões superiores a c .

RESPOSTAS DA LISTA 1

1. $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$
2. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0 \text{ e } y > 0\}$
3. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; -|x| \leq y \leq |x|\}$
4. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$
5. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; xy > 1\}$
6. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x - 1 \leq y \leq x + 1\}$
7. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 \leq 25\}$
8. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; |x| \leq 2, |y| \leq 3, |z| < 1\}$

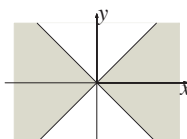
1.



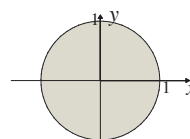
2.



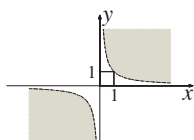
3.



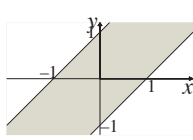
4.



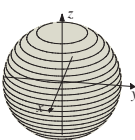
5.



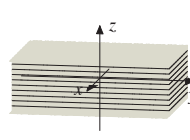
6.



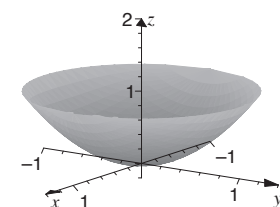
7.



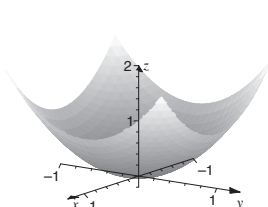
8.



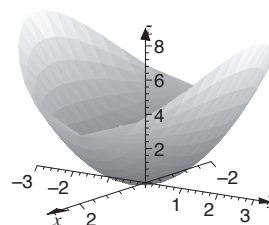
9.



(a)



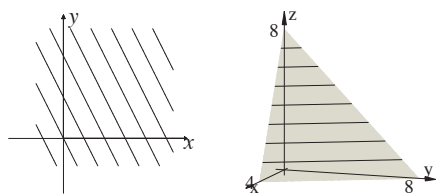
(b)



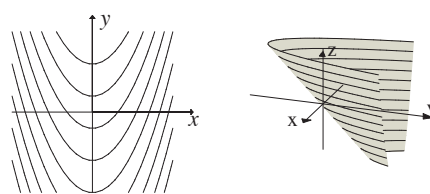
(c)

10. (a) pelo ponto $(8, 2)$, reta $x + y = 10$, pelo ponto $(-2, 3)$, reta $x + y = 1$
 (b) $x + y = a + b$
 (c) $y = 2 - x \Rightarrow f(x, y) = f(x, 2 - x) = \ln(e^{x+2-x} - 1) = \ln(e^2 - 1) = \text{constante}$
 (d) $y = 3 - x \Rightarrow f(x, y) = f(x, 3 - x) = \ln(e^{x+3-x} - 1) = \ln(e^3 - 1) = \text{constante}$
 (e) $y = -x + 3$. Podemos afirmar que $\ln(e^3 - 1) > \ln(e^2 - 1)$ pois as funções $F(t) = e^t$ e $G(t) = \ln t$ são estritamente crescentes.

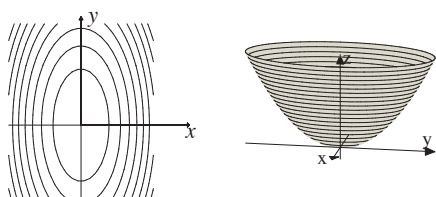
11.



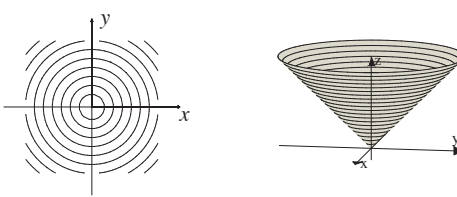
12.



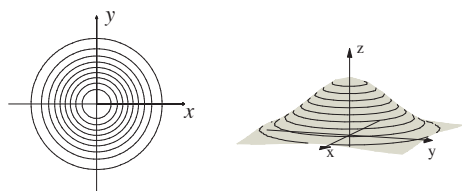
13.



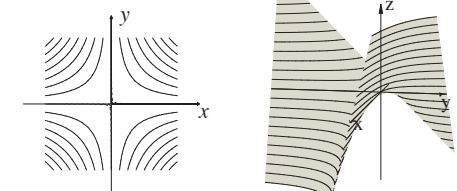
14.



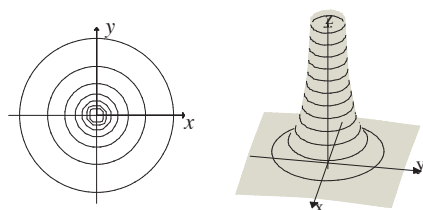
15.



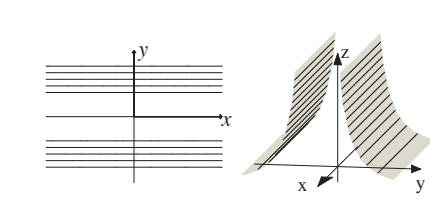
16.



17.

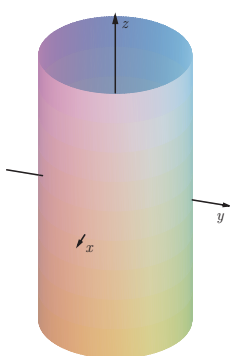


18.

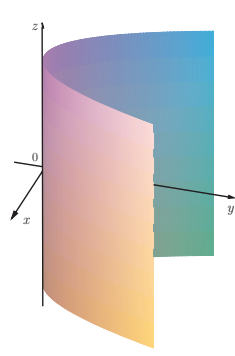


19. (1)–(e) (2)–(a) (3)–(f) (4)–(c) (5)–(b) (6)–(d)

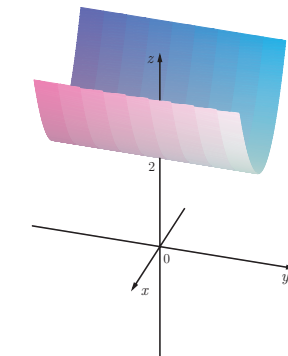
20.



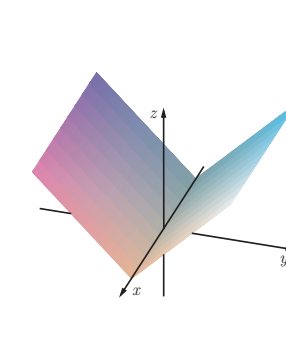
21.



22.

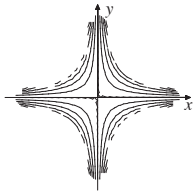


23.

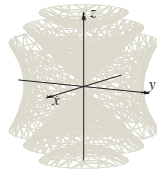


24. $C_n(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; -1 \leq xy \leq 1 \text{ e } xy = \sin n\}$, $-\frac{\pi}{2} \leq n \leq \frac{\pi}{2}$, $n = 0$: retas $x = 0$ e $y = 0$; $n > 0$: hipérboles com focos na reta $y = x$; $n < 0$: hipérboles com focos na reta $y = -x$.
25. $C_n(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 = z^2 + n\}$, $\forall n \in \mathbb{R}$, $n = 0$: cone de duas folhas, $n > 0$: hiperbolóide de uma folha, $n < 0$: hiperbolóide de duas folhas.
26. $C_n(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y + z = n\}$, $\forall n \in \mathbb{R}$, planos paralelos.
27. $C_n(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = x^2 + y^2 + n\}$, $\forall n \in \mathbb{R}$, parabolóides com vértices no eixo z .
28. $C_n(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = n\}$, $n \geq 0$, $n = 0$: a origem $((0, 0))$; $n > 0$: circunferências com centro na origem e raio $\sqrt{n}$.
29. $C_n(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \neq 1 \text{ e } x = n(y - 1)\}$, $\forall n \in \mathbb{R}$, retas furadas e concorrentes em $(0, 1)$.
30. $C_n(f) = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4; x \geq y, z \neq w \text{ e } x - y = n^2(z - w)^2\}$, $\forall n \in \mathbb{R}$, não existe representação geométrica.
31. $C_n(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \sin x = n\}$, $n \in \mathbb{R}$, $n = 0$: retas $y = 0$, $y = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; $n \neq 0$: gráfico de $y = n \csc x$.
32. $C_n(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = \tan n\}$, $0 \leq n < \pi/2$, $n = 0$: a origem $((0, 0))$, $n > 0$: circunferências com centro na origem e raio $\sqrt{\tan n}$.

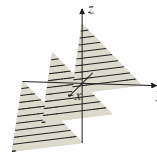
24.



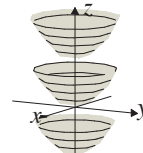
25.



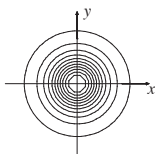
26.



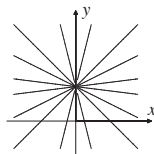
27.



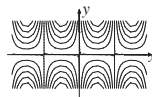
28.



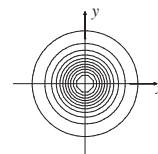
29.



31.



32.



37. (a) Circunferências de centro na origem

(b) Circunferência de raio 10 com centro na origem

38. (a) As superfícies equipotenciais, de potências $k > 0$, são elipsóides de semi-eixos $a = \frac{6}{k}$, $b = \frac{3}{k}$ e $c = \frac{4}{k}$, nos eixos x , y e z , respectivamente.

(b) $400x^2 + 1600y^2 + 3600z^2 = 1$

39. Depende de 4 variáveis, a saber, as coordenadas x , y e z do ponto onde está localizada a partícula e a sua massa m . As equações das superfícies de nível com força escalar constante e igual a k são esferas de centro na origem e raios $\frac{1}{k}(1.99)(5.98)10^{54}$.

40. As curvas de nível são semi-retas no sistema VOT , concorrentes na origem O , mas sem conter a origem ($V > 0$). As curvas de nível representam gases com mesma pressão e diz que quando os gases estão confinados sob pressão constante, o volume varia linearmente com a temperatura.

41. As isobáricas de pressão $k > c$ são elipses com centro na origem do sistema de eixos no plano e cujos semi-eixos são $a = \sqrt{\frac{k-c}{a}}$ e $b = \sqrt{\frac{k-c}{b}}$, sobre os eixos x e y , respectivamente.

uff Universidade Federal Fluminense
EGM - Instituto de Matemática
GMA - Departamento de Matemática Aplicada

LISTA 2 - 2012-1
Limite e continuidade de
de função real de várias variáveis

Em cada exercício de 1. a 15. calcule L, o limite, quando existir. Caso contrário, justifique.

1. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x+y}{x^2+y^2+2}$

9. $\lim_{(0,0)} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

2. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\text{sen } xy}{x}$

10. $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{(x-1)y^2}{(x-1)^2+y^2}$

3. $\lim_{(0,0)} \frac{x}{x+y}$

11. $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{x^2z}{x^2+y^2+z^2}$

4. $\lim_{(s,t) \rightarrow (0,0)} \frac{s^2-t^2}{s^2+t^2}$

12. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\text{sen}(x^2-y^2)}{x+y}$

5. $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{x^3+y+z^2}{x^4+y^2+z^3}$

13. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} e^{\frac{1}{x^2+y^2}} (x^2+y^2)$

6. $\lim_{(u,v) \rightarrow (1,1)} \frac{u^2-2u+1}{u^2-v^2-2u+2v}$

14. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{x^2(x+1)+(y-1)^2}{x^2+(y-1)^2}$

7. $\lim_{(s,t) \rightarrow (0,0)} \frac{s^3-t^3}{s^2+t^2}$

15. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$

8. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{1}{x^2+y-1}$

Nos exercícios 16. a 20. obtenha o maior subconjunto do $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, no qual a função é contínua.

16. $f(x,y) = \frac{x+y}{x-y}$

19. $f(x,y,z) = \sqrt{2-x^2-y^2-z^2}$

17. $f(x,y) = x^3+y^2+xy$

20. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2}; & (x,y) \neq (0,0) \\ 0; & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

18. $f(x,y,z) = \frac{\text{sen}(xy) + \cos(xy)}{x^2+y^2+z^2-4}$

21. Considere a função $z = f(x,y) = \begin{cases} \frac{x \cdot y^2}{x^2+y^4} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

(a) Mostre que $f_1(t) = f(t,p)$ e $f_2(t) = f(p,t)$ são funções contínuas em t para cada valor de p fixo.

(b) Mostre que f , por sua vez, não é contínua em $(0,0)$.

22. A função f tal que $f(x,y) = \frac{1}{|x+y-1|}$ é contínua?

23. Dê três exemplos de funções contínuas e três exemplos de funções descontínuas definidas em $\mathbb{R}^2$.

RESPOSTAS DA LISTA 2 (Com indicação ou resumo de algumas resoluções)

1. $L = 0$. (Podem ser aplicadas as propriedades algébricas de limite).
2. $L = 0$. (O numerador e denominador podem ser multiplicados por y , depois separa-se como produto de dois limites. Para calcular um desses limites, toma-se $u = xy$ e a propriedade que relaciona $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ com $u \rightarrow 0$, e aplica-se o limite trigonométrico fundamental).
3. $\nexists L$, pois tendendo-se pelas curvas $\gamma_1(t) = (t, 0)$ e $\gamma_2(t) = (0, t), t > 0$, os limites são diferentes.
4. $\nexists L$, idem ao 3.
5. $\nexists L$, pois tendendo-se pela curva $\gamma(t) = (t, 0, 0), t > 0$, o limite tende a $+\infty$ (ou $t < 0$, tende a $-\infty$).
6. $\nexists L$, pois tendendo-se pela curvas $\gamma_1(t) = (t+1, 1)$ e $\gamma_2(t) = (1, t+1), t > 0$, os limites são diferentes. $u = x(y-2)$ e a propriedade que relaciona $(x, y) \rightarrow (1, 2)$ com $u \rightarrow 0$, e calcula-se um limite trigonométrico).
7. $L = 0$. (Escrevendo como diferença de limites, em cada um pode ser aplicado o teorema do anulamento).
8. $\nexists L$, pois tendendo-se pela curva $\gamma(t) = (0, t+1), t > 0$, o limite tende a $+\infty$ (ou $t < 0$, tende a $-\infty$).
9. $\nexists L$, pois tendendo-se pela curva $\gamma(t) = (0, t)$, esse limite não existe.
10. $L = 0$. (Pode ser aplicado o teorema do anulamento).
11. $L = 0$. (Pode ser aplicado o teorema do anulamento).
12. $L = 0$. (O numerador e denominador podem ser multiplicados por $x-y$, depois separa-se como produto de dois limites. Para calcular um desses limites, toma-se $u = x^2 - y^2$ e a propriedade que relaciona $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ com $u \rightarrow 0$, e aplica-se o limite trigonométrico fundamental).
13. $\nexists L, L \rightarrow +\infty$, toma-se $u = x^2 + y^2$ e a propriedade que relaciona $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ com $u \rightarrow 0$, e aplica-se a regra de L'Hôpital.
14. $L = 1$. (A função pode ser escrita como soma de duas funções, uma delas é simplificada e igual a 1. Para calcular o limite da outra função pode ser aplicado o teorema do anulamento).
15. $\nexists L$, pois tendendo-se pela curva $\gamma(t) = (t, 0)$, esse limite não existe.
16. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \neq y\}$
17. $\mathbb{R}^2$
18. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 \neq 4\}$
19. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 \leq 2\}$
20. $\mathbb{R}^2$
21. (a) Para $p = 0$ tem-se $f_1(0) = f(0, 0) = 0$ e para $t \neq 0$, $f_1(t) = f(t, 0) = \frac{t \cdot 0}{t^2 + 0} = 0$, logo $f_1(t) = 0, \forall t$, donde conclui-se que $f_1(t)$ é contínua (função constante nula é contínua).
Para $p \neq 0$ tem-se $f_1(t) = f(t, p) = \frac{t \cdot p^2}{t^2 + p^4}$ e como $t^2 + p^4 \neq 0, \forall t$ conclui-se que $f_1(t)$ é contínua pois é quociente de funções polinomiais em t , que são contínuas.
Analogamente, $f_2(t)$ é contínua.
(b) $\nexists L$, pois tendendo-se pelas curvas $\gamma_1(t) = (t, 0)$ e $\gamma_2(t) = (t^2, t)$, os limites são diferentes. Se não existe o limite em $(0, 0)$ então f não é contínua em $(0, 0)$.
22. Sim. É quociente de contínuas (a função do numerador é contínua porque é constante e a função do denominador é contínua porque é composta de contínuas).

UFF Universidade Federal Fluminense
EGM - Instituto de Matemática
GMA - Departamento de Matemática Aplicada

LISTA 3 - 2012-1
Derivadas parciais. Diferenciabilidade.
Plano tangente. Diferencial total.

Nos exercícios 1. a 8. determine as derivadas parciais da função dada.

1. $f(x, y) = (x^3 + y^3)(x - y)$

5. $f(x, y) = \int_x^y e^{-t^2} dt$

2. $f(x, y) = \sin(x + y) + \cos(x - y)$

6. $f(x, y, z) = \frac{e^x}{e^y - e^z}$

3. $f(x, y) = \arcsen\left(\frac{x^2}{y^2}\right)$

7. $w = f(x, y, z) = (y^2 + z^2)^x$.

4. $f(x, y) = \int_x^y \cos t \, dt$

8. $w = f(r, s, v) = (2r + 3s)^{\cos(v)}$.

9. Mostre que se $w = x^2y + y^2z + z^2x$ então $\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = (x + y + z)^2$.

10. Calcule as derivadas parciais de f no ponto $(3, \pi/4)$, onde $f(x, y) = \ln(x \tan y)$.

11. Seja $f(x, y) = \sqrt{14 - x^2 - y^2}$. Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 3)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 3)$ e interprete geometricamente.

12. Dada a função $z = \int_x^{x^2+y^2} e^t \, dt$, calcule $\frac{\partial z}{\partial x}(1, 2)$ e $\frac{\partial z}{\partial y}(1, 2)$.

13. Na figura (1) encontram-se os gráficos de três funções de duas variáveis:

$$f, \quad \partial f / \partial x \quad \text{e} \quad \partial f / \partial y.$$

Em (c) está o gráfico de f . Identifique os outros dois gráficos.

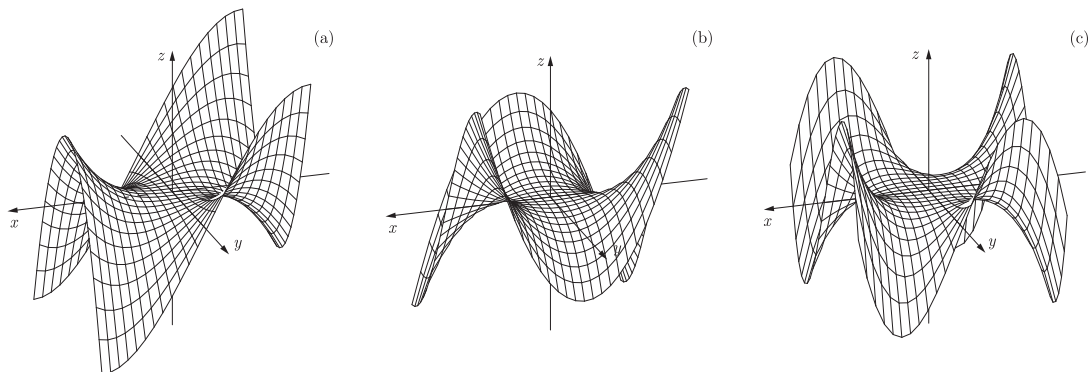


Figura 1: Os gráficos de f , $\partial f / \partial x$ e $\partial f / \partial y$.

14. Mostre que no ponto $(0, 0)$ a função $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^2}{x^2 + y^2}; & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0; & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

não é contínua, não tem uma das derivadas parciais e não é diferenciável.

15. Mostre que no ponto $(0, 0)$ a função $f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2}; & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0; & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

não é contínua, não é diferenciável, porém tem derivadas parciais.

16. Mostre que no ponto $(0, 0)$ a função $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + y^2}; & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0; & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ é contínua, tem derivadas parciais, mas não é diferenciável.
17. Mostre que a função $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^3 - y^3)}{x^2 + y^2}; & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0; & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ é diferenciável.
18. Mostre que a função $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4}{x^2 + y^2}; & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0; & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ é diferenciável.
19. Determine o conjunto dos pontos onde $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2}{x^2 + y^2}; & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0; & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ é diferenciável.
20. Seja $f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \operatorname{sen} \frac{1}{x^2 + y^2}; & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0; & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$
- (a) Calcule f_x e f_y (c) Mostre que f_x não é contínua.
(b) Mostre que f é derivável em $\mathbb{R}^2$
21. A função $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ é de classe C^1 em $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$? Justifique.
22. A função $f(x, y, z) = \ln(1 - x - y - z)$ é de classe C^1 em $(x, y, z) \in D_f$? (D_f é o maior domínio possível de f contido no $\mathbb{R}^3$). Justifique.
23. Diga se as afirmativas são verdadeiras ou falsas. Justifique as que forem verdadeiras e dê um contra-exemplo para as falsas. Assuma que $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $n \geq 2$, o domínio D_f é aberto e $X_0 \in D_f$.
- (a) Se f é contínua em X_0 então f é derivável em X_0 .
(b) Se f é contínua em X_0 então f possui as derivadas parciais em X_0 .
(c) Se f possui todas as derivadas parciais em X_0 então f é contínua em X_0 .
(d) Se f possui todas as derivadas parciais em X_0 então f é derivável em X_0 .
(e) Se f é contínua e possui todas as derivadas parciais em X_0 então f é derivável em X_0 .
(f) Se f é derivável em X_0 então f possui todas as derivadas parciais em X_0 .
(g) Se f é derivável em X_0 então f é contínua em X_0 .
(h) Se f é derivável em X_0 então todas as suas derivadas parciais são contínuas em X_0 .
(i) Se f possui todas as derivadas parciais contínuas em X_0 então f é derivável em X_0 .
(j) Se f não possui uma das derivadas parciais em X_0 então f não é derivável em X_0 .
(k) f possui todas as derivadas parciais contínuas em $X_0 \Leftrightarrow f$ é derivável em X_0 .
24. Se $f(x, y) = \arctan(x - 2y)$, determine as equações do plano tangente e da reta normal ao gráfico de f no ponto $(2, 1, f(2, 1))$.
25. Seja $f(x, y) = x \cos \frac{x}{y}$. Mostre que os planos tangentes ao gráfico de f contêm a origem.
26. Determine a equação de um plano que seja paralelo ao plano $z = 2x + 3y$ e tangente ao gráfico da função $f(x, y) = x^2 + xy$.

27. Seja $z = xe^{x^2-y^2}$.
- (a) Calcule um valor aproximado para a variação Δz em z , quando se passa de $x = 1$ e $y = 1$ para $x = 1,01$ e $y = 1,002$.
- (b) Calcule um valor aproximado para z correspondente a $x = 1,01$ e $y = 1,002$.
28. Use uma função apropriada e calcule um valor aproximado para $\sqrt{(0,01)^2 + (3,98)^2 + (2,99)^2}$.
29. A energia consumida em um resistor elétrico é dada por $P = \frac{V^2}{R}$. Se $V = 100$ volts e $R = 10$ ohms, calcule o valor aproximado para a variação ΔP , quando V decresce de 0,2 volts e R aumenta de 0,01 ohms.
30. Em um setor circular, o ângulo central é 80° e o raio é 20 cm. Reduzindo-se o ângulo de 1° , qual deve ser o acréscimo no raio para que a área fique aproximadamente inalterada?
Lembrete: área do setor circular $= \frac{\theta r^2}{2}$, θ em radianos.
31. Determine o erro relativo máximo (aproximado) no cálculo do período T de um pêndulo simples, através da fórmula $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, sendo o erro relativo em l igual a 1% e em g igual a 3%.

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

32. A análise de certos circuitos eletrônicos envolve a fórmula

$$I = \frac{V}{\sqrt{R^2 + L^2 \cdot \omega}},$$

em que I é a corrente, V a voltagem, R a resistência, L a indutância e ω uma constante positiva. Calcule e interprete $\partial I / \partial R$ e $\partial I / \partial L$.

33. Em um dia claro, a intensidade da luz solar às t horas após o nascente e à profundidade oceânica de x metros, pode ser aproximada por

$$I(x, t) = I_0 e^{-kx} \sin^3(\pi t/D),$$

com I_0 a intensidade da luz solar ao meio-dia, D a quantidade horas do dia com luz solar e k uma constante positiva. Se $I_0 = 1000$, $D = 12$ e $k = 0.10$, calcule e interprete as derivadas parciais $\partial I / \partial t$ e $\partial I / \partial x$ quando $t = 6$ horas e $x = 5$ metros.

34. Quando um poluente tal como óxido nítrico é emitido por uma chaminé de h metros de altura, a concentração $C(x, y)$ (em μ/m^3) do poluente em um ponto P situado a y metros acima do chão e cuja projeção ortogonal sobre o chão está a x quilômetros da base da chaminé pode ser representada por $C(x, y) = \frac{a}{x^2} \left(e^{-b(y-h)^2/x^2} + e^{-b(y+h)^2/x^2} \right)$

em que a e b são constantes positivas que dependem das condições atmosféricas e da taxa de emissão do poluente (veja a figura).



Suponha que $C(x, y) = \frac{200}{x^2} \left(e^{-0.02(y-10)^2/x^2} + e^{-0.02(y+10)^2/x^2} \right)$.

Calcule e interprete $\partial C / \partial x$ e $\partial C / \partial y$ no ponto $P = (2, 5)$.

RESPOSTAS DA LISTA 3 (Com indicação ou resumo de algumas resoluções)

1. $\begin{cases} f_x = 4x^3 + y^3 - 3x^2y \\ f_y = -x^3 + 3y^2x - 4y^3 \end{cases}$
2. $\begin{cases} f_x = \cos(x+y) - \sin(x-y) \\ f_y = \cos(x+y) + \sin(x-y) \end{cases}$
3. $f_x = \frac{2x}{\sqrt{y^4 - x^4}}, \quad f_y = \frac{-2x^2}{y\sqrt{y^4 - x^4}}$
4. $f_x = -\cos x, \quad f_y = \cos y$
5. $f_x = -e^{-x^2}, \quad f_y = e^{-y^2}$
6. $f_x = \frac{e^x}{e^y - e^z}, \quad f_y = \frac{-e^{x+y}}{(e^y - e^z)^2}, \quad f_z = \frac{e^{x+z}}{(e^y - e^z)^2}$
7. $w_x = (y^2 + z^2)^x \ln(y^2 + z^2)$
 $w_y = 2xy(y^2 + z^2)^{x-1}, \quad w_z = 2xz(y^2 + z^2)^{x-1}$
8. $w_r = 2 \cos(v)(2r + 3s)^{\cos(v)-1}$
 $w_s = 3 \cos(v)(2r + 3s)^{\cos(v)-1}$
 $w_v = -\sin(v) \ln(2r + 3s)(2r + 3s)^{\cos(v)}$

9. Calculando as derivadas parciais, somando e simplificando, chega-se ao termo do lado direito da equação.

$$10. f_x(x, y) = \frac{1}{x}; \quad f_x(3, \pi/4) = 1/3; \quad f_y(x, y) = \frac{\tan y}{x \sec^2 y}; \quad f_y(3, \pi/4) = 2$$

$$11. f_x(x, y) = \frac{-x}{\sqrt{14 - x^2 - y^2}}; \quad f_x(1, 3) = -\frac{1}{2}; \quad f_y(x, y) = \frac{-y}{\sqrt{14 - x^2 - y^2}}; \quad f_y(1, 3) = -\frac{3}{2}$$

Seja r a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(1, 3)$, r no plano $y = 3$. Como $f_x(1, 3) < 0$, o ângulo entre r e o semi-eixo positivo Ox é maior que 90° .

Seja s a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(1, 3)$, s no plano $x = 1$. Como $f_y(1, 3) < 0$, o ângulo entre r e o semi-eixo positivo Oy é maior que 90° .

$$12. z_x(x, y) = 2xe^{x^2+y^2} - e^x; \quad z_x(1, 2) = -e + 2e^5; \quad z_y(x, y) = 2ye^{x^2+y^2}; \quad z_y(1, 2) = 4e^5.$$

$$13. (a) \partial f / \partial y \quad (b) \partial f / \partial x$$

$$14. \nexists \lim_{(0,0)} f(x, y) \stackrel{\text{definição}}{\Rightarrow} f \text{ não é contínua em } (0, 0) \stackrel{\text{teorema}}{\Rightarrow} f \text{ não é diferenciável em } (0, 0). \\ \exists f_x(0, 0) = 1 \text{ e } \nexists f_y(0, 0).$$

$$15. \nexists \lim_{(0,0)} f(x, y) \stackrel{\text{definição}}{\Rightarrow} f \text{ não é contínua em } (0, 0) \stackrel{\text{teorema}}{\Rightarrow} f \text{ não é diferenciável em } (0, 0). \\ \exists f_x(0, 0) = 0 \text{ e } \exists f_y(0, 0) = 0.$$

$$16. \exists \lim_{(0,0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0) \stackrel{\text{definição}}{\Rightarrow} f \text{ é contínua em } (0, 0). \quad \exists f_x(0, 0) = 1 \text{ e } \exists f_y(0, 0) = 0.$$

Verificando a diferenciabilidade de f em $(0, 0)$: podemos aplicar o corolário de um teorema (diferenciável $\Rightarrow$ existência das derivadas parciais), no cálculo do limite do erro da definição de diferenciabilidade,

$$\frac{\text{erro}(h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \frac{f(0 + h, 0 + k) - f(0, 0) - hf_x(0, 0) - kf_y(0, 0)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \frac{-hk^2}{\sqrt{(h^2 + k^2)^3}}.$$

$$\nexists \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{-hk^2}{\sqrt{(h^2 + k^2)^3}} \Rightarrow \nexists \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\text{erro}(h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} \stackrel{\text{corolário}}{\Rightarrow} f \text{ não é diferenciável em } (0, 0).$$

$$17. f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0, \quad \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\text{erro}(h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{hk(h^3 - k^3)}{\sqrt{(h^2 + k^2)^3}} = 0 \stackrel{\text{corolário}}{\Rightarrow} f \text{ é diferenciável em } (0, 0).$$

$$18. \text{Para } (x, y) = (0, 0): f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0, \quad \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\text{erro}(h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{(h^4)}{\sqrt{(h^2 + k^2)^3}} = 0 \stackrel{\text{corolário}}{\Rightarrow} f \\ \text{é diferenciável em } (0, 0). \text{ Para } (x, y) \neq (0, 0): f \text{ é diferenciável pois é quociente de funções diferenciáveis.}$$

$$19. \text{Diferenciável em } \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\} \text{ pois } \forall (x, y) \neq (0, 0), f \text{ é quociente de funções diferenciáveis e para } (x, y) = (0, 0), \nexists \lim_{(0,0)} f(x, y) \stackrel{\text{definição}}{\Rightarrow} f \text{ não é contínua em } (0, 0) \stackrel{\text{teorema}}{\Rightarrow} f \text{ não é diferenciável em } (0, 0).$$

$$20. (a) f_x(x, y) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2x}{x^2 + y^2} \cos \frac{1}{x^2 + y^2}; & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0; & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \\ f_y(x, y) = \begin{cases} 2y \sin \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2y}{x^2 + y^2} \cos \frac{1}{x^2 + y^2}; & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0; & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(b) $\forall (x, y) \neq (0, 0)$, f é diferenciável, pois é quociente de funções diferenciáveis e para $(x, y) = (0, 0)$,
 $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\text{erro}(h,k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \sqrt{h^2 + k^2} \sin \frac{1}{h^2 + k^2} = 0 \xrightarrow{\text{corolário}} f \text{ é diferenciável em } (0, 0).$

(c) Tomando o limite de $f_x(x, y)$ pela reta $\gamma(t) = (t, t)$, quando $t \rightarrow 0$, $f_x(t, t)$ oscila entre $+\infty$ e $-\infty$, logo
 $\nexists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_x(x, y) \xrightarrow{\text{definição}} f_x \text{ não é contínua em } (0, 0).$

21. Não, pois $\nexists f_x(0, 0, 0)$ (ou $\nexists f_y(0, 0, 0)$ ou $\nexists f_z(0, 0, 0)$) $\xrightarrow{\text{teorema}} f$ não é de classe C^1 em $(0, 0, 0)$.

22. Sim, pois f é composta de funções de classe C^1 .

23. (a) Falsa. Contra-exemplo: $f(x, y) = |x + y|$ ou exercício 16.

(b) Falsa. Contra-exemplo: $f(x, y) = |x + y|$ ou $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}; & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0; & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$.

(c) Falsa. Contra-exemplo: função e ponto do exercício 15.

(d) Falsa. Contra-exemplo: funções e respectivos pontos dos exercícios 15 e 16.

(e) Falsa. Contra-exemplo: função e ponto do exercício 16.

(f) Verdadeira. É um teorema provado logo após a definição de diferenciabilidade.

(g) Verdadeira. É um teorema provado logo após a definição de diferenciabilidade.

(h) Falsa. Contra-exemplo: função e ponto do exercício 20.

(i) Verdadeira. É o teorema da condição suficiente para diferenciabilidade.

(j) Verdadeira. É a contra-recíproca do teorema: f derivável em $X_0 \Rightarrow f$ possui todas as derivadas parciais em X_0 .

(k) Falsa. Vale a $\Rightarrow$, que é o teorema da condição suficiente de diferenciabilidade, mas não vale a $\Leftarrow$, conforme o item (h).

24. Plano tangente: $z = (x - 2) - 2(y - 1)$. Reta normal: $(x, y, z) = (2, 1, 0) + \lambda(1, -2, -1), \lambda \in \mathbb{R}$.

25. A equação do plano tangente em $\forall (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, $y_0 \neq 0$ é

$$z = \left(-\frac{x_0}{y_0} \sin \frac{x_0}{y_0} + \cos \frac{x_0}{y_0} \right) x + \left(\frac{x_0^2}{y_0^2} \sin \frac{x_0}{y_0} \right) y, \text{ que é satisfeita por } (x, y, z) = (0, 0, 0).$$

26. $z = -3 + 2(x - 3) + 3(y + 4)$.

27. (a) 0,026 (b) 1,026

28. Sendo $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, então

$$\sqrt{(0.01)^2 + (3.98)^2 + (2.99)^2} = f(0 + 0.01, 4 - 0.02, 3 - 0.01) \simeq 4,978.$$

29. -5

30. 0,125 cm

31. 2 %

32. $\frac{\partial I}{\partial R} = \frac{-RV}{\sqrt{(R^2 + L^2 w)^3}}$, representa a taxa da variação da corrente I em relação a variação da resistência R .

$\frac{\partial I}{\partial L} = \frac{-2wLV}{\sqrt{(R^2 + L^2 w)^3}}$, representa a taxa da variação da corrente I em relação a variação da indutância L .

33. $\frac{\partial I}{\partial x}(5, 6) = -100e^{-0.5}$ e representa a taxa de variação da intensidade de luz solar em relação à variação da profundidade no nível de profundidade 5 metros, após 6 horas do amanhecer.

$\frac{\partial I}{\partial t}(5, 6) = 0$ e representa a taxa de variação da intensidade de luz solar em relação à variação do tempo após 6 horas do amanhecer, no nível de profundidade 5 metros.

34. $\frac{\partial C}{\partial x}(2, 5) = -12.5(3.5e^{-0.125} - 0.5e^{-1.125}) \simeq -36.5801$ e representa a taxa de variação da concentração do poluente em relação à variação da distância x , quando $x = 2$ quilômetros e a altura é 5 metros.

$\frac{\partial C}{\partial y}(2, 5) = -2.5(e^{-0.125} - 3e^{-1.125}) \simeq -0.2287$ e representa a taxa de variação da concentração do poluente em relação à variação da altura y , quando $x = 2$ quilômetros e a altura é 5 metros.



Universidade Federal Fluminense

EGM - Instituto de Matemática

GMA - Departamento de Matemática Aplicada

LISTA 4 - 2012-1

Derivadas parciais de ordem superior

- Calcule todas as derivadas parciais de terceira ordem da função de produção $Q = 4K^{3/4}L^{1/4}$. Use o teorema de Schwarz para acelerar o processo.
- Uma função $z = f(x_1, \dots, x_n)$ é *harmônica* se ela satisfaz a *equação de Laplace*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 z}{\partial x_n^2} = 0.$$
 Mostre que a função $z = f(x, y) = x^3 - 3xy^2$ é harmônica.
 Quais das funções dos exercícios 3. a 8. satisfazem a equação de Laplace?
- $z = f(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$
- $z = f(x, y) = x^2 - y^2$
- $z = f(x, y) = y^3 + 3x^2y$
- $z = f(x, y, z) = e^x \sin y + e^y \sin z$
- $z = f(x, y) = \arctan(x/y)$
- $z = f(x, y) = \ln(x/y)$
- Verifique que $v = \sin(kx) \cdot \sin(akt)$ satisfaz a *equação da onda* $\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$.
- No estudo da penetração da geada em uma rodovia, a temperatura T no instante t e à profundidade x pode ser dada aproximadamente por $T = T_0 e^{-\lambda x} \sin(\omega t - \lambda x)$, em que T_0 , ω e λ são constantes. Mostre que T satisfaz a *equação unidimensional do calor*: $\frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$, com $k = 2\lambda^2/w$.

EXERCÍCIO OPCIONAL

- O objetivo deste exercício é examinar uma função de classe C^1 para a qual a tese do teorema de Schwarz falha: as derivadas parciais mistas não são iguais. Seja

$$z = f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3y - xy^3}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- Prove que f se anula sobre os eixos x e y . Conclua então que $(\partial f / \partial x)(0, 0)$ e $(\partial f / \partial y)(0, 0)$ são iguais a zero.
- Calcule $\partial f / \partial x$ e $\partial f / \partial y$ para pontos $(x, y) \neq (0, 0)$ e conclua que $(\partial f / \partial x)(0, y) = -y$ e $(\partial f / \partial y)(x, 0) = x$.
- Mostre que $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) (0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)}{y - 0} = -1$.
- Mostre que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) (0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)}{x - 0} = +1$ e conclua que as derivadas parciais mistas de f não são iguais em $(0, 0)$.
- Calcule $(\partial^2 f / \partial x \partial y)(x, y)$ para $(x, y) \neq (0, 0)$.
- Use o item anterior para mostrar que $(\partial^2 f / \partial x \partial y)(x, x) = 0$ para $x > 0$.
- Conclua que $(\partial^2 f / \partial x \partial y)(x, y)$ é descontínua na origem $(0, 0)$ e assim f não é uma função de classe C^2 . Logo a hipótese do teorema de Schwarz (a saber, f é uma função de classe C^2) não se verifica.

RESPOSTAS DA LISTA 4

- $Q_K = 3K^{-1/4}L^{1/4}$; $Q_L = K^{3/4}L^{-3/4}$; $Q_{KK} = -(3/4)K^{-5/4}L^{1/4}$; $Q_{LL} = -(3/4)K^{3/4}L^{-7/4}$;
 $Q_{KKK} = (15/16)K^{-9/4}L^{1/4}$; $Q_{LLL} = (21/16)K^{3/4}L^{-11/4}$; $Q_{KL} = Q_{LK} = (3/4)3K^{-1/4}L^{-3/4}$;
 $Q_{KLL} = Q_{LKK} = Q_{KKL} = -(3/16)3K^{-5/4}L^{-3/4}$; $Q_{KLL} = Q_{LKL} = Q_{LLK} = -(9/16)3K^{-1/4}L^{-7/4}$
3. Sim 4. Sim 5. Não 6. Sim 7. Sim 8. Não

UFF Universidade Federal Fluminense
EGM - Instituto de Matemática
GMA - Departamento de Matemática Aplicada

LISTA 5 - 2012-1
Polinômio de Taylor

1. Aproxime $f(x) = e^x$ em torno de $a = 0$ com um polinômio de Taylor de grau três e com um polinômio de grau quatro. A seguir, calcule os valores destas aproximações em $x = 0.2$ e $x = 1.0$ e compare com os valores corretos.
2. Use o polinômio de Taylor de ordem dois de $f(x) = x^{3/2}$ no ponto $a = 4$ para obter uma aproximação de $(4.2)^{3/2}$.
3. Calcule os polinômios de Taylor de ordem um, dois e três das funções $y = f(x) = \sqrt{x+1}$ em $a = 0$ e da função $y = g(x) = \ln(x)$ em $x = 1$. A seguir, calcule os valores destas aproximações em $x = 0.2$ e $x = 1.0$ e compare com os valores corretos.
4. Calcule os polinômios de Taylor de ordem um e dois das funções abaixo nos pontos indicados.
 - (a) $f(x, y) = x/(1+y)$ em $\vec{p} = (0, 0)$.
 - (b) $f(x, y, z) = x^{1/4}y^{1/2}z^{1/4}$ em $\vec{p} = (1, 1, 1)$.
5. Use o polinômio de Taylor de ordem dois em $\vec{p} = (1, 1)$ para aproximar $f(x, y) = x^{1/2}y^{1/2}$ em $\vec{q} = (1.2, 0.9)$.

RESPOSTAS DA LISTA 5

1. $p_3(x) = 1 + x + x^2/2 + x^3/6$ e $p_4(x) = 1 + x + x^2/2 + x^3/6 + x^4/24$. $p_3(0.2) = 1.221333333\dots$, $p_3(1.0) = 2.6666666\dots$, $p_4(0.2) = 1.2214$ e $p_4(1.0) = 2.708333333\dots$
2. $p_2(x) = 8 + 3(x-4) + 3(x-4)^2/16$ e $p_2(4.2) = 8.6075$.
3. Para $f(x) = \sqrt{1+x}$ temos $p_1(x) = 1+x/2$, $p_2(x) = 1+x/2-x^2/8$, $p_3(x) = 1+x/2-x^2/8+x^3/16$, $p_1(0.2) = 1.1$, $p_2(0.2) = 1.095$, $p_3(0.2) = 1.0955$. Para $g(x) = \ln(x)$ temos $p_1(x) = x-1$, $p_2(x) = (x-1)-(x-1)^2/2$, $p_3(x) = (x-1)-(x-1)^2/2+(x-1)^3/3$, $p_1(1.2) = 0.2$, $p_2(1.2) = 0.18$ e $p_3(1.2) = 0.182666666\dots$
4. (a) $p_1(x, y) = x$ e $p_2(x, y) = x - x \cdot y$.
(b) $p_1(x, y, z) = x/4 + y/2 + z/4$ e $p_2(x, y, z) = x/4 + y/2 + z/4 - 3x^2/32 + xz/16 + xy/8 - 3z^2/32 - y^2/8 + yz/8$.
5. $p_2(x, y) = x/2 + y/2 - (x-1)^2/8 - (y-1)^2/8 + (x-1)(y-1)/4$ e $p_2(1.2, 0.9) = 1.03875$.



Universidade Federal Fluminense
EGM - Instituto de Matemática
GMA - Departamento de Matemática Aplicada

LISTA 6 - 2012-1

Regra da cadeia

1. Se $f(x, y) = e^{xy}$, $g(t) = \cos t$, $h(t) = \sin t$ e $F(t) = f(g(t), h(t))$, calcule $F'(0)$.
2. Calcule $\frac{\partial w}{\partial r}$ e $\frac{\partial w}{\partial t}$ para $w = xy + yz + xz$, $x = r$, $y = r \cos t$, e $z = r \sin t$.
3. Seja $z = xf\left(\frac{y}{x}\right) - g\left(\frac{y}{x}\right)$, onde f e g são de classe C^1 em $\mathbb{R}$. Mostre que $z_x + \frac{y}{x} z_y = f\left(\frac{y}{x}\right)$.
4. Um ponto se desloca sobre a curva $x = 2 \sin t$, $y = 7 \cos t - 3$, $z = f(2 \sin t, 7 \cos t - 3)$, onde $f(x, y) = \sqrt{49 - x^2 - y^2}$. Qual a componente vertical (em z) da velocidade no instante que o ponto está na posição $(x, y, z) = (2, -3, 6)$?
5. O que está errado com o seguinte argumento?

Suponha que $w = f(x, y)$ com $y = x^2$. Pela regra da cadeia,

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} \implies \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} + 2 \cdot x \cdot \frac{\partial w}{\partial y}.$$

Assim, $0 = 2 \cdot x \cdot (\partial w / \partial y)$, de modo que $\partial w / \partial y = 0$.

6. Seja $w = x^2 + y^2 - z^2$, $x = \rho \sin \varphi \cos \theta$, $y = \rho \sin \varphi \sin \theta$ e $z = \rho \cos \varphi$. Calcule w_ρ , w_φ e w_θ .
7. Se $w = f(x, y)$, f derivável em $\mathbb{R}^2$, $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$, mostre que $w_x^2 + w_y^2 = w_r^2 + \frac{w_\theta^2}{r^2}$.
8. Se $u = x^m f\left(\frac{y}{x}, \frac{x}{z}, \frac{z}{x}\right)$, f diferenciável em $\mathbb{R}^3$, mostre que $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = mu$.
9. Sejam g e h funções de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$ e $f(x, y) = (g(x, y))^{h(x, y)}$. Assuma que $g(1, 2) = 2$, $h(1, 2) = -2$, $g_x(1, 2) = -1$, $g_y(1, 2) = 3$, $h_x(1, 2) = 5$ e $h_y(1, 2) = 0$. Encontre $f_x(1, 2)$ e $f_y(1, 2)$.
10. Seja $w = \int_x^y e^{t^2} dt$, $x = rs^4$ e $y = r^4s$. Calcule $\frac{\partial w}{\partial r}$ e $\frac{\partial w}{\partial s}$.
11. Considere as funções f, g e h tais que $f(x, y) = (xy, x^2 + y, x - y)$, $g(u, v, w) = 2w \ln(uv)$ e $h(s) \in \mathbb{R}$, $s \in \mathbb{R}$. Seja $H(x, y) = (h \circ g \circ f)(x, y)$, h derivável em $\mathbb{R}$.
 - (a) Para ser possível calcular $\frac{\partial H}{\partial x}(1, 3)$, para que valor de s é preciso conhecer $h'(s)$?
 - (b) Supondo que para o valor de s do item anterior, $h'(s) = 5$, calcule $\frac{\partial H}{\partial x}(1, 3)$.
12. Mostre que a função $u(x, t) = F(x + ct) + G(x - ct)$, onde c é constante e F, G são de classe C^2 em $\mathbb{R}$, é solução da equação da onda $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.
13. A distribuição da temperatura de um disco com centro na origem é dada por $T(x, y)$, T de classe C^2 em $\mathbb{R}^2$. Sabe-se que $\frac{\partial^2 T}{\partial y \partial x}(x, y) = 0$ e $\frac{\partial T}{\partial y}(x, y) = 2$. Calcule $\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}(\rho, \theta)$, sendo $U(\rho, \theta) = T(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$.
14. Seja $g(u, v) = f(u+v, uv)$, f de classe C^2 em $\mathbb{R}^2$, $x = u+v$, $y = uv$. Calcule $\frac{\partial g}{\partial u}(1, 1)$ e $\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(1, 1)$, sabendo que $f_x(2, 1) = 3$, $f_y(2, 1) = -3$, $f_{xx}(2, 1) = 0$, $f_{xy}(2, 1) = f_{yx}(2, 1) = 1$, $f_{yy}(2, 1) = 2$.

15. Se a, b, c e k são constantes, mostre que $w = (a \cos cx + b \sin cx)e^{-kc^2t}$ satisfaz a equação do calor $\frac{\partial w}{\partial t} = k \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$.
16. Sejam $z = z(x, y)$, z de classe $\mathcal{C}^2$ em $\mathbb{R}^2$, $x = e^u \cos v$ e $y = e^u \sin v$.
Suponha que $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$. Calcule $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$.
17. Suponha que $f \in \mathcal{C}^2$ em $\mathbb{R}^2$, $c \neq 0$, c constante e $f(x, t)$ satisfaz a equação $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$.
Determine constantes m, n, p e q para que $g(u, v) = f(x, t)$, onde $x = mu + nv$, $mn \neq 0$ e $t = pu + qv$, $pq \neq 0$, satisfaça a equação $\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = 0$.

RESPOSTAS DA LISTA 6 (com indicação ou resumo de algumas resoluções)

- $F'(0) = 1$
- $w_r = r(2 \sin t + 2 \cos t + \sin(2t))$, $w_t = r^2(\cos t - \sin t + \cos 2t)$
- Aplicando a regra da cadeia e simplificando, $z_x = f\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x} \cdot f'\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y}{x} \cdot g'\left(\frac{y}{x}\right)$ e $z_y = f'\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{1}{x} \cdot g'\left(\frac{y}{x}\right)$.
Substituindo z_x e z_y na expressão do lado esquerdo da equação e simplificando, verifica-se que é igual à expressão do lado direito da equação.
- $\frac{dz}{dt}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{7}{2}$
- Não é possível “cortar” os termos $\frac{\partial w}{\partial x}$ que aparecem dos dois lados da equação pois, apesar de aparentemente serem iguais, têm significados diferentes. O termo do lado esquerdo é a derivada parcial da função composta e o do lado direito é a derivada parcial da função externa na composta.
- $w_\rho = -2\rho \cos(2\varphi)$; $w_\varphi = 2\rho^2 \sin(2\varphi)$; $w_\theta = 0$.
- Aplicando a regra da cadeia, $w_r = w_x \cdot \cos \theta + w_y \cdot \sin \theta$ e $w_\theta = w_x \cdot (-r \sin \theta) + w_y \cdot (r \cos \theta)$. Substituindo w_r e w_θ na expressão do lado direito da equação e usando simplificação trigonométrica, verifica-se que é igual à expressão do lado esquerdo da equação.
- Seja $r = \frac{y}{x}$; $s = \frac{x}{z}$; $t = \frac{z}{x}$ e $v = f(r, s, t)$. Aplicando a regra da cadeia para calcular as derivadas parciais, multiplicando-as pelos termos indicados na expressão do lado esquerdo da equação e simplificando, obtém-se $x \frac{\partial u}{\partial x} = m x^m v + x^m \left(-\frac{y}{x} \cdot \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{x}{z} \cdot \frac{\partial v}{\partial s} - \frac{z}{x} \cdot \frac{\partial v}{\partial t}\right)$; $y \frac{\partial u}{\partial y} = x^m \cdot \frac{y}{x} \cdot \frac{\partial v}{\partial r}$; $z \frac{\partial u}{\partial z} = x^m \left(-\frac{x}{z} \cdot \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{z}{x} \cdot \frac{\partial v}{\partial t}\right)$.
Somando e simplificando, verifica-se que é igual à expressão do lado direito da equação.
- $f_x(1, 2) = \frac{1 + 5 \ln 2}{4}$; $f_y(1, 2) = -\frac{3}{4}$.
- $w_r = -s^4 e^{r^2 s^8} + 4r^3 s e^{r^2 s^8}$; $w_s = -4rs^3 e^{r^2 s^8} + r^4 e^{r^2 s^8}$.
- (a) $s = -4 \ln 12$ (b) $\frac{\partial H}{\partial x}(1, 3) = -30 + 10 \ln 12$.
- $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F''(x + ct)(c^2) + G''(x - ct)(c^2)$; $c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = c^2(F''(x + ct) + G''(x - ct))$. São iguais.
- $-2\rho \sin \theta - (\rho \cos \theta) \cdot \frac{\partial T}{\partial x}(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) + (\rho^2 \sin^2 \theta) \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$
- $\frac{\partial g}{\partial u}(1, 1) = 0$; $\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(1, 1) = 1$
- $\frac{\partial w}{\partial t} = (a \cos cx + b \sin cx)(-kc^2)e^{-kc^2t}$; $k \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = k(-ac^2 \cos cx - bc^2 \sin cx)e^{-kc^2t}$, comparando, são iguais.
- $= 0$
- Existem várias respostas, pois $mn + c^2 pq = 0$ e $np + mq = 0$ são condições suficientes. Por exemplo, $m = n = 1$, $q = \frac{1}{c^2}$, $p = -\frac{1}{c^2}$.

UFF Universidade Federal Fluminense
EGM - Instituto de Matemática
GMA - Departamento de Matemática Aplicada

LISTA 7 - 2012-1

O gradiente e as curvas e superfícies de nível
Reta normal. Reta e plano tangente

1. A figura 1 mostra uma porção de um mapa da região sul de Minas Gerais onde estão indicadas as curvas de nível da função altura h com relação ao nível do mar. Existe uma linha grossa para cada 100 m de elevação e uma linha fina em cada intervalo de 20 m. Considere os pontos A , B , C , D e E no mapa. As setas indicam o vetor gradiente de h no ponto indicado. Diga se as relações abaixo são verdadeiras ou não, marcando um “V” se a relação for verdadeira e um “F” se ela for falsa.

☐ $h(C) = h(E),$	☐ $h(A) > h(C),$
☐ $\frac{\partial h}{\partial x}(A) > 0,$	☐ $\frac{\partial h}{\partial y}(A) > 0,$
☐ $\frac{\partial h}{\partial x}(B) < 0,$	☐ $\frac{\partial h}{\partial y}(B) < 0,$
☐ $\frac{\partial h}{\partial x}(D) > 0,$	☐ $\frac{\partial h}{\partial y}(E) < 0,$
☐ $\frac{\partial h}{\partial x}(A) > \frac{\partial h}{\partial x}(E),$	☐ $\frac{\partial h}{\partial x}(B) > \frac{\partial h}{\partial x}(D).$

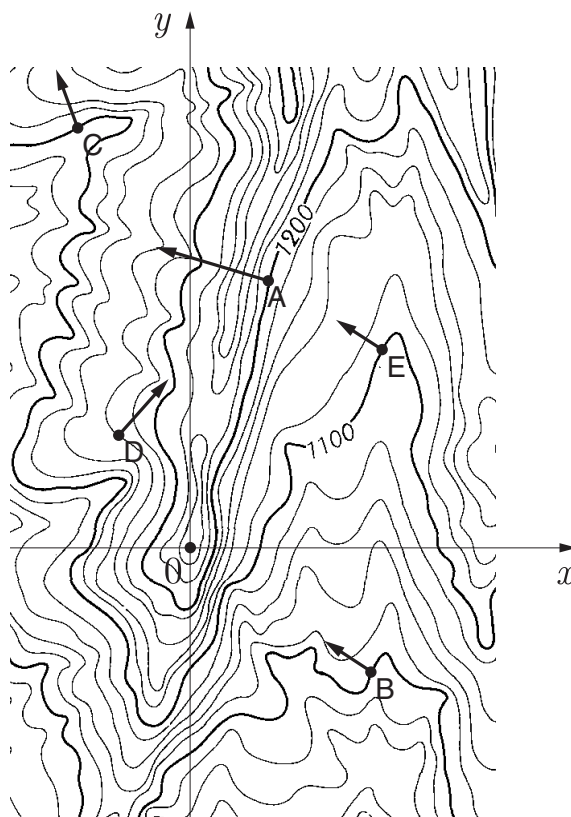


Figura 1: Mapa de contorno de uma região no sul de Minas Gerais.

2. Seja $f(x, y, z) = z - e^x \sin y$ e $P = (\ln 3, 3\pi/2, 2)$. Obtenha:
 - (a) $\nabla f(P)$
 - (b) A equação de S , a superfície de nível de f que contém P
 - (c) A equação da reta normal à S em P .
 - (d) A equação do plano tangente à S em P .
3. Determine a equação do plano tangente e da reta normal à superfície $x^2 + xy^2 + y^3 + z + 1 = 0$, contendo o ponto $P = (2, -3, 4)$.
4. Determine a equação do plano tangente e da reta normal à superfície $\sin(xy) + \sin(yz) + \sin(xz) = 1$, contendo o ponto $P = \left(1, \frac{\pi}{2}, 0\right)$.
5. Descreva parametricamente a reta tangente à curva de interseção das superfícies $x^2 + y^2 + z^2 = 49$ e $x^2 + y^2 = 13$, no ponto $(3, 2, -6)$ (Sugestão: observe que essa é a reta de interseção dos planos tangentes aos gráficos das superfícies, em P).
6. Seja S_1 o gráfico da função $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e S_2 a superfície de nível 0 de $F(x, y, z) = x^2 - y + z^2$. Seja $\mathcal{C} = S_1 \cap S_2$ e $P = (1, 2, 1) \in \mathcal{C}$. Determine a equação da reta tangente à $\mathcal{C}$ em P , sabendo que $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) = 3$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) = 5$.
7. As curvas definidas a seguir se interceptam no ponto $(2\pi, \pi)$, formando um ângulo de $\frac{\pi}{2}$ rad.

$$\gamma_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; xy - \cos(x - 2y) = 2\pi^2 - 1\} \quad \text{e} \quad \gamma_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = f(x)\}$$

- (a) Encontre um valor possível para $f'(2\pi)$. Quantas soluções tem esse problema?
 - (b) Resolva o mesmo problema supondo que o ângulo é $\frac{\pi}{6}$ rad.
- Sugestão: Nos dois casos encontre um vetor $\vec{u}$ perpendicular a curva γ_1 em $(2\pi, \pi)$, um vetor $\vec{v}$ tangente a curva γ_2 em $(2\pi, \pi)$ e use a fórmula do ângulo θ entre esses vetores, $\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}$.

RESPOSTAS DA LISTA 7

2. (a) $\nabla f(P) = (3, 0, 1)$ (b) $z - e^x \sin y = 5$ (c) $(x, y, z) = \left(\ln 3 + 3\lambda, \frac{3\pi}{2}, 2 + \lambda\right)$, $\lambda \in \mathbb{R}$
 (d) $3x + z = 2 + 3 \ln 3$.
3. Reta normal: $(x, y, z) = (2 + 13\lambda, -3 + 15\lambda, 4 + \lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, plano tangente: $13x + 15y + z = -15$.
4. Reta normal: $(x, y, z) = \left(1, \frac{\pi}{2}, \left(\frac{\pi}{2} + 1\right)\lambda\right)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, plano tangente: $z = 0$.
5. $(x, y, z) = (3 + 2\lambda, 2 - 3\lambda, -6)$, $\lambda \in \mathbb{R}$
6. $(x, y, z) = (1 - 9\lambda, 2 + 8\lambda, 1 + 13\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$
7. (a) Uma solução: $f'(2\pi) = 2$
 (b) Duas soluções: $f'(2\pi) = \frac{8 + 5\sqrt{3}}{11}$ e $f'(2\pi) = \frac{8 - 5\sqrt{3}}{11}$.



Universidade Federal Fluminense
EGM - Instituto de Matemática
GMA - Departamento de Matemática Aplicada

LISTA 8 - 2012-1

Derivada direcional

1. Sendo $f(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^2$, calcule a derivada direcional $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}$ no ponto $(1, 2, 1)$ na direção do vetor $\vec{v} = 4\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$.
2. A temperatura do ar em pontos do espaço é dada pela função $T(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^2$. Um mosquito localizado em $(1, 2, 1)$ deseja esfriar-se o mais rápido possível. Em que direção ele deve voar?
3. Em que direção se deve seguir, começando da origem, para obter a taxa mais rápida de decrescimento da função $f(x, y, z) = (2 - x - y)^2 + (3x + 2y - z + 1)^2$?
4. Suponha que a temperatura T num ponto $P(x, y, z)$ é dada por $T(x, y, z) = 2x^2 - y^2 + 4z^2$. Determine a taxa de variação de T no ponto $(1, -2, 1)$ na direção do vetor $4\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$. Em que direção T cresce mais rapidamente nesse ponto? Qual a taxa máxima de crescimento?

Nos exercícios 5. e 6. considere $\vec{u} = (a, b)$ um vetor unitário e calcule $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0, 0)$.

$$5. f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad 6. f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

7. Uma função de classe C^1 f tem, no ponto $(1, 1)$, derivada direcional igual a 3 na direção do vetor $3\vec{i} + 4\vec{j}$ e igual a -1 na direção do vetor $4\vec{i} - 3\vec{j}$. Calcule:
 - (a) $\nabla f(1, 1)$
 - (b) $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, 1)$, onde $\vec{u}$ tem a direção do vetor $\vec{i} + \vec{j}$.
8. Suponha que $T(x, y) = 40 - x^2 - 2y^2$ represente uma distribuição de temperatura no plano xy e um indivíduo que se encontra na posição $(3, 2)$ pretende dar um passeio.
 - (a) Descreva o lugar geométrico dos pontos que ele deveria percorrer para desfrutar sempre da mesma temperatura.
 - (b) Qual a direção que deveria tomar se quisesse caminhar na direção de maior crescimento da temperatura?
 - (c) Se x e y são medidos em km e a temperatura T em $^{\circ}\text{C}$, de quanto a temperatura se elevará aproximadamente, caso caminhe 0,01 km na direção encontrada no item (b)?
 - (d) De quanto decrescerá aproximadamente a temperatura, caso caminhe 0,01 km na direção $\vec{j}$?
9. A temperatura de uma chapa é dada por $T(x, y) = x^2 + y^2$ (x, y em cm e T em $^{\circ}\text{C}$). Calcule de quanto ela varia aproximadamente, se caminharmos 1 cm a partir do ponto $(3, 4)$ na direção do vetor que faz um ângulo θ com o semi-eixo x positivo, se: (a) $\theta = 30^{\circ}$; (b) $\theta = 210^{\circ}$?
10. Calcule a derivada direcional de $f(x, y) = x^2 + y^2$, na direção da tangente à circunferência $x^2 + y^2 = 25$ em $(3, 4)$, no mesmo ponto.
11. A temperatura de uma chapa plana é dada por $T(x, y) = x^2 + y^2$. A partir do ponto $P(3, 4)$, determine:
 - (a) O gradiente da temperatura;
 - (b) A direção em que a temperatura cresce o mais rápido possível e qual a taxa de crescimento?
 - (c) A direção em que a temperatura decresce o mais rápido possível e qual a taxa de decrescimento?
 - (d) $D_{\vec{u}}T(3, 4) = \frac{\partial T}{\partial \vec{u}}(3, 4)$, onde $\vec{u}$ faz um ângulo de 30° com o gradiente de T em $(3, 4)$

12. Num balão a temperatura T em qualquer ponto P diferente do centro C é positiva e proporcional ao quadrado de sua distância ao centro C . Calcule a taxa de variação da temperatura em P seguindo um vetor unitário $\vec{u}$. Caracterize as taxas máxima, mínima e nula no ponto P .
13. A temperatura T numa câmara cresce com a altura. As isotermas são lâminas horizontais e o módulo do vetor gradiente em cada ponto (x, y, z) é diretamente proporcional à altura z do ponto. Determine a expressão de T em (x, y, z) , sabendo-se que é nula quando a altura é zero.
14. Verificou-se que a densidade do ar em certa região industrial é mais sensível na direção vertical e que a taxa de variação é inversamente proporcional ao quadrado da altura. Estude a densidade do ar sabendo que tende a zero quando a altura tende a infinito.

RESPOSTAS DA LISTA 8

1. $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, 2, 1) = 4$
2. $-\nabla f(1, 2, 1) = (-2, 4, -2)$
3. $-\nabla f(0, 0, 0) = (-2, 0, 2)$
4. $\frac{4\sqrt{21}}{3}; (4, 4, 8); 4\sqrt{6}$
5. $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0, 0) = a^3$
6. $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0, 0) = \begin{cases} 0, & \vec{u} = (\pm 1, 0) \text{ ou } \vec{u} = (0, \pm 1) \\ \neq, & \text{caso contrário} \end{cases}$
7. (a) $\nabla f(1, 1) = (1, 3)$ (b) $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, 1) = 2\sqrt{2}$
8. (a) $x^2 + 2y^2 = 17$ (b) $\nabla T(3, 2) = (-6, -8)$
 (c) $\Delta T \simeq dT = 0,1^\circ C$, pois $\Delta x = -\frac{3}{5} \times 0,01$ e $\Delta y = -\frac{4}{5} \times 0,01$
 (d) $\Delta T \simeq dT = 0,08^\circ C$, pois $\Delta x = 0$ e $\Delta y = 0,01$
9. (a) $\Delta T \simeq 4 + 3\sqrt{3}^\circ C$ (b) $\Delta T \simeq -4 - 3\sqrt{3}^\circ C$
10. zero
11. (a) $(6, 8)$ (b) $(6, 8)$; taxa máxima = 10
 (c) $(-6, -8)$; taxa mínima = -10 (d) $5\sqrt{3}$
12. $dT_{\vec{u}}(P) = 2k\vec{CP} \cdot \vec{u}$, $k > 0$; taxa máxima = $2k\|\vec{CP}\|$; taxa mínima = $-2k\|\vec{CP}\|$;
 taxa nula na direção e nos dois sentidos perpendiculares a $\vec{CP}$.
13. $T(x, y, z) = \frac{1}{2}kz^2$, k constante de proporcionalidade positiva.
14. $T(x, y, z) = \frac{k}{z}$, k constante de proporcionalidade positiva.



Universidade Federal Fluminense
EGM - Instituto de Matemática
GMA - Departamento de Matemática Aplicada

LISTA 9 - 2012-1

Máximos e mínimos.

Nos exercícios 1. a 8. use o teorema de Weierstrass (teorema dos valores extremos) para dizer se é possível garantir, a priori, se o problema de otimização possui ou não uma solução.

1. Maximizar $f(x, y) = x + y$
sujeito às restrições $x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1$.
2. Maximizar $f(x, y) = x^2 - y^2$
sujeito às restrições $x \geq 0, y \geq 0$.
3. Minimizar $f(x, y) = x \cdot y$
sujeito às restrições $x \geq 0, y \geq 0, x + y = 1$.
4. Maximizar $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$
sujeito às restrições $x^2 + y^2 < 1$.
5. Maximizar $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$
sujeito às restrições $x^2 + y^2 \leq 1$.
6. Maximizar $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$
sujeito às restrições $x^2 + y^2 = 1$.
7. Maximizar $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$
sujeito às restrições $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 1$.
8. Maximizar $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$
sujeito às restrições $x \geq 0, y \geq 0, z \leq x^2 + y^2$.

Nos exercícios 9. a 13. obtenha e classifique os pontos críticos da função dada. Depois de classificar, por pura inspeção ou usando um programa computacional gráfico, tente concluir se f possui máximo ou mínimo global nos extremantes locais de f .

Obs.: os extremantes locais de uma função são os pontos de máximo e de mínimo local da função; os extremantes globais de uma função são os pontos de máximo e de mínimo global da função.

9. $f(x, y) = x^2 - xy + y$
10. $f(x, y) = x + y \sin x$
11. $f(x, y) = x^5 + y^5 - 5x - 5y$
12. $f(x, y) = x^2 + 2y^2 + 3xy + 2x + 2y$
13. $f(x, y) = 3(x^2 + 3y^2)e^{-x^2 - y^2}$

Nos exercícios 14. a 17. utilize o seguinte resultado para encontrar os pontos de máximo e mínimo global da função dada.

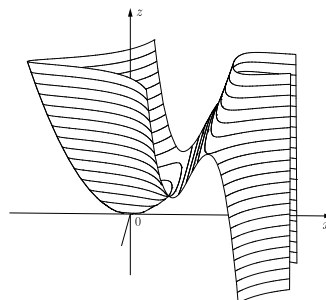
Seja $f(x, y) = ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f$, onde a, b, c, d, e e f são constantes, $a \neq 0$ ou $b \neq 0$ ou $c \neq 0$. É possível provar que se (x_0, y_0) for um extremante local de f então (x_0, y_0) também será um extremante global de f .

14. $f(x, y) = x^2 + 2xy + 2y^2 - x + 2y$
15. $f(x, y) = x + 2y - 2xy - x^2 - 3y^2$
16. $f(x, y) = x^2 + 3xy + 4y^2 - 6x + 2y$
17. $f(x, y) = 4x^2 + 4xy + y^2 - 4x - 2y$
18. Obtenha o máximo de $f(x, y) = xy e^{-x-y}$ para $x \geq 0, y \geq 0$. (Sugestão: após encontrar os pontos críticos de f e verificar que (x_0, y_0) é um ponto de máximo relativo de f , mostre que $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$).

19. Mostre que a função $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x, y) = \sin(x + y) + \sin x + \sin y$ admite máximo local em $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$ e mínimo local em $\left(\frac{5\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right)$.

20. Considere a função $z = f(x, y) = x^2 + (1 - x)^3 y^2$.

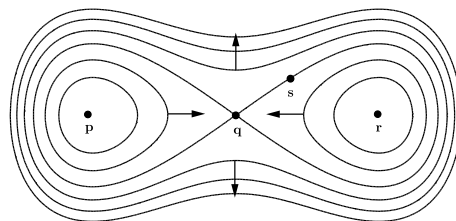
- (a) Encontre o único ponto crítico de f e verifique que é um ponto de mínimo local de f ;
- (b) Observe o gráfico de f na figura ao lado e conclua que o valor de f nesse ponto não é um mínimo global de f .



O objetivo desse exercício foi verificar que a afirmação descrita a seguir, bastante útil para determinar o máximo ou o mínimo absoluto de uma função real de uma variável, infelizmente não pode ser generalizada para função real de mais de uma variável: “se uma função real de uma variável, contínua em um intervalo I , tem um único ponto crítico no interior de I , e se esse ponto for um ponto de máximo relativo (ou de mínimo relativo) da função então também será um ponto de máximo absoluto (ou de mínimo absoluto) da função em I ”.

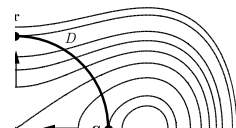
21. Na figura a seguir encontram-se as curvas de nível de uma função escalar f de classe C^∞ definida em $\mathbb{R}^2$. Os únicos pontos críticos de f são os pontos $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ e $\mathbf{r}$. Os vetores indicam a direção e sentido do vetor gradiente.

- (a) O ponto $\mathbf{p}$ é máximo local, mínimo local ou ponto de sela para a função f ? Justifique sua resposta.
- (b) O ponto $\mathbf{q}$ é máximo local, mínimo local ou ponto de sela para a função f ? Justifique sua resposta.
- (c) O ponto $\mathbf{r}$ é máximo local, mínimo local ou ponto de sela para a função f ? Justifique sua resposta.
- (d) O ponto $\mathbf{s}$ é máximo local, mínimo local ou ponto de sela para a função f ? Justifique sua resposta.



22. Na figura a seguir encontram-se algumas curvas de nível de uma função escalar f e uma curva de nível D de uma função escalar h , com f e h de classe C^∞ definidas em $\mathbb{R}^2$. Os vetores indicam a direção e sentido do vetor gradiente.

- (a) O ponto $\mathbf{p}$ pode ser extremo local de f na curva de nível D ? Em caso afirmativo, o ponto $\vec{p}$ seria máximo ou mínimo local? É possível garantir a globalidade?
- (b) O ponto $\mathbf{q}$ pode ser extremo local de f na curva de nível D ? Em caso afirmativo, o ponto $\vec{q}$ seria máximo ou mínimo local? É possível garantir a globalidade?
- (c) O ponto $\mathbf{r}$ pode ser extremo local de f na curva de nível D ? Em caso afirmativo, o ponto $\vec{r}$ seria máximo ou mínimo local? É possível garantir a globalidade?
- (d) O ponto $\mathbf{s}$ pode ser extremo local de f na curva de nível D ? Em caso afirmativo, o ponto $\vec{s}$ seria máximo ou mínimo local? É possível garantir a globalidade?



Desenho das curvas de nível de f e do conjunto admissível D (curva com traçado mais forte).

Nos exercícios 23. a 25. encontre os extremantes da *função objetivo* f no conjunto admissível (conjunto que satisfaz a restrição). Encontre também, se houverem, os extremantes de f em $\mathbb{R}^2$.

23. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, sujeito à $x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$.
24. $f(x, y) = x^2 + y^2$, sujeito à $5x^2 + 6xy + 5y^2 \leq 8$.
25. $f(x, y) = y^2 - x^2$, sujeito à $x^2 + y^2 \leq 4$.
26. Determine o valor máximo de $f(x, y) = x + 5y$ onde x e y estão sujeitos às restrições: $5x + 6y \leq 30$, $3x + 2y \leq 12$, $x \geq 0$ e $y \geq 0$. (sugestão: desenhe o conjunto admissível de f e as curvas de nível de f , conclua que a solução está em um dos vértices desse conjunto e resolva o problema)
27. Encontre a expressão geral (em termos de todos os parâmetros) do ponto (x_1, x_2) que maximiza a *função de Cobb-Douglas* $U(x_1, x_2) = kx_1^\alpha x_2^{1-\alpha}$ sujeito a $p_1x_1 + p_2x_2 = I$. (obs. $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, a função de Cobb-Douglas é usada em economia e representa uma função de produção)
28. O lucro de uma loja foi determinado como sendo $L(x, y) = 1400 - (12 - x)^2 - (40 - y)^2$. Quais os valores de x e y que o maximizam?
29. Um disco circular tem a forma da região $x^2 + y^2 \leq 1$. Se T graus é a temperatura em qualquer ponto do disco e $T = 2x^2 + y^2 - y$, encontre os pontos mais quentes e mais frios do disco.
30. Encontre o ponto (x^*, y^*) da parábola $y = 2x^2$ que está mais próximo do ponto $(4, 5/4)$. Você pode assumir que tal ponto existe.
31. Determine a menor distância do ponto $P = (2, 1, -1)$ ao plano $4x - 3y + z = 56$ e dê o ponto do plano em que a distância é mínima.
32. Uma caixa de madeira sem tampa deve ser construída de forma a conter α cm³, onde α é um número positivo dado. Ignorando-se a espessura da madeira, como a caixa deve ser construída a fim de se utilizar a menor quantidade de madeira (medida pela soma das áreas das faces da caixa)?
33. Maximize $x^2y^2z^2$ sujeito a $x^2 + y^2 + z^2 = c$, onde c é uma constante real positiva fixa. Qual é o valor máximo da função-objetivo no conjunto determinado pela restrição? Mostre que para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$ ocorre

$$\sqrt[3]{x^2 \cdot y^2 \cdot z^2} \leq \frac{x^2 + y^2 + z^2}{3}.$$

Esta desigualdade afirma que a *média geométrica* de três números positivos é sempre menor ou igual do que a *média aritmética* destes três números. Mais ainda, estas médias são iguais se, e somente se, os três números (x^2 , y^2 e z^2) são iguais. Naturalmente, a mesma demonstração funciona para um conjunto de n números positivos:

$$\sqrt[n]{x_1^2 \cdot x_2^2 \cdot \dots \cdot x_n^2} \leq \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}$$

com igualdade se, e somente se, $x_1^2 = x_2^2 = \dots = x_n^2$.

34. Obtenha o ponto da elipse $4x^2 + y^2 = 4$ situado no 1o. quadrante, no qual a tangente à curva forma com os eixos coordenados o triângulo de menor área possível. Calcule essa área mínima.
35. Determine as dimensões do paralelepípedo retângulo de volume máximo e faces paralelas aos planos coordenados que pode ser inscrito no elipsóide $16x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 144$.
36. Determine a equação do plano tangente à superfície $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1$, $x > 0$, $y > 0$ e $z > 0$ que forma com os planos coordenados um tetraedro de volume mínimo.

RESPOSTAS DA LISTA 9 (com indicação ou resumo de algumas resoluções)

1. Sim 2. Não 3. Sim 4. Não 5. Sim 6. Sim 7. Sim 8. Não
9. $(1, 2)$: sela. 10. $(k\pi, (-1)^{k+1})$, $k \in \mathbb{Z}$: selas.
11. mín local de f em $(1, 1)$; f não possui mín global, pois quando $x = \text{constante}$ e $y \rightarrow -\infty$, temos $f(x, y) \rightarrow -\infty$; máx local de f em $(-1, -1)$; f não possui máximo global, pois quando $x = \text{constante}$ e $y \rightarrow \infty$, temos $f(x, y) \rightarrow \infty$; selas: $(-1, 1)$ e $(1, -1)$.
12. $(2, -2)$: sela
13. $f(0, 0) = 0 = \text{mín local de } f = \text{mín global de } f$, pois $x^2 + 3y^2 \geq 0, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ e $e^t > 0, \forall t \in \mathbb{R}$; $(0, 1)$ e $(0, -1)$ são pontos de máximo local de f ; com um programa computacional visualize o gráfico de f e observe que o máx global ocorre nesses pontos; $f(0, \pm 1) = 9e^{-1} = \text{máx global de } f$; selas: $(1, 0)$ e $(-1, 0)$.
14. mín local e global em $\left(2, -\frac{3}{2}\right)$ 15. máx local e global em $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$
16. mín local e global em $\left(\frac{54}{7}, -\frac{22}{7}\right)$
17. mín local e global em todos os pontos da reta $2x + y = 1$
18. máx de $f = e^{-2}$, em $(1, 1)$.
19. $\nabla f\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) = (0, 0)$; $Hess(f)\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) = \frac{9}{4} > 0$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3} < 0 \Rightarrow \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$ é ponto de máx local.
 $\nabla f\left(\frac{5\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right) = (0, 0)$; $Hess(f)\left(\frac{5\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right) = \frac{9}{4} > 0$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{5\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right) = \sqrt{3} > 0 \Rightarrow \left(\frac{5\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right)$ é ponto de mín local.
20. (a) $(0, 0)$
 (b) Pelo gráfico existem valores de f menores que $f(0, 0) = 0$.
21. (a) Mínimo local. Partindo de $\mathbf{p}$, f cresce. (c) Idem item (a)
 (b) Sela. Partindo de $\mathbf{q}$, em duas direções f cresce e nas outras duas f decresce. (d) Nenhum deles. O ponto s não é ponto crítico.
22. (a) e (b) Sim. Mínimo local. (c) e (d) Não. Máximo local.
23. mín de $f = 1$ em $(\pm 1, 0, 0)$; máx de $f = 9$ em $(0, 0, \pm 3)$. Sem a restrição, o único ponto crítico de f é $(0, 0, 0)$ que é um ponto de mínimo local e global de f , pois $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \geq 0 = f(0, 0, 0)$.
24. mín de $f = 0$ em $(0, 0)$; máx de $f = 4$ em $\pm(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$. Sem a restrição, o único ponto crítico de f é $(0, 0)$ que é um ponto de mínimo local e global de f .
25. mín de $f = -4$ em $(0, \pm 2)$; máx de $f = 4$ em $(\pm 2, 0)$. Sem a restrição, o único ponto crítico de f é $(0, 0)$ que é um ponto de sela do gráfico de f .
26. máx de $f = 25$ em $(0, 5)$.
27. $(x_1, x_2) = \left(\frac{\alpha I}{p_1}, \frac{(1-\alpha)I}{p_2}\right)$
28. $x = 12, y = 40$
29. Ponto mais frio: $\left(0, \frac{1}{2}\right), T = -\frac{1}{2}$;
 pontos mais quentes: $\left(\pm \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right), T = \frac{9}{4}$
30. $(x^*, y^*) = (1, 2)$
31. A distância mínima é $2\sqrt{26}$, o ponto é $(10, -5, 1)$.
32. Lados da base $\sqrt[3]{2\alpha}$ e altura $\sqrt[3]{\alpha}/2$
33. Máximo = $\frac{c^3}{27}$. Logo $x^2 y^2 z^2 \leq \frac{c^3}{27} \Rightarrow \sqrt[3]{x^2 y^2 z^2} \leq \sqrt[3]{\frac{c^3}{27}} = \frac{c}{3} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{3}$
34. $6x + 4y + 3z = 12\sqrt{3}$, que corresponde ao plano tangente em $\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{3}{\sqrt{3}}, \frac{4}{\sqrt{3}}\right)$.
35. O ponto é $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right)$ e a área mínima é igual a 2.
36. $x = \sqrt{3}, y = 2\sqrt{3}, z = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.



Universidade Federal Fluminense
EGM - Instituto de Matemática
GMA - Departamento de Matemática Aplicada

LISTA 10 - 2012-1

Função vetorial de várias variáveis.
Matriz jacobiana. Aproximação afim.
Regra da cadeia.

Em cada exercício de 1. a 6. fazer o seguinte:

- calcular a derivada (matriz jacobiana) da função no ponto X_0 indicado;
- se possível, calcular o jacobiano (determinante da matriz jacobiana) da função no mesmo ponto;
- encontrar a diferencial $d_{X_0}f$ em $X - X_0$;
- determinar a função afim $A(X)$ que melhor aproxima a função f dada em X perto de X_0 .

$$1. f(X) = f\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right) = \sqrt{y+x^2} \quad \text{em} \quad X_0 = \left(\begin{matrix} x_0 \\ y_0 \end{matrix}\right) = \left(\begin{matrix} -1/2 \\ 0 \end{matrix}\right)$$

$$2. f(X) = f(u, v) = (u \cos 2v, u \sin 2v) \quad \text{em} \quad X_0 = (u_0, v_0) = (2, \pi/2)$$

$$3. f(X) = f(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ x_2 - x_1 \\ x_1 x_2 \end{bmatrix} \quad \text{em qualquer} \quad X_0 = (x_1^0, x_2^0)$$

$$4. f(X) = f(t) = [t \quad t^2 \quad t^3] \quad \text{em} \quad X_0 = t_0 = 0$$

$$5. f(X) = f(x, y, z) = (x^2 - y^2, x^2 + z^2, x + y - z) \quad \text{em} \quad X_0 = (x_0, y_0, z_0) = (1, 0, -1)$$

$$6. f(X) = f(\rho, \theta, \phi) = (\rho \cos \theta \sin \phi, \rho \sin \theta \sin \phi) \quad \text{em} \quad X_0 = (\rho_0, \theta_0, \phi_0) = (1, 3\pi/2, \pi/2)$$

$$7. \text{ Usando uma função afim, calcule aproximadamente o vetor } \begin{pmatrix} \sqrt{16,02} - \sqrt[3]{0,97} \\ \sqrt[4]{16,02} - \sqrt{1,04} \\ \sqrt[5]{1,04} \end{pmatrix}.$$

8. Considere $c \in \mathbb{R}$, c constante, $a < t < b$ e as funções $f : (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $g : (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\phi : (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciáveis. Mostre que:

$$(a) (f + g)' = f' + g' \quad \text{e} \quad (cf)' = cf'$$

$$(b) (\phi f)' = \phi f' + \phi' f$$

$$(c) (f \cdot g)' = f \cdot g' + f' \cdot g \quad (\text{lembre que para quaisquer dois vetores do } \mathbb{R}^n \text{ podemos trocar a ordem no produto escalar}).$$

$$(d) \text{ para } n = 2 \text{ ou } 3, (f \times g)' = f \times g' + f' \times g \quad (\text{lembre que não podemos trocar a ordem no produto vetorial de quaisquer dois vetores do } \mathbb{R}^2 \text{ ou do } \mathbb{R}^3)$$

$$(e) \text{ para } f \text{ não nula, } f \cdot \frac{df}{dt} = \|f\| \frac{d\|f\|}{dt} \quad (\text{sugestão: use } \|f\| = \sqrt{f \cdot f})$$

$$(f) \text{ para } f \text{ não nula: } \|f\| \text{ é constante} \Leftrightarrow f \cdot f' = 0$$

Nos exercícios 9. a 11. mostre que a função dada é diferenciável ou, se não for diferenciável, indique em que pontos não é diferenciável.

$$9. f(x, y) = \left(\frac{x(y-1)}{x^2 + (y-1)^2}, \frac{x^3}{x^2 + y^2}, \frac{(x-1)^4}{(x-1)^2 + y^2} \right), \quad \text{se } (x, y) \neq (0, 0); (x, y) \neq (1, 0); (x, y) \neq (0, 1)$$

$$f(0, 0) = (0, 0, 1); \quad f(1, 0) = (-1/2, 1, 0); \quad f(0, 1) = (0, 0, 1/2).$$

$$10. f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(X) = \|X\|$$

$$11. f \begin{bmatrix} r \\ s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/(r-t) \\ s/(r+t) \end{bmatrix}$$

12. Sejam $X \in \mathbb{R}^n$, A uma matriz $m \times n$ e f a função linear $f(X) = AX$. Prove:
 $d_{X_0}f(X) = AX$ para todo X_0 , isto é, a diferencial em todo ponto X_0 de uma função linear f é a própria função linear f .
13. Sejam $F(x, y, z) = (3x^2 + yz, z + y^3)$ e $G(x, y) = (x^2 + y^2, xy, x^3, x + y^3)$.
 (a) Verifique que uma das compostas $F \circ G$ ou $G \circ F$ não está definida;
 (b) Determine $F'(x, y, z)$ e $G'(x, y)$;
 (c) Determine $(F \circ G)'(1, -1)$ ou $(G \circ F)'(1, -1, 2)$, a que for possível.
14. Se a função f aplicada em um vector não nulo $\vec{r} = X \in \mathbb{R}^n$ é uma função real do seu comprimento $r = \|\vec{r}\|$, isto é, $f(\vec{r}) = g(r)$ e se g é diferenciável,
 (a) mostre que $\nabla f(\vec{r}) = \frac{g'(r)}{r} \vec{r}$;
 (b) determine $\nabla f(\vec{r})$ quando (i) $g(r) = \frac{1}{r^3}$ (ii) $g(r) = \ln r$.
15. Seja $h(x, y, z) = g(y^2 + xz, \sqrt{xyz})$, onde g é uma função real diferenciável. Encontre $\nabla h(1, -1, -4)$ sabendo que $\nabla g(-3, 2) = (1, 3)$ e $\nabla g(1, 3) = (-3, 2)$.
16. Seja $f(u) = (u^2 + 1, \sqrt{u})$, onde $u = g(x, y, z)$ é uma função real diferenciável, tal que $g(2, 1, 3) = 1$ e $\nabla g(2, 1, 3) = (5, 3, -1)$. Se $F = f \circ g$, encontre $\frac{\partial F}{\partial x}(2, 1, 3)$, $\frac{\partial F}{\partial y}(2, 1, 3)$ e $\frac{\partial F}{\partial z}(2, 1, 3)$.

RESPOSTAS DA LISTA 10 (com indicação ou resumo de algumas resoluções)

1. (i) $f' \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}$ (iii) $d_{X_0}f \begin{pmatrix} x+1/2 \\ y-0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} - x + y$ (iv) $A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -x + y$
2. (i) $f'(2, \pi/2) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$ (ii) $\det(Jf(2, \pi/2)) = 4$ (iii) $d_{X_0}f(u-2, v-\pi/2) = \begin{bmatrix} 2-u \\ 2\pi-4v \end{bmatrix}$
 (iv) $A(u, v) = \begin{bmatrix} -u \\ 2\pi-4v \end{bmatrix}$ ou $A(u, v) = (-u, 2\pi-4v)$
3. (i) $f'(x_1^0, x_2^0) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ x_2^0 & x_1^0 \end{bmatrix}$ (iii) $d_{X_0}f(x_1-x_1^0, x_2-x_2^0) = \begin{bmatrix} x_1-x_2-x_1^0+x_2^0 \\ -x_1+x_2+x_1^0-x_2^0 \\ x_2^0x_1+x_1^0x_2-2x_1^0x_2^0 \end{bmatrix}$
 (iv) $A(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} x_1-x_2 \\ -x_1+x_2 \\ x_2^0x_1+x_1^0x_2-x_1^0x_2^0 \end{bmatrix}$
4. (i) $f'(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ (iii) $d_{X_0}f(t-0) = \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ (iv) $A(t) = \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
5. (i) $f'(1, 0, -1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ (ii) $\det(Jf(1, 0, -1)) = 4$
 (iii) $d_{X_0}f(x-1, y, z-0) = \begin{pmatrix} 2x-2 \\ 2x-2z-4 \\ x+y-z-2 \end{pmatrix}$ (iv) $A(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x-1 \\ 2x-2z-2 \\ x+y-z \end{pmatrix}$
6. (i) $f'(1, 3\pi/2, \pi/2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (iii) $d_{X_0}f(\rho-1, \theta-3\pi/2, \phi-\phi) = \begin{pmatrix} \theta-3\pi/2 \\ -\rho+1 \end{pmatrix}$
 (iv) $A(\rho, \theta, \phi) = \begin{pmatrix} \theta-3\pi/2 \\ -\rho \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 3,0125 \\ 0,980625 \\ 1,008 \end{pmatrix}$

9. A primeira função coordenada de f não é contínua em $(0,1)$ (prove isso calculando os limites pelos caminhos $(x,y) = (t,1), t \rightarrow 1$ e $(x,y) = (t,t+1), t \rightarrow 0$), logo a função f não é contínua em $(0,1)$. Aplicando a contra-recíproca do teorema "*função diferenciável em $X \implies$ função contínua em X* " concluímos que a função f não é diferenciável em $(0,1)$.

A função f não é diferenciável em $(0,0)$. Para provar isso, calcule as derivadas parciais em $(0,0)$ e verifique que o limite da definição de diferenciabilidade não existe.

A função f é diferenciável em $(1,0)$. Para provar isso, calcule as derivadas parciais em $(1,0)$ e verifique que o limite da definição de diferenciabilidade é o vetor $(0,0,0)$.

A função f é diferenciável nos pontos restantes. Para provar isso, calcule as derivadas parciais e verifique que todas são contínuas nesses pontos, daí aplique o teorema "*uma função é de classe C^1 em X , isto é, tem todas as derivadas parciais contínuas em $X \implies$ a função é diferenciável em X* ".

10. f não é diferenciável ponto $(0,0,\dots,0)$. Para provar isso verifique que não existem as derivadas parciais em $(0,0,\dots,0)$ e aplique a contra-recíproca do teorema "*uma função é diferenciável em $X \implies$ existem todas as derivadas parciais da função em X* ".
11. f é diferenciável pois é diferenciável em todos os pontos do domínio. Para provar isso verifique que f é de classe C^1 em todos os pontos do domínio. Observe que $(r,s,t); r=t$ ou $r=-t$ não estão no domínio.
13. (a) Apenas $(G \circ F)$ está definida pois a imagem de F e o domínio de G estão contidos no espaço de dimensão 2. A composta $(F \circ G)$ não está definida pois a imagem de G e o domínio de F estão contidos em espaços de dimensões diferentes, 4 e 3 respectivamente.

(b) $F'(x,y,z) = \begin{pmatrix} 6x & z & y \\ 0 & 3y^2 & 1 \end{pmatrix} \quad G'(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ y & x \\ 3x^2 & 0 \\ 1 & 3y^2 \end{pmatrix}$

(c) $G'(F(1,-1,2)) \cdot F'(1,-1,2) = \begin{pmatrix} 12 & 10 & 0 \\ 6 & 5 & 0 \\ 18 & 6 & -3 \\ 6 & 11 & 2 \end{pmatrix}$

14. (b) Quando $g(r) = \frac{1}{r^3}$, $\nabla f(\vec{r}) = \frac{-3}{r^5} \vec{r}$. Quando $g(r) = \ln r$, $\nabla f(\vec{r}) = \frac{1}{r^2} \vec{r}$

15. $(-1, -5, 1/4)$

16. $\frac{\partial F}{\partial x}(2,1,3) = (10, 5/2) \quad \frac{\partial F}{\partial y}(2,1,3) = (6, 3/2) \quad \frac{\partial F}{\partial z}(2,1,3) = (-2, -1/2)$



Universidade Federal Fluminense
EGM - Instituto de Matemática
GMA - Departamento de Matemática Aplicada

LISTA 11 - 2012-1

Função vetorial de várias variáveis.
Função inversa e Teorema da Função Inversa.

$$1. \text{ Considere as funções } f: U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow f(U) \subset \mathbb{R}^2 \quad \text{e} \quad g: V \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow g(V) \subset \mathbb{R}^2$$

$$(u, v) \longrightarrow \left(\sqrt{\frac{u-v}{2}}, \frac{u+v}{2} \right) \quad (x, y) \longrightarrow (y+x^2, y-x^2)$$

onde $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; u > v\}$ e $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0\}$.

(a) Verifique que $(g \circ f)(u, v) = (u, v), \forall (u, v) \in U \subset \mathbb{R}^2$ e $(f \circ g)(x, y) = (x, y); \forall (x, y) \in V \subset \mathbb{R}^2$.
O que se pode concluir sobre f e g ?

(b) Determine $Df(u, v)$ e $Dg(x, y)$.

(c) Se $(x, y) = f(u, v)$ e $(u, v) = g(x, y)$ e I é a matriz identidade 2×2 , faça os produtos nos lados esquerdos das igualdades a seguir e verifique que:

$$Dg(f(u, v)) \times Df(u, v) = I, \quad \forall (u, v) \in U \subset \mathbb{R}^2 \quad \text{e}$$

$$Df(g(x, y)) \times Dg(x, y) = I, \quad \forall (x, y) \in V \subset \mathbb{R}^2.$$

Sem calcular esses produtos, já era esperado que essas igualdades se verificassem. Por que?

2. Seja $(u, v, w) = f(x, y, z), (x, y, z) \in U$, onde U é um conjunto aberto e f é de classe $\mathcal{C}^1$.

$$\text{Sabe-se que } (1, 0, -1) \in U, \quad f(1, 0, -1) = (1, 2, -3) \quad \text{e} \quad Df(1, 0, -1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Existe uma função f^{-1} inversa da função f definida em $f(V)$, onde V é uma vizinhança de $(1, 0, -1)$, $f(V)$ é um conjunto aberto, $(1, 2, -3) \in f(V)$ e f^{-1} é de classe $\mathcal{C}^1$.
Porque é possível garantir que essa afirmação é verdadeira?

(b) Encontre $Df^{-1}(1, 2, -3)$

(c) Encontre $Df^{-1}(1, 2, -3)[(u, v, w) - (1, 2, -3)]$, para $(u, v, w) \in f(V)$;

(d) Encontre uma aproximação afim de $f^{-1}(u, v, w)$, para $(u, v, w) \in f(V)$.

$$3. \text{ Seja } f: U = \mathbb{R}^3 \longrightarrow f(U) = \mathbb{R}^3$$

$$(x, y, z) \longrightarrow (u, v, w) = (x, y^3, z^5)$$

(a) Encontre explicitamente a inversa de f , que é uma função $f^{-1}: f(U) = \mathbb{R}^3 \longrightarrow U = \mathbb{R}^3$

$$(u, v, w) \longrightarrow (x, y, z)$$

(b) Encontre o jacobiano $\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)}$ em qualquer (x, y, z)

(c) Verifique que $\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} = 0$ em qualquer $(x, 0, z)$ e em qualquer $(x, y, 0)$

(d) Os itens (a) e (c) contradizem o Teorema da Função Inversa? Explique.

4. Seja $F(x, y) = (e^{x+y}, e^{x-y})$ com domínio $U = \mathbb{R}^2$.

(a) Mostre que F admite inversa numa vizinhança de qualquer $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(b) Determine $DF^{-1}(F(-1, -1))$.

5. Seja $F(x, y, z) = (x - y^2, y - z^2, z - x^2)$
- (a) Mostre que F admite inversa numa vizinhança de qualquer $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tal que $8xyz \neq 1$.
- (b) Verifique que $F(1, 0, 1) = (-1, -1, 0)$, calcule $(F^{-1})'(-1, -1, 0)$ e obtenha a função afim que melhor aproxima f^{-1} na vizinhança de $(-1, -1, 0)$.
6. A função $f(\rho, \theta, \phi) = (\rho \cos \theta \sin \phi, \rho \sin \theta \sin \phi, \rho \cos \phi)$ está definida em $\forall(\rho, \theta, \phi) \in \mathbb{R}^3$. Em que pontos $(\rho_0, \theta_0, \phi_0) \in \mathbb{R}^3$ é possível garantir que esta função admite inversa numa vizinhança de $(\rho_0, \theta_0, \phi_0)$?

RESPOSTAS DA LISTA 11 (com indicação ou resumo de algumas resoluções)

2. (a) Essa é a tese do Teorema da Função Inversa e as hipóteses do teorema estão satisfeitas, pois as hipóteses do enunciado, a saber f de classe $\mathcal{C}_1$ e U é aberto, são justamente as hipóteses gerais do teorema. A hipótese específica do teorema, a saber $\det(Df(1, 0, -1)) \neq 0$, também está satisfeita, pois $\det(Df(1, 0, -1)) = -2$.

$$(b) \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (c) \begin{pmatrix} u - v - w - 2 \\ 1 - v/2 \\ 1 + v + w \end{pmatrix} \quad (d) \begin{pmatrix} u - v - w - 1 \\ 1 - v/2 \\ v + w \end{pmatrix}$$

3. (a) $f^{-1}: f(U) = \mathbb{R}^3 \rightarrow U = \mathbb{R}^3$
 $(u, v, w) \rightarrow (x, y, z) = (u, \sqrt[3]{v}, \sqrt[5]{w})$

(c) $15y^2z^4$

- (d) Não, pois a hipótese do teorema é $\det(Df(X_0)) \neq 0$, não afirma nada sobre $\det(Df(X_0)) = 0$. Na verdade, este exemplo mostra que pode existir inversa, mesmo quando $\det(Df(X_0)) = 0$, ou seja, o exemplo mostra que a recíproca do teorema não é válida.

4. (a) Como $DF(x, y) = \begin{pmatrix} e^{x+y} & e^{x+y} \\ e^{x-y} & -e^{x-y} \end{pmatrix}$ e os elementos dessa matriz, que são as derivadas parciais de F , são contínuas, então F é de classe $\mathcal{C}^1$. Também se verifica que o domínio $U = \mathbb{R}^2$ é um conjunto aberto. Assim as hipóteses gerais do Teorema da Função Inversa estão satisfeitas. A hipótese $\det(DF(x, y)) \neq 0$ está satisfeita para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, pois $\det(DF(x, y)) = -2e^{2x} < 0$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
 Logo, a tese do teorema é válida, a saber, F admite inversa numa vizinhança de (x, y) , para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(b) $\begin{pmatrix} \frac{e^2}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{e^2}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

5. (a) Como $DF(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & -2y & 0 \\ 0 & 1 & -2z \\ -2x & 0 & 1 \end{pmatrix}$ os elementos dessa matriz, que são as derivadas parciais de F , são contínuas, donde F é de classe $\mathcal{C}^1$. Também se verifica que o domínio $U = \mathbb{R}^3$ é um conjunto aberto. Assim as hipóteses gerais do Teorema da Função Inversa estão satisfeitas.
 Como $\det(DF(x, y, z)) = 1 - 8xyz$, a hipótese $\det(DF(x, y, z)) \neq 0$ está satisfeita para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tal que $8xyz \neq 1$.

Assim, podemos aplicar o Teorema da Função Inversa em F em todo ponto $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tal que $8xyz \neq 1$.

(b) $\begin{pmatrix} u \\ -4u + v + 2w - 4 \\ -2u + w - 2 \end{pmatrix}$

6. Como $\det(Df(\rho, \theta, \varphi)) = \rho^2 \sin \varphi$, os pontos estão no conjunto $\{(\rho, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}^3; \rho \neq 0 \text{ e } \varphi \neq k\pi\}$.



Universidade Federal Fluminense

EGM - Instituto de Matemática

GMA - Departamento de Matemática Aplicada

LISTA 12 - 2012-1

Função implícita.

Teorema da Função Implícita.

1. Verifique as hipóteses do Teorema da Função Implícita no ponto $P_0 = (1, 1)$ e calcule $y'(1)$ e $y''(1)$ para $\ln(xy) - 2xy + 2 = 0$.
2. Considere a equação $y(x - 2)^3 + xe^{y-1} = 0$. É possível, pelo Teorema da Função Implícita, garantir que esta equação define implicitamente uma única função $y = f(x)$, com x numa vizinhança de x_0 e y numa vizinhança de y_0 , quando (x_0, y_0) é
 - (a) $(1, 1)$?
 - (b) $(0, 0)$?
 - (c) $(2, 1)$?
3. Seja $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $z = F(x, y) = (y - x)^4$.
 - (a) Faça um esboço das curvas de nível de F associadas aos níveis $z = 0$, $z = 1$ e $z = 16$.
 - (b) Faça um esboço do gráfico de F .
 - (c) Mostre que $P = (0, 0)$ pertence à curva de nível

$$\mathcal{F}_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; F(x, y) = 0\}$$

de F associada ao nível $z = 0$.

- (d) Mostre que $F_x(0, 0) = 0$ e $F_y(0, 0) = 0$.
 - (e) Mostre que a curva de nível $\mathcal{F}_0$ pode ser representada como o gráfico de uma função $y = f(x)$, com $x \in \mathbb{R}$.
 - (f) Este exercício constitui um contra-exemplo para o teorema da função implícita para $\mathbb{R}^2$? Justifique cuidadosamente sua resposta.
4. A equação $y^3 + xy + x^3 = 4$ define implicitamente uma função $y = f(x)$ de classe C^1 , cujo gráfico está na vizinhança do ponto $(0, \sqrt[3]{4})$? Em caso afirmativo, expresse $\frac{dy}{dx}$ em termos de x e y .
 5. Mostre que a equação $x^3 + y^3 + z^3 = x + y + z$ define implicitamente uma função $z = f(x, y)$ de classe C^1 , cujo gráfico está na vizinhança do ponto $(1, 1, 1)$. Expresse $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$ em termos de x , y e z .

Nos exercícios 6. e 7. obtenha f_x e f_y para $z = f(x, y)$ definida pela equação dada.

6. $\ln(xyz) + e^z = 1$

7. $xz^2 - 3yz + \cos z = 0$

8. Seja uma função $z = f(x, y)$ de classe C^1 , cujo gráfico está contido na superfície $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Sabe-se que $f(0.5, 0.5) > 0$. Determine as equações do plano tangente e da reta normal ao gráfico de f no ponto $(0.5, 0.5, f(0.5, 0.5))$.
9. Sabendo que a equação $x^2 + z^3 - z - xy \sin z = 1$ define implicitamente uma função $z = f(x, y)$ de classe C^1 cujo gráfico está numa vizinhança do ponto $(1, 1, 0)$, determine $f_x(x, y)$ e $f_y(x, y)$, para (x, y) na vizinhança de $(1, 1)$ e encontre a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(1, 1, 0)$.
10. Seja $y = y(x)$ uma função dada implicitamente pela equação $x = F(x^2 + y, y^2)$, onde F é de classe C^1 . Expresse $\frac{dy}{dx}$ em termos de x , y e das derivadas parciais de F .

11. A função $z = z(x, y)$, de classe C^1 , é dada pela equação $f\left(\frac{x}{y}, \frac{z}{x^\lambda}\right) = 0$ ($\lambda \neq 0$ é um real fixo), onde $f(u, v)$ é de classe C^1 e $\frac{\partial f}{\partial v}(u, v) \neq 0$. Verifique que $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = \lambda z$.

12. Sabendo que a equação $e^{x+y+z} + xyz = 1$ define implicitamente uma função $z = f(x, y)$ de classe C^1 , cujo gráfico está na vizinhança do ponto $(0, 0, 0)$, determine a taxa de variação de f no ponto $(0, 0)$ na direção e sentido do vetor $(1, 1)$.

13. Mostre que $y = y(x)$ e $z = z(x)$ são funções diferenciáveis definidas implicitamente pelo sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 2 \\ y + x = 1 \end{cases} \quad \text{ numa vizinhança de } x = 0 \text{ tal que } y(0) = 1, z(0) = -1 \text{ e calcule } \frac{dy}{dx}(0) \text{ e } \frac{dz}{dx}(0).$$

14. Suponha que $y = y(x)$ e $z = z(x)$ são diferenciáveis e definidas implicitamente por $\begin{cases} x^2 + z^2 = 25 \\ y^2 + z^2 = 20 \end{cases}$

(a) Expresse $\frac{dy}{dx}$ e $\frac{dz}{dx}$ em termos de x, y e z .

(b) Determine explicitamente as funções $y = y(x)$ e $z = z(x)$ que são definidas implicitamente pelo sistema tal que $y(3) = -2$, $z(3) = 4$. Dê o maior intervalo aberto possível contendo $x = 3$ em que essas funções estão definidas.

15. Suponha que $y = y(u, v, w, x)$ e $z = z(u, v, w, x)$ estão definidas implicitamente pelo sistema

$$\begin{cases} uv - xy = z \\ x^2 + y^2 = w \end{cases} \quad \text{ Encontre todas as derivadas parciais de } y \text{ e } z \text{ em termos de } u, v, w, x, y \text{ e } z.$$

16. Se $x = x(u, v)$ e $y = y(u, v)$ são dadas implicitamente pelo sistema $\begin{cases} u = x + y \\ v = \frac{y}{x}, \quad x \neq 0 \end{cases}$

mostre que $\left(1 + \frac{y}{x}\right) \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right) = 1$.

17. As equações $\begin{cases} x^2 - y \cos(uv) + z^2 = 0 \\ x^2 - y^2 - \sin(uv) + 2z^2 = 0 \\ xy - \sin(u) \cos(v) + z = 0 \end{cases}$ definem x, y, z como funções de u e v próximo ao

ponto $x = y = 1$, $u = \frac{\pi}{2}$, $v = z = 0$? Calcule as derivadas parciais $\frac{\partial x}{\partial u}$ e $\frac{\partial z}{\partial u}$ em $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$.

18. Dado o sistema $\begin{cases} x + y^2 - 2yv - uv = 2z \\ x^2 - yz - 2u = v \end{cases}$

(a) Verifique que o sistema define implicitamente $(u, v) = f(x, y, z)$ na vizinhança de $(1, -1, 1)$ e tal que $f(1, -1, 1) = (2, -2)$

(b) Determine $f'(1, -1, 1)$

(c) Determine a função afim que aproxima f na vizinhança de $(1, -1, 1)$

(d) Calcule, aproximadamente, $f(1.08, -0.9, 0.98)$.

19. Seja $g(u, v) = f(x, y)$, onde f é real e diferenciável e satisfaz $x \frac{\partial f}{\partial x} - y \frac{\partial f}{\partial y} = 0$.

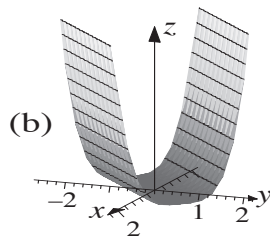
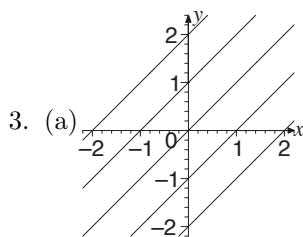
Suponha ainda $x = x(u, v)$ e $y = y(u, v)$ dadas implicitamente por $\begin{cases} u = x^2 + y^2 \\ v = xy \end{cases}$

(a) Mostre que $\frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{y}{x} \frac{\partial x}{\partial u}$

(b) Supondo provado o item (a), calcule $\frac{\partial g}{\partial u}$.

RESPOSTAS DA LISTA 12 (com indicação ou resumo de algumas resoluções)

1. Hipóteses satisfeitas: $F(x, y) = \ln(xy) - 2xy + 2$ é uma função de classe $\mathcal{C}^1$ no conjunto aberto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; xy > 0\}$ que contém $(1, 1)$, pois $F_x(x, y) = \frac{1}{x} - 2y$ e $F_y(x, y) = \frac{1}{y} - 2x$ são contínuas em A e ainda i) $F(1, 1) = 0$; ii) $F_y(1, 1) = -1 \neq 0$. $y'(1) = -1$ e $y''(1) = 2$.
2. $F(x, y) = y(x-2)^3 + xe^{y-1}$ é de classe $\mathcal{C}^1$ no aberto $A = \mathbb{R}^2$, que contém qualquer (x_0, y_0) , pois $F_x(x, y) = 3y(x-2)^2 + e^{y-1}$ e $F_y(x, y) = (x-2)^3 + xe^{y-1}$ são contínuas em $\mathbb{R}^2$, logo essa hipótese é válida nos três casos. Nas outras duas:
 i) $F(1, 1) = 0$; $F(0, 0) = 0$; $F(2, 1) \neq 0$ e
 ii) $F_y(1, 1) = 0$; $F_y(0, 0) = -8$; $F_y(2, 1) = 1 \neq 0$. A hipótese i) falha no ponto $(2, 1)$, logo é impossível encontrar uma função f tal que $f(2) = 1$. A hipótese ii) falha no ponto $(1, 1)$, neste caso nada se pode afirmar sobre a possibilidade da equação definir uma função $y = f(x)$ tal que $f(1) = 1$. As hipóteses i) e ii) são satisfeitas no ponto $(0, 0)$, logo o Teorema da Função Implícita é aplicável apenas neste ponto.



(c) $F(0, 0) = 0$

(e) $y = f(x) = x$

(f) Não é um contra-exemplo.

Não contradiz pois a condição $F_y(0, 0) \neq 0$ é uma condição suficiente, mas não é necessária para a existência de uma função implícita $y = f(x)$.

4. Sim, pois as hipóteses do Teorema da Função Implícita estão satisfeitas, a saber: $F(x, y) = y^3 + xy + y^3$ é de classe $\mathcal{C}^1$ no aberto $A = \mathbb{R}^2$, que contém $(0, \sqrt[3]{4})$, pois $F_x(x, y) = y + 3x^2$ e $F_y(x, y) = x + 3y^2$ são contínuas em $\mathbb{R}^2$ e ainda i) $F(0, \sqrt[3]{4}) = 4$ e ii) $F_y(0, \sqrt[3]{4}) = 6\sqrt[3]{2} \neq 0$. $\frac{dy}{dx} = -\frac{y + 3x^2}{x + 3y^2}$.

5. $F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - x - y - z$ é de classe $\mathcal{C}^1$ no aberto $A = \mathbb{R}^3$, que contém $(1, 1, 1)$, pois $F_x(x, y, z) = 3x^2 - 1$, $F_y(x, y, z) = 3y^2 - 1$ e $F_z(x, y, z) = 3z^2 - 1$ são contínuas em $\mathbb{R}^3$. E ainda i) $F(1, 1, 1) = 0$ e ii) $F_z(1, 1, 1) = 2 \neq 0$. Logo as hipóteses do Teorema da Função Implícita estão satisfeitas, o que garante que a equação define implicitamente uma função $z = z(x, y)$ definida numa vizinhança de $(x_0, y_0) = (1, 1)$, cuja imagem está numa vizinhança de $z_0 = 1$, logo o gráfico estará numa vizinhança de $(1, 1, 1)$. $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{3x^2 - 1}{3z^2 - 1}$ e $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{3y^2 - 1}{3z^2 - 1}$.

6. $f_x = \frac{-z}{x(1 + ze^z)}$; $f_y = \frac{-z}{y(1 + ze^z)}$

7. $f_x = \frac{-z^2}{2xz - 3y - \sin z}$; $f_y = \frac{3z}{2xz - 3y - \sin z}$

8. Reta tangente: $x + y + \sqrt{2}z = 2$; reta normal: $(x, y, z) = (1/2, 1/2, \sqrt{2}/2) + \lambda(1, 1, \sqrt{2})$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

9. $z = x - 1$

10. $\frac{dy}{dx} = \frac{1 - 2x \frac{\partial F}{\partial u}(x^2 + y, y^2)}{\frac{\partial F}{\partial u}(x^2 + y, y^2) + 2y \frac{\partial F}{\partial v}(x^2 + y, y^2)}$

11. Considere $F(x, y, z) = f(u, v)$. Sabendo-se que $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$ e $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$, aplicando essas equações no lado esquerdo da equação a ser demonstrada e simplificando-a, obtém-se: $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-1}{\frac{\partial F}{\partial z}} \left(x \frac{\partial F}{\partial x} + y \frac{\partial F}{\partial y} \right)$.

Aplicando a regra da cadeia em $f(u, v)$ para determinar $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$ e $\frac{\partial F}{\partial z}$, substituindo e simplificando, $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x^\lambda}{\frac{\partial f}{\partial v}} \left(x \cdot \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\lambda z}{x^\lambda} \cdot \frac{\partial f}{\partial v} - \frac{x}{y} \cdot \frac{\partial f}{\partial u} \right) = \lambda z$.

12. taxa de variação = $-\sqrt{2}$
13. Seja $F(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2 - 2, x + y - 1)$. Verifica-se que F é de classe $\mathcal{C}^1$ em $\mathbb{R}^3$ pois suas derivadas parciais são funções polinomiais, que são contínuas e ainda $U = \mathbb{R}^3$ é aberto.
- Verifica-se também que (i) $F(0, 1, -1) = (0, 0)$ e (ii) para $X = x$ e $Y = (y, z)$, $\det(F_Y(0, 1, -1)) = \det \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$. Assim, todas as hipóteses do teorema da função implícita estão satisfeitas, logo vale a tese, a saber o par (x, y) está definido implicitamente pelo sistema perto de $x = 0$, tal que $y(0) = 1$ e $z(0) = -1$. E ainda $\frac{dy}{dx}(0) = -1$ e $\frac{dz}{dx}(0) = -1$.
14. (a) $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$ e $\frac{dz}{dx} = -\frac{x}{z}$ (b) $y = -\sqrt{x^2 - 5}$ e $z = \sqrt{25 - x^2}$; $\sqrt{5} < x < 5$
15. $\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial y}{\partial w} = \frac{1}{2y}$; $\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{x}{y}$; $\frac{\partial z}{\partial u} = v$; $\frac{\partial z}{\partial v} = u$; $\frac{\partial z}{\partial w} = -\frac{x}{2y}$; $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x^2 - y^2}{y}$
17. (a) Sim, pois $F(u, v, x, y, z) = (x^2 - y \cos(uv) + z^2, x^2 - y^2 - \sin(uv) + 2z^2, xy - \sin(u) \cos(v) + z)$ é uma função de classe $\mathcal{C}^1$ em $U = \mathbb{R}^5$ (todas as derivadas parciais são composições, somas e multiplicações de funções contínuas), U é aberto. E ainda (i) $F\left(\frac{\pi}{2}, 0, 1, 1, 0\right) = (0, 0, 0)$ (ii) para $Y = (x, y, z)$ tem-se $\det\left(F_Y\left(\frac{\pi}{2}, 0, 1, 1, 0\right)\right) = -2 \neq 0$. Assim todas as hipóteses são satisfeitas e o Teorema da Função Implícita se aplica.
- (b) 0
18. (a) $F(x, y, z, u, v) = (x + y^2 - 2yv - uv, 2z, x^2 - yz - 2u)$ é uma função de classe $\mathcal{C}^1$ em $U = \mathbb{R}^5$ pois admite derivadas parciais contínuas em $U = \mathbb{R}^5$ (todas são funções polinomiais).
- Também (i) $F(1, -1, 1, 2, -2) = (0, 0)$ (ii) para $Y = (u, v)$, $\det(F_Y(1, -1, 1, 2, -2)) = -2 \neq 0$.
- Logo, estão satisfeitas as hipóteses do Teorema da Função Implícita, donde aplicando-se a tese, verifica-se que o sistema define implicitamente u e v perto de $(1, -1, 1, 2, -2)$, isto é, na vizinhança de $(1, -1, 1)$ tal que $f(1, -1, 1) = (2, -2)$.
- (b) $f'(1, -1, 1) = \begin{bmatrix} -1/2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$
- (c) $A(x, y, z) = \begin{bmatrix} 1/2 - x/2 - y + z \\ -3 + 3x + y - z \end{bmatrix}$
- (d) $\begin{bmatrix} 1,84 \\ -1,64 \end{bmatrix}$
19. (b) 0