Universidade Federal Fluminense
EGM - Instituto de Matemática e Estatística
GMA - Departamento de Matemática Aplicada

LISTA 1 - 2015-1
Integral Dupla

1. Troque a ordem de integração em:

(a) $\displaystyle\int_1^e \int_0^{\ln x} f(x,y)\ dydx$ (b) $\displaystyle\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-\sqrt{y}} f(x,y)\ dxdy$ (c) $\displaystyle\int_{-1}^2 \int_{y^2-4}^{y-2} f(x,y)\ dxdy$

2. Use integral dupla para calcular a área da região limitada por:

(a) $x=y^3,\quad x+y=2,\quad y=0$
(b) $y=x,\quad y=4x,\quad xy=36$ (no primeiro quadrante)
(c) $y^2=-x,\quad x-y=4,\quad y=-1$ e $y=2$

3. Calcule as seguintes integrais:

(a) $\displaystyle\iint_D \cos\left(y^3\right)\ dxdy,$ onde D é limitada por $y=\sqrt{x},\ y=2,\ x=0.$

(b) $\displaystyle\int_1^4 \int_{\frac{\ln y}{2}}^{\ln 2} \frac{1}{e^x+1}\ dxdy$

(c) $\displaystyle\int_0^1 \int_{\operatorname{arcsen} y}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\sqrt{1+\cos^2 x}\ dxdy$

(d) $\displaystyle\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \sqrt{1+y^3}\ dydx$

(e) $\displaystyle\int_0^1 \int_{\frac{\sqrt{y}}{2}}^{\sqrt{y}} e^{x^3}\ dxdy + \int_1^4 \int_{\frac{\sqrt{y}}{2}}^1 e^{x^3}\ dxdy$

4. Use uma integral dupla para calcular o volume do sólido W limitado por:

(a) $y=0,\ z=0,\ x+y=4$ e $z=4-x^2$
(b) $x=0,\ z=0,\ x+y=9$ e $z=9-y^2$
(c) $x=0,\ y=0,\ z=0,\ x^2+y^2=a^2,\ x^2+z^2=a^2\ (a>0)$, situado no primeiro octante.
(d) $x=0,\ y=0,\ z=0,\ z=6-x,\ x=4-y^2$, situado no primeiro octante.

5. Passe para coordenadas polares e calcule:

(a) $\displaystyle\int_0^1 \int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{1+\sqrt{1-y^2}} xy\ dxdy$

(b) $\displaystyle\int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}\ dydx$

(c) $\displaystyle\int_1^3 \int_0^y \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\ dxdy$

(d) $\displaystyle\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} \arctan\left(\frac{y}{x}\right)\ dydx$

6. Exprima (sem calcular) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_{\sec\theta}^{2\cos\theta} \frac{r^2}{1+r\operatorname{sen}\theta}\ drd\theta$ como integral iterada em coordenadas retangulares, nas duas possíveis ordens de integração.

7. Seja $\displaystyle I=\iint_D f(x,y)dxdy=\int_0^1\int_{-x}^0 f(x,y)dydx+\int_1^2\int_{-\sqrt{2x-x^2}}^0 f(x,y)dydx.$

(a) Transforme I em uma só integral iterada na ordem invertida.
(b) Calcule I para $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$.

8. Seja $I = \displaystyle\int_{-1}^{1}\int_{1}^{1+\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\ dydx$
   (a) Inverta a ordem de integração em I.
   (b) Calcule I para $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

9. Achar o volume do sólido limitado superiormente pela esfera $x^2+y^2+z^2=4$, inferiormente pelo plano $z=0$ e lateralmente pelo cilindro $x^2+y^2=1$.

10. Calcule o volume do sólido que não contém a origem e é limitado pelas superfícies $z=4-x^2-y^2$, $x^2+y^2=1$ e $z=0$.

11. Calcule o volume do sólido interior à esfera $x^2+y^2+z^2=16$ e ao cilindro $x^2+y^2=4x$ e acima do plano $z=0$.

12. Calcule o volume do sólido contido no primeiro octante, limitado pelo cone $z=r$, pelo cilindro $r=3\,\text{sen}\,\theta$ e pelo plano $z=0$.

13. Uma placa D tem a forma da região limitada pelas retas $x=1$, $x=2$, $y=0$ e $y=\frac{x}{\sqrt{3}}$. A densidade em cada ponto é inversamente proporcional à distância do ponto à origem. Determine a massa da placa.

14. Uma placa fina é limitada pela circunferência $x^2+y^2=a^2$, $(a>0)$, e tem densidade $\rho(x,y)=\frac{a^2}{a^2+x^2+y^2}$. Calcule o momento de inércia polar em função de sua massa M.

15. Seja uma lâmina delgada representada pela região D, determinada por $y\le x$, $y\ge -x$, $x^2+y^2\ge 2x$ e $x^2+y^2\le 4x$. Se a densidade em cada ponto é dada por $\rho(x,y)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, determine:
    (a) A massa de D.
    (b) O momento de inércia em relação à origem.

16. Uma placa fina de densidade constante ρ tem a forma de um setor circular de raio a e ângulo central 2α. Mostre que o momento de inércia em relação à bissetriz do ângulo é dado por $\frac{1}{4}Ma^2\left(1-\frac{\text{sen}\,2\alpha}{2\alpha}\right)$, onde M é a massa da placa.

17. Calcule as coordenadas $(\bar{x},\bar{y})$ do centro de massa de uma chapa homogêna D com o formato de um triângulo isósceles com base $10cm$ e altura $5cm$.

18. Calcule o centro de massa da lâmina $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; 4x^2+y^2\le 1, x\ge 0\right\}$, se a densidade é proporcional à distância de (x,y) ao eixo y.

19. Calcule o centro de massa do conjunto $D=\left\{(x,y); 1\le x^2+y^2\le 4, y\ge 0\right\}$, sendo a densidade proporcional à distância do ponto à origem.

20. Uma lâmina homogênea tem a forma de um triângulo retângulo com lados iguais de medida a. Ache o momento de inércia em relação a um dos lados iguais, em função de sua massa M.

21. Calcule a massa de uma lâmina delimitada por $(x-1)^2+(y-2)^2=1$, se a densidade em um ponto é proporcional à distância desse ponto a $(1,2)$.

22. Uma lâmina homogênea tem a forma de um triângulo retângulo de catetos b e h. Ache o momento de inércia em função de sua massa M.
    (a) em relação ao eixo x (b) em relação ao eixo y

23. Uma lâmina homogênea tem a forma de um triângulo equilátero de lado a. Ache o momento de inércia em relação
    (a) a uma altura (b) a um lado

24. Calcule as seguintes integrais:

    (a) $\displaystyle\int_0^2 \int_{\frac{y}{2}}^{\frac{y+4}{2}} y^3(2x-y)e^{(2x-y)^2}\ dxdy$

    (b) $\displaystyle\iint_D \left(\frac{x-y}{x+y}\right)^2 dxdy$, D é a região triangular de vértices $(0,0)$, $(1,0)$ e $(0,1)$.

    (c) $\displaystyle\iint_D \frac{y^2 e^{xy}}{x}\ dA$, D é a região no primeiro quadrante, limitada pelas parábolas $\frac{x^2}{y}=1$, $\frac{y^2}{x}=1$, $x^2=4y$ e $y^2=4x$.

    (d) $\displaystyle\iint_D \text{sen}\left(4x^2+y^2\right)\ dxdy$, $D=\left\{(x,y);\ 4x^2+y^2\leq 1, y\geq 0\right\}$.

    (e) $\displaystyle\iint_D \left(\sqrt{y/x}+\sqrt{xy}\right)\ dxdy$, D é a região do primeiro quadrante, limitada pelas hipérboles $xy=1$, $xy=9$ e pelas retas $y=x$ e $y=4x$.

    (f) $\displaystyle\iint_D (x+y-1)(x-y)^6\ dxdy$, D é o quadrado $|x|+|y|\leq 1$.

    (g) $\displaystyle\iint_D \left(x^2+y^2\right)\ dxdy$, D é a região do primeiro quadrante, limitada por $x^2-y^2=1$, $x^2-y^2=9$, $xy=1$ e $xy=3$.

Respostas

1. (a) $\displaystyle\int_0^1 \int_{e^y}^{e} f(x,y)\ dxdy$

   (b) $\displaystyle\int_{-1}^0 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\ dydx + \int_0^1 \int_0^{(1-x)^2} f(x,y)\ dydx$

   (c) $\displaystyle\int_{-4}^{-3} \int_{-\sqrt{x+4}}^{\sqrt{x+4}} f(x,y)\ dydx + \int_{-3}^0 \int_{x+2}^{\sqrt{x+4}} f(x,y)\ dydx$

2. (a) $\frac{5}{4}$

   (b) $36\ln 2$

   (c) $\frac{33}{2}$

3. (a) $\frac{1}{3}\,\text{sen}\,8$

   (b) $1-\ln 2$

   (c) $\frac{1}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)$

   (d) $\frac{2}{9}\left(2\sqrt{2}-1\right)$

   (e) $\displaystyle\int_0^1 \int_{x^2}^{4x^2} e^{x^3}\ dydx = e-1$

4. (a) $\frac{128}{3}$

   (b) 324

   (c) $\frac{2a^3}{3}$

   (d) $\frac{352}{15}$

5. (a) $\frac{2}{3}$

   (b) $\frac{2\sqrt{2}+2}{45}+\frac{\sqrt{2}\ \pi}{6}$

   (c) $-2\ln\left(\sqrt{2}-1\right)=2\ln\left(\sqrt{2}+1\right)$

   (d) $\frac{9\pi^2}{16}$

6. $\displaystyle\int_1^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{1+y}\ dydx = \int_0^1 \int_1^{1+\sqrt{1-y^2}} \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{1+y}\ dxdy$

7. (a) $\displaystyle\int_{-1}^0 \int_{-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\ dxdy$

   (b) $\frac{10\sqrt{2}}{9}$

8. (a) $\displaystyle\int_1^2 \int_{-\sqrt{1-(1-y)^2}}^{\sqrt{1-(1-y)^2}} f(x,y)\ dxdy$

   (b) $2\sqrt{2}+2\ln\left(\sqrt{2}-1\right)$

9. $\frac{2\pi}{3}\left(8-3\sqrt{3}\right)$
10. $\frac{9\pi}{2}$
11. $\frac{64}{3}\left(\pi-\frac{4}{3}\right)$
12. 6
13. $\frac{k}{2}\ln 3$
14. $Ma^2\left(\frac{1-\ln 2}{\ln 2}\right)$
15. (a) $2\sqrt{2}$
    (b) $\frac{140}{9}\sqrt{2}$
17. O centro de massa situa-se a $\frac{5}{3}\,cm$ da base, sobre sua mediatriz.
18. $\left(\frac{3\pi}{32},0\right)$
19. $\left(0,\frac{45}{14\pi}\right)$
20. $\frac{Ma^2}{6}$
21. $\frac{2k\pi}{3}$
22. (a) $\frac{Mh^2}{6}$
    (b) $\frac{Mb^2}{6}$
23. (a) $\frac{k\sqrt{3}\,a^4}{96}$
    (b) $\frac{k\sqrt{3}\,a^4}{32}$
24. (a) $e^{16}-1$
    (b) $\frac{1}{6}$
    (c) $\frac{1}{3}\left(\frac{e^{16}}{4}-\frac{5e^4}{4}+e\right)$
    (d) $\frac{\pi}{4}(1-\cos 1)$
    (e) $8+\frac{52}{3}\ln 2$
    (f) $-\frac{2}{7}$
    (g) 8

uff Universidade Federal Fluminense
EGM - Instituto de Matemática e Estatística
GMA - Departamento de Matemática Aplicada

LISTA 2 - 2015-1
Integral Tripla

---

1. Calcule $\iiint_W x\, dV$, onde W é o tetraedro limitado pelos planos coordenados e pelo plano $x + \frac{y}{2} + z = 4$.
2. Calcule $\iiint_W dV$, onde W é a região do primeiro octante, limitada por $x = 4 - y^2$, $y = z$, $x = 0$ e $z = 0$.
3. Calcule $\iiint_W dV$, onde W é o sólido delimitado por $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 2$, $z = x^2 + y^2$ e $z = 0$.
4. Calcule $\iiint_W (y-1)\, dV$, onde W é a região delimitada por $x = 0$, $z = 0$, $x + z = 2$ e $z = 1 - y^2$.
5. Calcule $\iiint_W z\, dV$, onde W está situado no primeiro octante, limitado pelos planos $z = 0$, $x = 0$, $y = 2x$ e pelo cilindro $y^2 + z^2 = 4$.
6. Calcule $\iiint_W z\, dV$, onde W é o sólido limitado pelos planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $y + z = 1$ e $x + z = 1$.
7. Calcule $\iiint_W 24z\, dV$, onde W é o sólido limitado por $x + y + z = 2$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, e $z = 1$.
8. Use uma integral tripla para calcular o volume do sólido W limitado por:
   (a) $y = 0,\ y = 4,\ z = 9 - x^2,\ y + z = 4$.
   (b) $z = 4 - x^2 - y^2$ e $z = y$, situado no interior do cilindro $x^2 + y^2 = 1,\ z \geq 0$.
   (c) $z = 3x^2,\ z = 4 - x^2,\ y = 0$ e $z + y = 6$.
   (d) $y = 0,\ z = 0,\ x + y = 2,\ 2y + x = 6,\ y^2 + z^2 = 4$, no primeiro octante.
   (e) $y = 0,\ z = 0,\ z + x^2 = 4,\ y + z = 4$.
   (f) $x^2 + y^2 = 1,\ y \geq 0,\ y + z = 1,\ z = 1$.
   (g) $z = 1 - x^2,\ y + z = 2,\ z - y = 1,\ z = 0$.
   (h) $z = -y,\ y = x^2 - 1,\ z = 0$.
9. Calcule $\iiint_W z\, dV$, onde W é o sólido limitado pelas superfícies $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = \sqrt{3\,(x^2 + y^2)}$ e $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.
10. Calcule $\iiint_W \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\, dV$, onde W é a região interior ao cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, limitada superiormente pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ e inferiormente pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
11. Calcule $\iiint_W \sqrt{x^2 + y^2}\, dV$, onde W é o sólido limitado pelas superfícies $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ e $z = 2$.
12. Considere a integral iterada $I = \displaystyle\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z\sqrt{x^2 + y^2}\; dzdydx$.
    (a) Expresse I em coordenadas cilíndricas e calcule o seu valor.
    (b) Expresse I em coordenadas esféricas e calcule o seu valor.
13. Calcule o volume do sólido W que está dentro da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, acima do plano $z = 0$ e abaixo do cone $z = \sqrt{3\,(x^2 + y^2)}$.
14. Calcule o volume do sólido W dado por $x^2 + y^2 + (z-1)^2 \leq 1$ e $z \geq x^2 + y^2$.
15. Calcule a massa do sólido W situado no primeiro octante, limitado pelos planos $x = 0$, $y = 2x$ e pelo cilindro $y^2 + z^2 = 2$, supondo que a densidade no ponto (x, y, z) é proporcional à distância deste ponto ao plano xy.

16. Calcule a massa do sólido W, limitado pelas superfícies $x^2+y^2=1$, $z+y=2$ e $z=0$, se a densidade em (x,y,z) é dada por $\rho(x,y,z)=z$.

17. Calcule a massa do sólido limitado pelo plano $z=0$, o cilindro $x^2+y^2=2x$ e pelo cone $z=\sqrt{x^2+y^2}$, se a densidade é $\rho(x,y,z)=x^2+y^2$.

18. Calcule a massa do sólido limitado superiormente por $x^2+y^2+(z-1)^2=1$, inferiormente por $z=\sqrt{\frac{1}{3}(x^2+y^2)}$, sendo a densidade igual ao quadrado da distância de (x,y,z) ao plano $z=0$.

19. Calcule a massa do sólido $W:\ x^2+y^2\leq 1,\ x^2+y^2+z^2\leq 4$ e $z\geq 0$, sendo a densidade dada por $\rho(x,y,z)=2z$.

20. Encontre a massa da região sólida limitada pelas superfícies $z=16-2x^2-2y^2$ e $z=2x^2+2y^2$, se a densidade do sólido é $\rho(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2}$.

21. Encontre o momento de inércia I_z do sólido no primeiro octante, limitado pelas superfícies $z=y$, $x^2+y^2=1$, $z=0$ e $x=0$, sendo a densidade dada por $\rho(x,y,z)=kz$, onde $k>0$ é uma constante.

22. Calcule a componente $\bar{z}$ do centro de massa do sólido W dado por $x^2+y^2+z^2\geq 2z$, $x^2+y^2+z^2\leq 8z$, $z\geq\sqrt{x^2+y^2}$, $z\leq\sqrt{3(x^2+y^2)}$, se a densidade no ponto (x,y,z) é inversamente proporcional ao quadrado da distância do ponto à origem.

23. Considere o cilindro homogêneo $x^2+(y-a)^2\leq a^2$ e $0\leq z\leq h$. Calcule o momento de inércia em relação ao eixo z, em função da massa M do cilindro.

24. Seja $I=\displaystyle\int_0^1\int_{\sqrt{x}}^1\int_0^{1-y^2} dzdydx$. Reescreva a integral I na ordem $dxdydz$.

25. Seja o volume do sólido W comum às esferas $x^2+y^2+z^2=1$ e $x^2+y^2+z^2=2z$. Expresse (sem calcular) o volume de W em

    (a) em coordenadas cilíndricas na ordem $dzdrd\theta$.

    (b) em coordenadas esféricas na ordem $d\rho d\phi d\theta$.

Respostas

1. $\frac{64}{3}$
2. 4
3. $\frac{8}{3}$
4. $-\frac{32}{15}$
5. 1
6. $\frac{1}{12}$
7. 11
8. (a) $\frac{8}{15}\left(243-25\sqrt{5}\right)$
   (b) $\frac{21\pi-4}{6}$
   (c) $\frac{304}{15}$
   (d) $\frac{4}{3}(3\pi-2)$
   (e) $\frac{128}{5}$
   (f) $\frac{2}{3}$
   (g) $\frac{44}{15}$
   (h) $\frac{8}{15}$
9. π
10. $\pi\left(2-\sqrt{2}\right)$
11. $\frac{64\pi}{15}$
12. (a) $\int_0^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\sqrt{4-r^2}} r^2z\ dzd\theta dr=\frac{16\pi}{15}$
    (b) $\int_0^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^4\cos\phi\,\mathrm{sen}^2\phi\ d\phi d\theta d\rho=\frac{16\pi}{15}$
13. $\frac{8\sqrt{3}\pi}{3}$
14. $\frac{7\pi}{6}$
15. $\frac{k}{4}$
16. $\frac{17\pi}{8}$
17. $\frac{512}{75}$
18. $\frac{51\pi}{32}$
19. $\frac{7\pi}{2}$
20. $\frac{512\pi}{15}$
21. $\frac{k\pi}{48}$
22. $\frac{25}{8}$
23. $\frac{3Ma^2}{2}$
24. $I=\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-z}}\int_0^{y^2} dxdydz$
25. (a) $\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\int_{1-\sqrt{1-r^2}}^{\sqrt{1-r^2}} r\ dzdrd\theta$
    (b) $\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\int_0^1 \rho^2\,\mathrm{sen}\,\phi\ d\rho d\phi d\theta\ +$
    $+\int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\cos\phi} \rho^2\,\mathrm{sen}\,\phi\ d\rho d\phi d\theta$

Universidade Federal Fluminense
EGM - Instituto de Matemática e Estatística
GMA - Departamento de Matemática Aplicada

LISTA 3 - 2015-1
Integral de Linha de Campo Escalar

---

1. Apresente uma parametrização diferenciável para as seguintes curvas planas:

   (a) $C: \ x = y^2, \quad 0 \leq x \leq 2$
   (b) $C: \ x^2 + y^2 = 4, \quad y \geq 0$
   (c) $C: \ x^2 + 4y^2 = 4, \quad x \geq 0$
   (d) $C: \ x^2 + y^2 + x + y = 0$
   (e) $C: \ x^2 + y^2 = 16, \quad x \geq 2$
   (f) $C: \ x^2 + y^2 = 4x, \quad y \geq 0$
   (g) $C: \ x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$
   (h) $C: \ 2x^2 + 2y^2 - 6x + 4y - 16 = 0$
   (i) $C: \ 16x^2 + 9y^2 + 64x - 18y - 71 = 0$

2. Apresente uma parametrização diferenciável para a curva C em $\mathbb{R}^3$, interseção das superfícies dadas por:

   (a) $z = 1 - x^2, \ z \geq 0 \quad e \quad x = y$
   (b) $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ e $x^2 + y^2 = \frac{R^2}{4}, \ R > 0$, situada no primeiro octante.
   (c) $x^2 + y^2 = 1$ e $y + z = 2$
   (d) $x^2 + y^2 = 4$ e $x^2 + z^2 = 4$, situada no primeiro octante.
   (e) $x^2+y^2+z^2 = 8-2(x+y), \ z \geq 0$ e $x+y = 2$
   (f) $z = 3x^2 + y^2$ e $z + 6x = 9$
   (g) $(x-1)^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 + z^2 = 4, \ z \geq 0$
   (h) $x^2 + y^2 + z^2 = 2y, \quad z \geq 0$ e $z - y + 1 = 0$

3. Calcule $\displaystyle\int_C f(x,y)ds$, onde

   (a) $f(x,y) = xy$ e C parametrizada por $\vec{r}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t), \ 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.
   (b) $f(x,y) = xy$ e C é o segmento de reta de $(2,1)$ a $(4,5)$.
   (c) $f(x,y) = x^2 - y^2$ e C é a semicircunferência $x^2 + y^2 = a^2, \ a > 0$, com $y \geq 0$.
   (d) $f(x,y) = x - y$ e C é a circunferência $x^2 + y^2 = ax, \ a > 0$.
   (e) $f(x,y) = 8x$ e C é formada pelos arco C_1 da parábola $y = x^2$ de $(0,0)$ a $(1,1)$ seguido pelo segmento de reta vertical de $(1,1)$ a $(1,2)$.

4. Calcule $\displaystyle\int_C f(x,y,z)ds$, onde

   (a) $f(x,y,z) = 3x^2yz$ e C é a curva dada por $\vec{r}(t) = \left(t, t^2, \frac{2}{3}t^3\right), \ 0 \leq t \leq 1$.
   (b) $f(x,y,z) = x + y + z$ e C é o segmento de reta de $(1,2,3)$ a $(0,-1,1)$.
   (c) $f(x,y,z) = y(x+z)$ e C é a curva interseção das superfícies $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, com $y \geq 0$ e $x + z = 3$.
   (d) $f(x,y,z) = xyz$ e C é a curva interseção das superfícies $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ e $x^2 + y^2 = \frac{R^2}{4}$, situada no primeiro octante.
   (e) $f(x,y,z) = x$ e C é a interseção do cilindro parabólico $y = x^2$ com a parte do plano $z = x$, tal que $0 \leq x \leq 1$.

5. Seja C a curva interseção da semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \ a > 0, \ x \geq 0$, com o plano $y = z$. Determine o valor de a, se $\int_C 3xyz \ ds = 16$.

6. Sabendo que $I = \displaystyle\int_C \frac{ds}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}}} = 8$, onde C é a elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, calcule a área da região limitada pela elipse.

7. Um pedaço de arame tem a forma da curva C interseção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1 - 2(x + y)$ com o plano $z - y = 1$. Calcule a massa do arame se a densidade é dada por $\rho(x, y, z) = x^2$.

8. Achar a massa da curva dada por $x = e^t \cos t$, $y = e^t \operatorname{sen} t$, $z = e^t$, $0 \leq t \leq 1$, se a densidade em cada ponto é inversamente proporcional ao quadrado da distância do ponto à origem.

9. Calcule a primeira coordenada do centro de massa de um fio homogêneo que está ao longo de uma curva $\vec{r}(t) = t\,\vec{i} + \left(\frac{2\sqrt{2}}{5}\, t^{\frac{5}{2}}\right) \vec{j} + \left(\frac{t^4}{4}\right) \vec{k}$, $0 \leq t \leq 2$.

10. Um arame tem a forma de uma curva obtida como interseção da semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, $x \geq 0$, com o plano $y + z = 4$. Sabendo que a densidade em cada ponto (x, y, z) é dada por $\rho(x, y, z) = x$, mostre que o momento de inércia em relação ao eixo x é igual a $\frac{32M}{3}$, onde M é a massa do arame.

11. Calcule a massa da elipse $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$, situada no primeiro quadrante, se a densidade em cada ponto é igual ao produto das coordenadas do ponto.

12. Calcule a área de um lado da superfície S cuja base é a circunferência $x^2 + y^2 = 1$, no plano xy, e a altura em cada ponto (x, y) é $f(x, y) = 1 - x^2$.

13. Deseja-se construir uma peça de zinco que tem a forma da superfície do cilindro $x^2 + y^2 = 4$, compreendida entre os planos $z = 0$ e $x + y + z = 2$, $z \geq 0$. Se o metro quadrado do zinco custa M reais, calcule o preço total da peça.

14. Um pintor deseja pintar os dois lados de uma cerca cuja base é uma curva C no plano xy dada por $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 20^{\frac{2}{3}}$, para $x \geq 0$ e $y \geq 0$. A altura em cada ponto $(x, y) \in C$ é dada por $f(x, y) = y$. Se o pintor cobra R reais por m^2, quanto ele receberá?

15. Seja dado um arame semicircular homogêneo de raio 4 cm.
   (a) Mostre que o centro de massa está situado no eixo de simetria a uma distância de $\frac{8}{\pi}$ cm do centro.
   (b) Mostre que o momento de inércia em relação ao diâmetro que passa pelos extremos do arame é $8M$, sendo M a massa do arame.

16. Um arame fino é entortado no formato da curva interseção das superfícies $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ e $y = x$, situado no primeiro octante e que liga o ponto $A = \left(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0\right)$ ao ponto $B = \left(1, 1, \sqrt{2}\right)$. Calcule a massa do arame, sendo a densidade em cada ponto proporcional ao quadrado da distância do ponto ao plano yz.

17. Um arame fino tem a forma da curva interseção das superfícies $x^2 + y^2 + z^2 = 1 + 2z + x$ e $z = 1 + y$, $z \geq 1$. Determine a massa do arame, se a densidade em qualquer ponto é igual ao quadrado da distância do ponto ao plano xz.

18. Calcule o momento de inércia de um fio retilíneo homogêneo de comprimento L, em torno de um eixo perpendicular ao fio e passando por uma das extremidades do fio, em função de sua massa.

19. Um fio delgado tem a forma do segmento de reta que une os pontos $(1, 1)$ e $(2, 2)$. Determine o momento de inércia em relação à reta $y = -1$, supondo que a densidade no ponto (x, y) é proporcional à distância do ponto ao eixo y.

Respostas

1. (a) $\vec{r}(t) = (t^2, t)$, $0 \le t \le \sqrt{2}$ é uma parametrização diferenciável; $\vec{r}(t) = (t, \sqrt{t})$, $0 \le t \le 2$ é também uma parametrização de C, mas não é diferenciável, pois não existe $\vec{r}\,'(0)$.
   (b) $\vec{r}(t) = (2\cos t, 2\,\text{sen}\, t)$, $0 \le t \le \pi$
   (c) $\vec{r}(t) = (2\cos t, \text{ sen}\, t)$, $-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$
   (d) $\vec{r}(t) = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos t, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,\text{sen}\, t\right)$, $0 \le t \le 2\pi$
   (e) $\vec{r}(t) = (4\cos t, 4\,\text{sen}\, t)$, $-\frac{\pi}{3} \le t \le \frac{\pi}{3}$
   (f) $\vec{r}(t) = (2 + 2\cos t, 2\,\text{sen}\, t)$, $0 \le t \le \pi$
   (g) $\vec{r}(t) = (\cos^3 t, \text{ sen}^3 t)$, $0 \le t \le 2\pi$
   (h) $\vec{r}(t) = \left(\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{5}}{2}\cos t, -1 + \frac{3\sqrt{5}}{2}\,\text{sen}\, t\right)$, $0 \le t \le 2\pi$
   (i) $\vec{r}(t) = (-2 + 3\cos t, 1 + 4\,\text{sen}\, t)$, $0 \le t \le 2\pi$

2. (a) $\vec{r}(t) = \left(t, t, 1 - t^2\right)$, $-1 \le t \le 1$
   (b) $\vec{r}(t) = \left(\frac{R}{2}\cos t, \frac{R}{2}\,\text{sen}\, t, \frac{\sqrt{3}R}{2}\right)$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$
   (c) $\vec{r}(t) = (\cos t, \text{ sen}\, t, 2 - \text{ sen}\, t)$, $0 \le t \le 2\pi$
   (d) $\vec{r}(t) = (2\cos t, 2\,\text{sen}\, t, 2\,\text{sen}\, t)$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$
   (e) $\vec{r}(t) = \left(1 + \cos t, 1 - \cos t, \sqrt{2}\,\text{sen}\, t\right)$, $0 \le t \le \pi$
   (f) $\vec{r}(t) = \left(-1 + 2\cos t, 3\sqrt{2}\,\text{sen}\, t, 15 - 12\cos t\right)$, $0 \le t \le 2\pi$
   (g) $\vec{r}(t) = \left(1 + \cos t, \text{ sen}\, t, 2\,\text{sen}\,\frac{t}{2}\right)$, $0 \le t \le 2\pi$
   (h) $\vec{r}(t) = \left(\cos t, 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\,\text{sen}\, t, \frac{\sqrt{2}}{2}\,\text{sen}\, t\right)$, $0 \le t \le \pi$

3. (a) $\frac{1}{2}$
   (b) $\frac{58\sqrt{5}}{3}$
   (c) 0
   (d) $\frac{\pi a^2}{2}$
   (e) $\frac{10\sqrt{5}+22}{3}$

4. (a) $\frac{13}{20}$
   (b) $3\sqrt{14}$
   (c) 27
   (d) $\frac{R^4\sqrt{3}}{32}$
   (e) $\frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{6}$

5. $a = 2$

6. 4

7. $5\pi\sqrt{3}$

8. $\frac{\sqrt{3}\,k}{2}\left(1 - e^{-1}\right)$

9. $\frac{7}{5}$

11. $\frac{38}{5}$

12. π

13. $(6\pi + 8)\,M$

14. $480R$

16. $\frac{\pi+2}{2}$

17. $\frac{27\pi}{32}$

18. $\frac{ML^2}{3}$

19. $\frac{119\sqrt{2}\ k}{12}$

Universidade Federal Fluminense
EGM - Instituto de Matemática e Estatística
GMA - Departamento de Matemática Aplicada

LISTA 4 - 2015-1
Integral de Linha de Campo Vetorial
Teorema de Green
Campos conservativos

---

1. Calcule $\int_C x\ dx + x^2\ dy$ de $(-1,0)$ a $(1,0)$ ao longo
   (a) do eixo x
   (b) de $C:\ \vec{r}(t) = (-\cos t, \operatorname{sen} t),\quad 0 \leq t \leq \pi$
   (c) da poligonal de vértices: $(-1,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$ e $(1,0)$

2. Calcule $\oint_C -y\ dx + x\ dy$, ao longo dos seguintes caminhos fechados, orientados no sentido anti-horário.
   (a) circunferência de centro na origem e raio 2
   (b) elipse $x^2 + 36y^2 = 36$
   (c) triângulo de vértices $(0,0)$, $(1,0)$ e $(0,1)$.

3. Calcule $\int_C (3x+2y)\ dx + (3x-y)\ dy$ de $(0,0)$ a $(1,1)$, ao longo
   (a) do segmento de reta
   (b) do arco de parábola $y = x^2$
   (c) do arco de circunferência $x^2 + (y-1)^2 = 1$, orientado no sentido anti-horário.

4. Calcule $\int_C 3xz\ dx + 4yz\ dy + 2xy\ dz$, do ponto $A = (0,0,0)$ ao ponto $B = (1,1,2)$, ao longo dos seguintes caminhos:
   (a) segmento de reta AB
   (b) interseção das superfícies $z = x^2 + y^2$ e $x = y$.

5. Calcule $\int_C P\ dx + Q\ dy + R\ dz$, onde
   (a) $\vec{F} = (P,Q,R) = (y,z,x)$ e C é a interseção das superfícies $x + y = 2$ e $x^2 + y^2 + z^2 = 2(x+y)$, percorrida no sentido anti-horário quando vista da origem.
   (b) $\vec{F} = (P,Q,R) = (-2y,z,x)$ e C é a interseção das superfícies $4x^2 + y^2 = 1$ e $y^2 + z^2 = 1$, com $x \geq 0$ e $z \geq 0$, percorrida uma vez do ponto $(0,-1,0)$ ao ponto $(0,1,0)$.
   (c) $\vec{F} = (P,Q,R) = (z,x,y)$ e C é a interseção das superfícies $z = x^2 + y^2$ e $4x + 2y + z = 1$, orientada de modo que sua projeção no plano xy seja percorrida uma vez no sentido horário.

6. Seja C a interseção do cilindro $x^2 + y^2 = 4$ com o semiplano $y + z = 0$, $y \geq 0$, percorrida de modo que sua projeção no plano xy tenha sentido anti-horário e seja $\vec{F}(x,y,z) = x^4\ \vec{i} + y^4\ \vec{j} + z^4\ \vec{k}$. Calcule a integral $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

7. O campo de forças $\vec{F}(x,y,z) = (x-2, y-2, z-4x-4)$ atua sobre uma partícula transladando-a ao longo da curva interseção das superfícies $z = x^2 + y^2$ e $z = 4x + 4y - 4$, orientada de modo que sua projeção no plano xy seja percorrida uma vez, no sentido horário. Calcule o trabalho realizado por $\vec{F}$.

8. Calcule o trabalho realizado pela força $\vec{F} = (x,y,z)$ para deslocar uma partícula ao longo da curva interseção das superfícies $x + z = 5$ e $z = 4 - y^2$, orientada do ponto $(5,-2,0)$ a $(5,2,0)$.

9. Achar o trabalho de uma força variável, dirigida para a origem das coordenadas, cuja grandeza é proporcional ao afastamento do ponto em relação à origem das coordenadas, se o ponto de aplicação desta força descreve, no sentido anti-horário, a parte da elipse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$ no primeiro quadrante.

10. Um campo de forças bidimensional $\vec{F}$ define-se por $\vec{F}(x,y)=(x+y)\vec{i}+(x-y)\vec{j}$.

    (a) Prove que o trabalho realizado por esta força ao deslocar uma partícula ao longo da curva $\vec{r}(t)=f(t)\,\vec{i}+\,g(t)\vec{j},\ a\le t\le b,$ depende unicamente de $f(a),\ f(b),\ g(a)$ e $g(b)$.

    (b) Determine o trabalho realizado quando $f(a)=1,\quad f(b)=2,\quad g(a)=3$ e $g(b)=4$.

11. Uma partícula de peso w desce de $(0,4)$ a $(2,0)$ ao longo da parábola $y=4-x^2$. Agem sobre a partícula a força da gravidade e também uma força horizontal dirigida para a direita, de módulo igual à coordenada y do ponto. Determine o trabalho realizado por essas duas forças.

12. Seja $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ uma função diferenciável e $h:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ uma primitiva de g, tal que $h(1)=2$, $h(2)=4$. Calcule $\int_C x\,g\left(x^2+y^2+z^2\right)\,dx+y\,g\left(x^2+y^2+z^2\right)\,dy+z\,g\left(x^2+y^2+z^2\right)\,dz$, onde C está situada no primeiro octante, e é a interseção das superfícies $x^2+y^2=1$ e $y=z$, percorrida no sentido anti-horário quando vista de cima.

13. Verifique o Teorema de Green, calculando as duas integrais do enunciado, para $\vec{F}(x,y)=$ $=(4x-2y,2x+6y)$, onde D é a região interior à elipse $\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

14. Se D é a região interior à elipse $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ e exterior à circunferência $x^2+y^2=4$, calcule a integral de linha $I=\displaystyle\int_C\left(2xy+e^{x^2}\right)dx+\left(x^2+2x+\cos\left(y^2\right)\right)dy$, onde $C=\partial D$ está orientada positivamente.

15. Calcule as integrais de linha <u>diretamente</u> e também pelo <u>Teorema de Green</u>:

    (a) $\int_C(3x-y)\,dx+(x+5y)\,dy$, onde C é a circunferência unitária $x=\cos t$, $y=\operatorname{sen}t$, com $0\le t\le 2\pi$.

    (b) $\int_C\left(xy-y^2\right)dx+(xy)\,dy$, onde C é o caminho fechado formado por $y=0$, $x=1$ e $y=x$, orientado positivamente.

16. Calcule as seguintes integrais:

    (a) $\displaystyle\oint_C\left(2y+\sqrt[3]{1+x^5}\right)dx+\left(5x-e^{y^2}\right)dy$, onde C é a circunferência $x^2+y^2=4$.

    (b) $\displaystyle\oint_C\frac{-xy}{1+x}\,dx+\ln(1+x)\,dy$, onde C é formada por $y=0$, $x+2y=4$ e $x=0$.

    (c) $\displaystyle\oint_C\frac{y^2}{2}\,dx+2xy\,dy$, onde C é a fronteira da região limitada por $y=x$, $y=-x$ e $x^2+y^2=4$, com $y\ge 0$.

    (d) $\displaystyle\oint_C x^{-1}e^y\,dx+(2x+e^y\ln x)\,dy$, onde C é a fronteira da região limitada por $x=y^4+1$ e $x=2$.

    (e) $\displaystyle\oint_C(y-x+\arctan x)\,dx+\left(2x-y+\sqrt{1+y^2}\right)dy$, onde C é a fronteira da região limitada pelas curvas $y=x+2$ e $y=x^2$.

    (f) $\displaystyle\oint_C\left(xy-\frac{y^3}{3}\right)dx+\left(x+\frac{x^3}{3}+y\right)dy$, onde C é a fronteira da região D entre as circunferências $x^2+y^2=1$ e $x^2+y^2=9$, orientada positivamente.

17. Calcule as seguintes integrais:

    (a) $\displaystyle\int_C\left(e^{x^3}+y^2\right)dx+\left(x+y^5\right)dy$, onde C é formada por $y=x$ e $y=0$, $0\le x\le 1$, que vai do ponto $(1,1)$ ao ponto $(1,0)$.

    (b) $\displaystyle\int_C(1+2x\cos y)\,dx+\left(7xy-x^2\operatorname{sen}y\right)dy$, onde C é a curva $y=\cos x$, $-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$, percorrida de $A=\left(\frac{\pi}{2},0\right)$ a $B=\left(\frac{-\pi}{2},0\right)$.

(c) $\displaystyle\int_C \left(2x\ln\left(y+x^2\right)-3y\right)dx+\left(\ln\left(y+x^2\right)-2x\right)dy$, onde C é a poligonal aberta que une os pontos $(2,0)$, $(2,2)$ e $(1,0)$, nesta ordem.

(d) $\displaystyle\int_C \left(e^x\ln y-2y\right)dx+\left(y^{-1}e^x\right)dy$, onde C é o arco de parábola $y=x^2+1$, orientado de $(-1,2)$ a $(1,2)$.

18. Calcule o trabalho realizado pelo campo de forças $\vec{F}(x,y)=\left(2xe^y-x^2y-\frac{y^3}{3},x^2e^y+\operatorname{sen}y\right)$, ao mover uma partícula ao longo da trajetória C dada por $\vec{r}(t)=(1+\cos t,\operatorname{sen}t)$, $0\le t\le\pi$.

19. Considere o campo vetorial dado por $\vec{F}(x,y)=\nabla f(x,y)-(y,-x)$, onde $f(x,y)=x^2e^{xy}\cos\left(y^2\right)$. Calcule $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$, onde C é a elipse $4x^2+9y^2=36$, percorrida no sentido anti-horário.

20. Seja $\varphi:\ \mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$, tal que $\nabla^2\varphi=-3x$. Considere o campo $\vec{F}=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y},-\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)$. Calcule $\displaystyle\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$, onde C é a curva formada por $y=x^3$ e $y=x$.

21. Seja $\vec{F}=(P,Q)$ um campo vetorial de classe $\mathcal{C}^1$, em $U=\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$, tal que $\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)+4$, para todo $(x,y)\in U$. Sabendo que $\displaystyle\oint_{C_1}\vec{F}\cdot d\vec{r}=6\pi$, onde $C_1:\ x^2+y^2=1$, calcule $\displaystyle\oint_{C_2}\vec{F}\cdot d\vec{r}$, onde $C_2:\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{25}=1$.

22. Considere um campo $\vec{F}$ definido em $U=\mathbb{R}^2-\{(-2,0),\ (2,0)\}$ tal que $\nabla\times\vec{F}(x,y)=\vec{0}$ em $(x,y)\in U$. Suponha que $\displaystyle\oint_{C_1}\vec{F}\cdot d\vec{r}=6$, $C_1:\ (x+2)^2+y^2=1$ e $\displaystyle\oint_{C_2}\vec{F}\cdot d\vec{r}=9$, $C_2:\ (x-2)^2+y^2=1$. Calcule $\displaystyle\oint_C\vec{F}\cdot d\vec{r}$, $C:\ x^2+y^2=16$.

23. Calcule $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$, onde $\vec{F}(x,y)=\left(\frac{-y}{x^2+y^2-2x+1},\frac{x-1}{x^2+y^2-2x+1}+x\right)$ e C é a curva fechada formada pelas curvas $x+y+2=0$, $x-y+2=0$ e $x+y^2=4$, $-2\le y\le 2$, percorrida no sentido anti-horário.

24. Calcule $\displaystyle\int_C \left(xy-\frac{y}{x^2+y^2}\right)dx+\left(2x+\frac{x}{x^2+y^2}\right)dy$, onde C é a curva $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$, $y\ge 0$, orientada de $(4,0)$ a $(-4,0)$.

25. Seja $\vec{F}(x,y)=\left(\frac{y-1}{x^2+(y-1)^2}-y,\frac{-x}{x^2+(y-1)^2}\right)$, $(x,y)\neq(0,1)$. Calcule a integral de linha do campo $\vec{F}$ ao longo de C_1 e C_2, orientadas no sentido anti-horário, onde

(a) $C_1:\ x^2+(y-1)^2=1$; (b) $C_2:\ x^2+y^2=16$.

26. Seja C uma curva simétrica em relação ao eixo y, que vai de $(4,0)$ a $(-4,0)$, como mostrada na figura ao lado. Sabendo-se que a área da região delimitada por C e o eixo x vale 16, calcule o trabalho realizado pela força $\vec{F}(x,y)=\left(\frac{x^2}{4}+xy^3\right)\ \vec{i}+(2x+\arctan y)\ \vec{j}$.

27. Calcule $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$, onde $\vec{F}(x,y)=(1+2x\cos y)\ \vec{i}+\left(7xy-x^2\operatorname{sen}y\right)\vec{j}$ e C é a curva $y=\cos x$, $-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$, percorrida de $A=\left(\frac{\pi}{2},0\right)$ a $B=\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$.

28. Seja $\vec{F}=(P,Q)$ de classe C^1 em $U=\mathbb{R}^2-\{(0,2),\ (0,-2)\}$, tal que $\frac{\partial Q}{\partial x}=x+2+\frac{\partial P}{\partial y}$. Sejam $C_1:\ x^2+y^2=16$, $C_2:\ x^2+(y-2)^2=4$ e $C_3:\ x^2+(y+2)^2=4$. Calcule $\displaystyle\oint_{C_2}\vec{F}\cdot d\vec{r}$, sabendo que $\displaystyle\oint_{C_1}\vec{F}\cdot d\vec{r}-10\pi=\oint_{C_2}\vec{F}\cdot d\vec{r}$ e $\displaystyle\oint_{C_2}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\oint_{C_3}\vec{F}\cdot d\vec{r}-8\pi$.

29. Calcule $\int_C \left(2xy^3 - y^2\cos x\right) dx + \left(1 - 2y\,\mathrm{sen}\,x + 3x^2y^2\right) dy$, onde C é o arco da parábola $2x = \pi y^2$ de $P_1 = (0,0)$ a $P_2 = \left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$.

30. Seja $\vec{F} = (P,Q) = \left(\cos\left(x^2\right) + x^2y^3 - \frac{y}{2-x}, x^3y^2 + \ln(2-x)\right)$.

    (a) $\vec{F}$ é conservativo? Por quê?

    (b) Calcule $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$, $C:\ \vec{r}(t) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos t, \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\,t\right)$, $0 \le t \le 2\pi$.

    (c) Calcule $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$, $C:\ (x-1)^2 + y^2 = 1$, $x \le 1$, orientada no sentido anti-horário.

31. Calcule $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$, onde $\vec{F} = (P,Q) = \left(\cos\left(xy^2\right) - xy^2\,\mathrm{sen}\,\left(xy^2\right), -2x^2y\,\mathrm{sen}\,\left(xy^2\right)\right)$ e C é dada por

    (a) $C:\ \vec{r}(t) = (1+\cos t, \mathrm{sen}\,t)$, $0 \le t \le 2\pi$.

    (b) $C:\ \vec{r}(t) = \left(t + (t-1)\ln\left(1+t^2\right), -\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right)$, $0 \le t \le 1$.

32. Seja C qualquer curva unindo qualquer ponto na circunferência $x^2+y^2=a^2$ a qualquer ponto na circunferência $x^2+y^2=b^2$, $b > a > 0$. Seja $\vec{F}(x,y) = 3\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}}(x,y)$. Mostre que $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ tem sempre o valor $b^3 - a^3$.

33. Verifique que a seguinte integral independe do caminho e calcule o seu valor: $I = \displaystyle\int_{(0,2)}^{(1,3)} \frac{3x^2}{y}dx - \frac{x^3}{y^2}dy.$

34. Encontre todos os valores possíveis de $I = \displaystyle\int_C \frac{(x+y)\ dx + (y-x)\ dy}{x^2+y^2}$, onde C é uma curva fechada qualquer que não passa pela origem.

35. Considere a curva C parametrizada por $r(t) = \left(\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{t}, e^{t-1}\right)$, com $1 \le t \le 2$. Calcule $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$, onde $\vec{F}(x,y) = \left(-y^2\,\mathrm{sen}\,x, 2y\cos x\right)$.

36. Calcule $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$, onde $\vec{F}(x,y) = \left(y^3+1\right)\vec{i} + \left(3xy^2+1\right)\vec{j}$ e C é a semicircunferência $(x-1)^2+y^2=1$, com $y \ge 0$, orientada de $(0,0)$ a $(2,0)$.

37. Calcule $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$, onde $\vec{F}(x,y) = (\mathrm{sen}\,y - y\,\mathrm{sen}\,x)\ \vec{i} + (x\cos y + \cos x)\,\vec{j}$ e C é a curva parametrizada por $r(t) = \left(\frac{t^2-1}{1+t^2}, \frac{2t^2}{1+t^3}\right)$, com $0 \le t \le 1$.

38. Verifique que a integral $\displaystyle\int_{(1,1)}^{(3,3)} \left(e^x\ln y - \frac{e^y}{x}\right)dx + \left(\frac{e^x}{y} - e^y\ln x\right)dy$ independe do caminho e calcule o seu valor.

Respostas

1. (a) 0
   (b) 0
   (c) $-\frac{2}{3}$
2. (a) 8π
   (b) 12π
   (c) 1
3. (a) $\frac{7}{2}$
   (b) $\frac{11}{3}$
   (c) $\frac{\pi}{4}+3$
4. (a) 6
   (b) $\frac{11}{2}$
5. (a) $-2\sqrt{2}\pi$
   (b) π
   (c) -42π
6. $-\frac{64}{5}$
7. 64π
8. 0
9. $-6k$
10. 3
11. $\frac{16}{3}+4w$
12. 1
13. 8π
14. 22π
15. (a) 2π
    (b) $\frac{1}{6}$
16. (a) 12π
    (b) 4
    (c) $\frac{8\sqrt{2}}{3}$
    (d) $\frac{16}{5}$
    (e) $\frac{9}{2}$
    (f) 48π
17. (a) -1
    (b) $\frac{3\pi}{4}$
    (c) $4-8\ln 2$
    (d) $\left(e-e^{-1}\right)\ln 2-\frac{16}{3}$
18. $\frac{3\pi}{4}-4$
19. 12π
20. $\frac{2}{5}$
21. 42π
22. 15
23. $\frac{44}{3}+2\pi$
24. 9π
25. (a) $-\pi$
    (b) 14π
26. $\frac{64}{3}$
27. $\frac{3\pi}{4}$
28. 2π
29. $\frac{\pi^2}{4}$
30. (a) é conservativo
    (b) 0
    (c) $-\frac{2}{3}$
31. (a) 0
    (b) 1
33. $\frac{1}{3}$
34. $2\pi, \quad 0, \quad -2\pi$
35. $e^2\cos 1-1$
36. 2
37. 1
38. 0

Universidade Federal Fluminense
EGM - Instituto de Matemática e Estatística
GMA - Departamento de Matemática Aplicada

LISTA 5 - 2015-1
Integral de Superfície de Campo Escalar
Fluxo de Campo Vetorial

---

1. Parametrize as superfícies abaixo, indicando o domínio dos parâmetros:
   (a) S : parte da esfera $x^2+y^2+z^2=4$, que fica acima do plano $z=\sqrt{2}$.
   (b) S : parte do cilindro $x^2+y^2=4$, que fica entre os planos $z=-2$ e $y+z=2$.
   (c) S : parte do plano $x+y+z=2$ no interior do cilindro $x^2+y^2=1$.
   (d) S : cone gerado pela semireta $z=2y$, $y\geq 0$, girando-a em torno do eixo z.
   (e) S : superfície de revolução obtida girando o segmento de reta AB, $A=(4,1,0)$, $B=(2,4,0)$, em torno do eixo x.
   (f) S : parte do cilindro $x^2+y^2=2y$, que fica entre $z=0$ e $z=x^2+y^2$.
   (g) S : superfície de revolução obtida girando a curva $(x-a)^2+z^2=r^2$, com $0<r<a$, em torno do eixo z.

2. Seja S uma superfície parametrizada por $\vec{r}(u,v)=\big(v\cos u, v\,\text{sen}\,u, 1-v^2\big)$ $0\leq u\leq 2\pi$ e $v\geq 0$.
   (a) Identifique essa superfície
   (b) Encontre uma equação da reta normal a S em $\vec{r}(0,1)$
   (c) Encontre uma equação do plano tangente a S em $\vec{r}(0,1)$.

3. Calcule a área da superfície dada por $\vec{r}(u,v)=(u,v,u^2+v^2)$, com $(u,v)\in D:\ u^2+v^2\leq 4$.

4. Calcule a área das superfícies:
   (a) S : porção do plano $x+2y+z=4$, que está dentro do cilindro $x^2+y^2=4$.
   (b) S : parte da esfera $x^2+y^2+z^2=4$, interior ao cone $z=\sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}}$.
   (c) S : porção do cilindro $x^2+y^2=1$, entre os planos $z=y$ e $z=2y$.
   (d) S : parte do cilindro $x^2+y^2=2y$, limitado pelo plano $z=0$ e o cone $z=\sqrt{x^2+y^2}$.
   (e) S : superfície gerada pela rotação do conjunto $C=\big\{(0,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ (y-2)^2+z^2=1\big\}$ em torno do eixo z.
   (f) S : superfície gerada pela rotação do segmento de reta AB, $A=(0,1,3)$, $B=(0,3,1)$ em torno do eixo z.
   (g) S : parte da superfície $z=\sqrt{x^2+y^2}$, compreendida entre os planos $x+y=1$, $x+y=2$, $x=0$ e $y=0$.
   (h) S : parte do cone $z=\sqrt{x^2+y^2}$, que se encontra dentro do cilindro $x^2+y^2=2y$, fora do cilindro $x^2+y^2=1$.

5. Calcule a área da superfície da esfera de raio a, centrada na origem, limitada por dois paralelos e dois meridianos, sabendo que o ângulo entre os meridianos é α e a distância entre os planos que contêm os paralelos é h.

6. Seja S a superfície de equação $2z=x^2+y^2$, $0\leq z\leq k$, $k>0$. Sabendo-se que a área de S vale $\frac{14\pi}{3}$, determine o valor de k.

7. Deseja-se construir uma peça de zinco que tem a forma da superfície de equação $z=1-x^2$, compreendida entre os planos $y=0$ e $z=0$ e o cilindro $z=1-y^2$, $y\geq 0$. Se o metro quadrado do zinco custa R reais, calcule o preço total da peça.

8. O cilindro $x^2 + y^2 = x$ divide a esfera $S: \ x^2 + y^2 + z^2 = 1$ em duas regiões S_1 e S_2, onde S_1 está no interior do cilindro e S_2 fora. Ache a razão das áreas $\frac{A(S_2)}{A(S_1)}$.

9. Calcule $\iint_S f(x, y, z)dS$, onde

   (a) $f(x, y, z) = z - x^2 + xy^2 - 1$ e $S: \ \vec{r}(u, v) = u\,\vec{i} + v\,\vec{j} + \left(u^2 + 1\right)\,\vec{k}$, com $0 \leq u \leq 1$, $0 \leq v \leq 2$.

   (b) $f(x, y, z) = x^2 z$ e $S: \ x^2 + y^2 = a^2$, $a > 0$, com $0 \leq z \leq 1$.

   (c) $f(x, y, z) = x$ e S é a região triangular com vértices $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$.

   (d) $f(x, y, z) = z$ e S é a superfície do sólido limitado pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e os planos $z = 1$ e $x + z = 4$.

   (e) $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ e S é a porção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 36$, limitada pelos planos $z = 0$ e $z = 3$.

   (f) $f(x, y, z) = x^2 y^2 z^2$ e : é a parte da superfície cônica $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, limitada por $z = 4 - \sqrt{x^2 + y^2}$, com $z \geq 0$.

   (g) $f(x, y, z) = x^2 y^2$ e S é a porção do cilindro $x^2 + \ y^2 = a^2$, $a > 0$, no primeiro octante, entre os planos $z = y$ e $z = 2y$.

   (h) $f(x, y, z) = x^2 + y^2$ e $S: \ x^2 + y^2 + z^2 = 4$, com $z \geq 1$.

10. Suponha que $f(x, y, z) = \left(x^2 + y^2\right) \cdot g\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)$, onde g é uma função de uma variável, tal que $g(2) = -5$. Calcule $\iint_S f(x.y, z)\, dS$, onde S é a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

11. Calcule a massa da superfície S parte do plano $z = 2 - x$ dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 1$, sendo a densidade dada por $\rho(x, y, z) = y^2$.

12. Seja S a porção do cilindro $x^2 + y^2 = 1$, com $z \geq 0$, limitada pelo plano $x + y + z = 1$ e o plano $z = 0$. Calcule a massa de S, sabendo que a densidade de massa em um ponto é igual ao quadrado da distância do ponto ao eixo z.

13. Seja S a superfície do sólido limitado inferiormente pelo parabolóide $z = x^2 + y^2$ e superiormente pelo plano $z = 1$. Se a densidade de massa é dada por $\rho(x, y, z) = z$, calcule a massa de S.

14. Seja S a porção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que se encontra dentro do parabolóide $z = \frac{x^2 + y^2}{3}$. Calcule a massa de S sabendo que a densidade de massa em cada ponto $(x, y, z) \in S$ é igual ao quadrado da distância do ponto ao eixo z.

15. Seja S a superfície de rotação obtida girando $C = \left\{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3; \ x = \ln y, \ \sqrt{3} \leq y \leq \sqrt{8}\right\}$ em torno do eixo x. Calcule a massa de S, sabendo que a densidade em cada ponto é proporcional à distância do ponto ao eixo x.

16. Determine o momento de inércia em relação ao eixo z da superfície $S: \ x^2 + y^2 = 2y$, limitada por $z = 0$ e $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, sendo a densidade $\rho(x, y, z) = z$.

17. Mostre que o momento de inércia de uma casca cilíndrica de comprimento L e raio da base a, com densidade constante, em relação a um diâmetro do círculo cujo centro coincide com o centro da casca cilíndrica, é $I = \frac{1}{2}Ma^2 + \frac{1}{12}ML^2$, onde M é a massa total.

18. Calcule o momento de inércia da superfície homogênea, de massa M, de equação $x^2 + y^2 = R^2$, $(R > 0)$, com $0 \leq z \leq 1$, em torno do eixo z.

19. Uma lâmina tem a forma de um hemisfério de raio a. Calcule o momento de inércia dessa lâmina em relação a um eixo que passa pelo polo e é perpendicular ao plano que delimita o hemisfério. Considere a densidade no ponto P da lâmina proporcional à distância desse ponto ao plano que delimita o hemisfério.

20. Mostre que o momento de inércia em relação ao eixo z da casca do cone $z=\sqrt{x^2+y^2}$ de altura h que está no primeiro octante com densidade constante é $I=\frac{Mh^2}{2}$, , onde M é a massa total.

21. Calcule o momento de inércia da superfície esférica de raio R, homogênea, de massa M, em torno de qualquer diâmetro.

22. Calcule o centro de massa da superfície homogênea, parte da superfície cônica $z^2=x^2+y^2$, compreendida entre os planos $z=1$ e $z=2$.

23. Calcule $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\; dS$, onde

    (a) $\vec{F}(x,y,z)=-z\vec{k}$ e S é a parte da esfera $x^2+y^2+z^2=4$ fora do cilindro $x^2+y^2=1$, $\vec{n}$ apontando para fora.

    (b) $\vec{F}(x,y,z)=(-x)\ \vec{i}+(-y)\ \vec{j}+\left(3y^2z\right)\ \vec{k}$ e S é a parte do cilindro $x^2+y^2=16$, situado no primeiro octante, entre $z=0$ e $z=5-y$, $\vec{n}$ apontando para o eixo z.

    (c) $\vec{F}(x,y,z)=(z+3x)\ \vec{i}+(z+3)\ \vec{k}$ e S é a superfície do sólido limitado por $z=1-y^2$, $x=0$, $x=2$ e o plano xy, com $\vec{n}$ exterior.

    (d) $\vec{F}(x,y,z)=\left(-3xyz^2\right)\ \vec{i}+\left(x+2yz-2xz^4\right)\ \vec{j}+\left(yz^3-z^2\right)\ \vec{k}$ e S é a união da superfície $x^2+y^2=1$, $0\le z\le 1$, com $z=0$, $x^2+y^2\le 1$, indicando a orientação escolhida para S.

    (e) $\vec{F}(x,y,z)=\left(yz,-xz,x^2+y^2\right)$ e S é a superfície de revolução obtida girando o segmento de reta que liga $(1,0,1)$ a $(0,0,3)$, em torno do eixo z, com $\vec{n}$ tendo a componente z não negativa.

    (f) $\vec{F}(x,y,z)=(x,y,-z)$ e S é a semiesfera $x^2+y^2+z^2=4$, $z\ge 0$, com $\vec{n}$ exterior.

    (g) $\vec{F}(x,y,z)=y\ \vec{i}+x\ \vec{j}+2\ \vec{k}$ e S é a superfície plana limitada pelo triângulo de vértices $(2,0,0)$, $(0,2,0)$ e $(0,0,2)$, com $\vec{n}$ tendo a componente z não negativa.

    (h) $\vec{F}(x,y,z)=z\ \vec{i}+yz\ \vec{j}$ e S é a parte do plano $z=2-x$, limitada pelo cilindro $x^2+y^2=9$, com $\vec{n}$ tal que $\vec{n}\cdot\vec{k}\ge 0$

    (i) $\vec{F}(x,y,z)=\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}(x,y,z)$ e S é a esfera $x^2+y^2+z^2=a^2$, $a>0$, com $\vec{n}$ exterior.

    (j) $\vec{F}(x,y,z)=(x-y,x+y,z)$ e $S:\ x^2+y^2=a^2,\ z>0,\ 0\le z\le h$, com $\vec{n}$ exterior.

    (k) $\vec{F}(x,y,z)=x\ \vec{i}+-y\ \vec{j}$ e S é a parte da esfera $x^2+y^2+z^2=a^2$, $a>0$, no primeiro octante e $\vec{n}$ apontando para a origem.

    (l) $\vec{F}(x,y,z)=(x,-3y,-2z)$ e S é a união dos planos $y+z=0$, com $0\le x\le 1$, $-1\le y\le 0$ e $z=0$, com $0\le x\le 1$, $0\le y\le 1$, indicando a orientação escolhida para S.

24. Calcule o fluxo de $\vec{F}(x,y,z)=\left(y^2+z^2,x,x\right)$, através da superfície de revolução obtida girando o segmento de reta que liga o ponto $(4,1,0)$ a $(2,4,0)$ em torno do eixo x, onde o vetor $\vec{n}$ tem componente $\vec{i}$ não negativa.

25. Calcule o fluxo de $\vec{F}(x,y,z)=x\ \vec{i}+y\ \vec{j}-2z\ \vec{k}$, através da superfície S, parte do cilindro $x^2+y^2=2x$, limitado pelo plano $z=0$ e pelo cone $z=\sqrt{x^2+y^2}$, com vetor normal apontando para fora de S.

Respostas

1. (a) $\vec{r}(\phi,\theta) = (2\,\text{sen}\,\phi\cos\theta, 2\,\text{sen}\,\phi\,\text{sen}\,\theta, 2\cos\phi)$, $(\phi,\theta) \in D: \ 0 \le \phi \le \frac{\pi}{4},\ 0 \le \theta \le 2\pi$
   (b) $\vec{r}(\theta,z) = (2\cos\theta, 2\,\text{sen}\,\theta, z)$, $(\theta,z) \in D: \ 0 \le \theta \le 2\pi,\ -2 \le z \le 2 - 2\,\text{sen}\,\theta$
   (c) $\vec{r}(x,y) = (x, y, 2-x-y)$, $(x,y) \in D: \ x^2+y^2 \le 1$ ou
   $\vec{r}(r,\theta) = (r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta, 2 - r\cos\theta - r\,\text{sen}\,\theta)$, $(r,\theta) \in D: \ 0 \le r \le 1,\ 0 \le \theta \le 2\pi$
   (d) $\vec{r}(t,\theta) = (t\cos\theta, t\,\text{sen}\,\theta, 2t)$, $(t,\theta) \in D: \ t \ge 0,\ 0 \le \theta \le 2\pi$
   (e) $\vec{r}(t,\theta) = (4-2t, (1+3t)\cos\theta, (1+3t)\,\text{sen}\,\theta)$, $(t,\theta) \in D: \ 0 \le t \le 1,\ \theta \in [0,2\pi]$
   (f) $\vec{r}(\theta,z) = (2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta, 2\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\theta, z) = \big(\text{sen}\,2\theta, 2\,\text{sen}^2\theta, z\big)$,
   $(\theta,z) \in D: \ 0 \le \theta \le \pi,\ 0 \le z \le 4\,\text{sen}^2\theta$ ou
   $\vec{r}(t,z) = (\cos t, 1 + \text{sen}\,t, z)$, $(t,z) \in D: \ 0 \le t \le 2\pi,\ 0 \le z \le 2 + 2\,\text{sen}\,t$
   (g) $\vec{r}(t,\theta) = ((a + r\cos t)\cos\theta, (a + r\cos t)\,\text{sen}\,\theta, r\,\text{sen}\,t)$, $(t,\theta) \in D: \ 0 \le t \le 2\pi,\ 0 \le \theta \le 2\pi$

2. (a) $S: \ z = 1 - x^2 - y^2$ (paraboloide circular)
   (b) $(x,y,z) = (1,0,0) + \lambda(-2,0,-1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$
   (c) $2x + z - 2 = 0$

3. $\frac{\pi}{6}\left(17\sqrt{17} - 1\right)$
4. (a) $4\sqrt{6}\,\pi$
   (b) 4π
   (c) 4
   (d) 8
   (e) $8\pi^2$
   (f) $8\sqrt{2}\,\pi$
   (g) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$
   (h) $\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{2\pi}{3} + \sqrt{3}\right)$
5. $a\,h\,\alpha$
6. $\frac{3}{2}$
7. $\left(5\sqrt{5} - 1\right)\frac{R}{6}$
8. $\frac{2\pi+4}{2\pi-4}$
9. (a) $\frac{2}{9}\left(5\sqrt{5} - 1\right)$
   (b) $\frac{\pi a^3}{2}$
   (c) $\frac{\sqrt{3}}{6}$
   (d) $\left(4\sqrt{2} + \frac{33}{2}\right)\pi$
   (e) 216π
   (f) $8\sqrt{2}\,\pi$
   (g) $\frac{2a^6}{15}$
   (h) $\frac{20\pi}{3}$
10. $-\frac{640\pi}{3}$
11. $\frac{\sqrt{2}\,\pi}{4}$
12. $\frac{3\pi}{2} + 2$
13. $\frac{\pi}{60}\left(25\sqrt{5} + 61\right)$
14. $\frac{20\pi}{3}$
15. $\frac{38\,k\,\pi}{3}$
16. 6π
18. MR^2
19. $\frac{k\,\pi\,a^5}{2}$
21. $\frac{2MR^2}{3}$
22. $\left(0, 0, \frac{14}{9}\right)$
23. (a) $-4\pi\sqrt{3}$
    (b) $40\pi - 64$
    (c) $\frac{32}{3}$
    (d) π com $\vec{n}$ exterior
    (e) $\frac{\pi}{2}$
    (f) $\frac{16\pi}{3}$
    (g) $\frac{20}{3}$
    (h) 18π
    (i) 4π
    (j) $2\pi\,a^2\,h$
    (k) 0
    (l) $\frac{1}{2}$ com $\vec{n}$ apontando para cima
24. $\frac{255\pi}{2}$
25. $\frac{32}{3}$

Universidade Federal Fluminense
EGM - Instituto de Matemática e Estatística
GMA - Departamento de Matemática Aplicada

LISTA 6 - 2015-1
Teorema de Gauss
Teorema de Stokes

---

1. Verifique o Teorema de Gauss, calculando as duas integrais do enunciado para
   (a) $\vec{F}(x,y,z)=(x,y,z)$ e o sólido W limitado pelas superfícies $z=x^2+y^2$ e $z=4$.
   (b) $\vec{F}(x,y,z)=(z+1)\;\vec{k}$ e o sólido W limitado pelas superfícies $z=1-x^2-y^2$ e $z=0$.
2. Seja $\vec{F}(x,y,z)=6x\;\vec{i}-2y\;\vec{j}+5z\;\vec{k}$. Seja S a superfície da esfera com centro $(1,0,1)$ e raio 5. Ache o fluxo de $\vec{F}$, de dentro para fora de S.
3. Calcule $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\;dS$, onde $\vec{F}(x,y,z)=(x+y)\;\vec{i}+(y+z)\;\vec{j}+z^2\;\vec{k}$, S é a fronteira do cilindro $W=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ x^2+y^2\le 1,\ 0\le z\le 1\right\}$ e $\vec{n}$ orientada para fora de W.
4. Calcule $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\;dS$, onde $\vec{F}(x,y,z)=x^3\;\vec{i}+y^3\;\vec{j}+z^3\;\vec{k}$, S é a superfície esférica $x^2+y^2+z^2=1$ e $\vec{n}$ a orientação normal exterior a S.
5. Calcule o fluxo do campo $\vec{F}(x,y,z)=(x+\cos x, y+y\,\text{sen}\,x, 2z)$, através do tetraedro limitado pelos planos coordenados e pelo plano $x+y+z=1$, onde $\vec{n}$ é a normal unitária exterior a S.
6. Calcule o fluxo do campo $\vec{F}(x,y,z)=-y\;\vec{i}+x\;\vec{j}+4z^2\;\vec{k}$, através da superfície do sólido limitado pelo cilindro $x^2+y^2=1$ e pelos planos $z=0$ e $z+y=2$, com a normal S apontando para fora do sólido.
7. Calcule o fluxo do campo $\vec{F}(x,y,z)=\left(xy^2+e^y\right)\;\vec{i}+\left(yz^2+\text{sen}^2x\right)\;\vec{j}+\left(5+zx^2\right)\;\vec{k}$, através da superfície aberta $S:\ z=\sqrt{4-x^2-y^2},\ z\ge 0$, com $\vec{n}$ tendo componente z positiva.
8. Seja $\vec{F}(x,y,z)=z\arctan\left(y^2\right)\;\vec{i}+z^3\ln\left(x^2+1\right)\;\vec{j}+z\;\vec{k}$. Determine o fluxo de $\vec{F}$ através da parte do paraboloide $x^2+y^2+z=2$ que está acima do plano $z=1$, sendo $\vec{n}$ a normal com componente z não negativa.
9. Calcule $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\;dS$, onde $\vec{F}(x,y,z)=x\;\vec{i}+(-2y+e^x\cos z)\;\vec{j}+\left(z+x^2\right)\;\vec{k}$ e S é definida por $\left\{z=9-x^2-y^2,\ 0\le z\le 5\right\}$, $\left\{z=5,\ 1\le x^2+y^2\le 4\right\}$ e $\left\{z=8-3\left(x^2+y^2\right),\ x^2+y^2\le 1\right\}$.
10. Calcule o fluxo do campo $\vec{F}(x,y,z)=\left(\frac{x^3}{3}+y, \frac{y^3}{3}, \frac{z^3}{3}+2\right)$, através da superfície S do sólido W definido por $W=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ x^2+y^2+z^2\ge 1,\ x^2+y^2+(z-2)^2\le 4,\ z\ge\sqrt{x^2+y^2}\right\}$, com campo de vetores normais a S apontando para fora de W.
11. Seja T o tetraedro de vértices $O=(0,0,0)$, $A=(2,0,0)$, $B=(0,6,0)$, $C=(0,0,2)$. Sejam S a superfície lateral de T, constituída pelas faces de T que não estão no plano xy e $\vec{F}(x,y,z)=(3y+z, x+4z, 2y+x)$ um campo vetorial de $\mathbb{R}^3$. Calcule $\iint_S (rot\vec{F})\cdot\vec{n}\;dS$, com a normal exterior a S.
12. Seja a superfície cônica S de vértice $(0,0,h)$, $(h>0)$, de base situada no plano xy com raio 1 e $\vec{n}$ com componente $\vec{k}$ não negativa. Seja $\vec{F}(x,y,z)=\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)\;\vec{i}-\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)\;\vec{j}+2(z+1)\;\vec{k}$, sendo $f(x,y,z)$ de classe $\mathcal{C}^2$ em $\mathbb{R}^3$. Calcule o fluxo de $\vec{F}$ através de S.
13. Seja $f:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$, tal que $\nabla^2 f=x^2+y^2+z^2$. Calcule $\iint_S \nabla f\cdot\vec{n}\;dS$ onde S é a esfera $x^2+y^2+z^2=1$, com $\vec{n}$ exterior a S.
14. Seja S a calota esférica dada pela equação $x^2+y^2+z^2=4$, onde $0\le z\le 2$. Sobre S fixe a orientação $\vec{n}$, tal que $\vec{n}(0,0,2)=\vec{k}$. Calcule $\iint_S (rot\vec{F})\cdot\vec{n}\;dS$, onde $\vec{F}(x,y,z)=\left(\frac{-y^3}{3}+ze^x, \frac{x^3}{3}-\cos(yz), xy\right)$.

15. Considere o campo vetorial $\vec{F}(x,y,z) = (2x+e^z)\,\vec{i} + (3y - ze^x)\,\vec{j} + (z-2)\,\vec{k}$, seja S a calota esférica $x^2+y^2+z^2 = a^2$, com $z \geq 0$ e raio $a > 0$. Sabendo que o fluxo de $\vec{F}$ na direção da normal exterior $\vec{n}$ é igual a $2\pi a^3$, calcule o raio da calota.

16. Calcule $\iint_S (rot\vec{F}) \cdot \vec{n}\, dS$, sendo $\vec{F}(x,y,z) = \left(x^2y+2\right)\vec{i} + \left(x^3+y^4\right)\vec{j} + (2yz-1)\,\vec{k}$ e S a parte da esfera $x^2+y^2+z^2-4z=0$, com $z \leq 1$, orientada com $\vec{n}$ exterior.

17. Seja $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. Seja W um sólido e seja S a fronteira de W, com normal exterior $\vec{n}$. Prove que $\iint_S \frac{\partial f}{\partial \vec{n}}\, dS = \iiint_W \nabla^2 f\, dxdydz$, onde $\frac{\partial f}{\partial \vec{n}}$ é a derivada direcional de f na direção do vetor unitário $\vec{n}$.

18. Seja $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$, tal que $\nabla^2 f = x^2+y^2$ e $\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,1) = \frac{1}{3}$, para todo $(x,y,1) \in \mathbb{R}^3$. Calcule $\iint_S \frac{\partial f}{\partial \vec{n}}\, dS$, onde S é a lata cilíndrica com fundo e sem tampa dada por $x^2+y^2=1$, $0 \leq z \leq 1$, $z = 0$, $x^2+y^2 \leq 1$, com normal $\vec{n}$ apontando para fora de S.

19. Considere o campo vetorial $\vec{F} = (x + f(y,z))\,\vec{i} + (x-y+z)\,\vec{j} + \left(z^4 - 3a^2\right)\vec{k}$, onde $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ é de classe $\mathcal{C}^1$. Seja S uma lata cilíndrica com fundo e sem tampa dada por $x^2+y^2=a^2$, $0 \leq z \leq \sqrt{a}$, $a > 0$ e $x^2+y^2 \leq a^2$, $z = 0$. Sabendo que o fluxo de $\vec{F}$ através de S, de dentro para fora é igual a πa^3, calcule o valor de a.

20. Encontre o fluxo do campo $\vec{F} = (e^y + \cos(yz))\,\vec{i} + (-2zy + \text{sen}\,(xz))\,\vec{j} + \left(z^2 + \frac{3}{\sqrt{2}}\right)\vec{k}$ através da superfície S, orientada positivamente, $S = S_1 \cup S_2$, onde $S_1 :\ z = 4 - 2x^2 - y^2$, $0 \leq z \leq 2$ e $S_2 :\ z = 1 + x^2 + \frac{y^2}{2}$, $1 \leq z \leq 2$.

21. Calcule $\iint_S (rot\vec{F}) \cdot \vec{n}\, dS$, sendo $\vec{F}(x,y,z) = x\,\vec{j} + xy\,\vec{k}$, através de $S :\ x^2+y^2+\frac{z^2}{4} = 1$, $z \leq 1$, orientada de forma que o vetor normal no ponto $(0,0,-2)$ seja o vetor $-\vec{k}$.

22. Verifique o teorema de Stokes, calculando as duas integrais do enunciado para
    (a) $\vec{F}(x,y,z) = (y,-x,0)$, S o paraboloide $z = x^2+y^2$, $0 \leq z \leq 1$ e $\vec{n}$ apontando para fora de S.
    (b) $\vec{F}(x,y,z) = y\,\vec{i} + z\,\vec{j} + x\,\vec{k}$, S o hemisfério $z = \sqrt{a^2-x^2-y^2}$, $a > 0$, orientada com $\vec{n}$ normal unitária exterior a S.

23. Use o o teorema de Stokes para mostrar que a integral de linha é igual ao valor dado, indicando a orientação da curva C em:
    (a) $\oint_C (3y+z)\,dx + (x+4y)\,dy + (2x+y)\,dz = -\frac{3\sqrt{2}\pi}{4}$, onde C é a interseção da esfera $x^2+y^2+z^2=1$ com o plano $y+z=1$.
    (b) $\oint_C (y+z)\,dx + (z+2x)\,dy + (x+y)\,dz = -\pi$, onde C é a interseção do plano $y = z$ com o cilindro $x^2+y^2=2y$.
    (c) $\oint_C (2xy)\,dx + \left[(1-y)z + x^2 + x\right]\,dy + \left(\frac{x^2}{2} + e^z\right)\,dz = \pi$, onde C é a interseção do cilindro $x^2+y^2=1$ com o cone $z = \sqrt{x^2+(y-1)^2}$.
    (d) $\oint_C (8x-2y)\,dx + y\,dy + 3z\,dz = -4$, onde C é a fronteira do triângulo situado no plano $x+z=2$, de vértices $(2,0,0)$, $(2,2,0)$ e $(0,0,2)$.

24. Calcule $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, sendo $\vec{F} = \left(x-y^2\right)\vec{i} + \left(x - z + \frac{y^2}{2+\text{sen}\,y}\right)\vec{j} + y\,\vec{k}$ e C a interseção do paraboloide $4z = x^2+y^2$ com o cilindro $x^2+y^2=4$, orientada no sentido anti-horário se projetada no plano xy.

25. Calcule $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, sendo $\vec{F}(x,y,z) = (yz+z, xz+e^{-y}, xy+e^{-z})$ e C a curva interseção das superfícies $x^2+y^2=4$ e $z = y+3$, orientada no sentido anti-horário quando projetada no plano xy.

26. Calcule $\displaystyle\int_C (e^{x^2} + y^2)\,dx + (e^{y^2} - z^2)\,dy + (e^{z^2} - x^2)\,dz$, onde C é o contorno da parte do plano $x+y+z=1$, que está no primeiro octante, no sentido anti-horário.

27. Calcule $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$, onde $\vec{F}(x,y,z) = (z-x+\operatorname{sen} x, z-x+\cos y, x-y+e^z)$ e C é a interseção do cilindro $x^2+y^2=a^2$ com o plano $\frac{x}{a}+\frac{z}{b}=1$, $a>0$, $b>0$, orientada no sentido anti-horário quando vista de cima.

28. Calcule a circulação do campo $\vec{F}(x,y,z) = y\,\vec{i}+xz\,\vec{j}+z^2\,\vec{k}$ ao redor da curva C fronteira do triângulo recortado do plano $x+y+z=1$ pelo primeiro octante, no sentido horário quando vista da origem.

29. Calcule $\oint_C (e^{-x^3/3}-yz)\,dx+(e^{-y^3/3}+xz+2x)\,dy+(e^{-z^3/3}+5)\,dz$, onde C é dada por $\vec{r}(t)=(\cos t, \operatorname{sen} t, 2)$, $t\in[0,2\pi]$.

30. Calcule $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$, onde $\vec{F}(x,y,z) = yz^2\,\vec{i}+2xz\,\vec{j}+\cos(xyz)\,\vec{k}$ e C é a interseção da superfície $z=x^2+y^2$ com $z=10-x^2-y^2$, orientada no sentido anti-horário quando vista de cima.

31. Calcule o trabalho realizado pelo campo de forças $\vec{F}(x,y,z) = \left(2^x+z^2\right)\vec{i}+\left(2^y+x^2\right)\vec{j}+\left(2^z+y^2\right)\vec{k}$ quando uma partícula se move sob sua influência ao redor da borda da esfera $x^2+y^2+z^2=4$ que está no primeiro octante, no sentido anti-horário quando vista de cima.

32. Calcule $\int_C (z-y)\,dx+\ln\left(1+y^2\right)dy+\left[\ln(1+z^2)+y\right]dz$, sendo C dada por $\vec{r}(t)=(4\cos t, 4\operatorname{sen} t, 4-4\cos t)$, $0\le t\le 2\pi$.

33. Seja o campo $\vec{F}$, tal que $rot\,\vec{F} = (-4x, 2(y-1), f(z))$, onde $f:\ \mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ é de classe $\mathcal{C}^1$ com $f(0)=1$. Calcule $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$, onde C é a curva dada pela interseção das superfícies $z=x^2+y^2$ e $x^2+(y-1)^2=1$, orientada no sentido anti-horário quando vista de cima.

34. Calcule $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$, sendo $\vec{F}$ um campo em $\mathbb{R}^3$ dado por $\vec{F}=(-y,x,f(x,y,z))$, onde $f:\ \mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}$ é de classe $\mathcal{C}^1$, tal que $\nabla f\cdot\vec{i}=-3$ em $\mathbb{R}^3$ e C é a interseção da superfície $x^2+y^2=1$ com o plano $z-y=2$, com uma orientação tal que quando projetada no plano $z=0$ produz um percurso no sentido horário.

35. Utilizando o teorema de Stokes, transforme $\iint_S rot\,\vec{F}\cdot\vec{n}\;dS$ em uma integral de linha e calcule:

    (a) $\vec{F}(x,y,z)=y\,\vec{k}$, $S:\ \vec{r}(u,v)=\left(u,v,u^2+v^2\right)$, com $u^2+v^2\le 1$, sendo $\vec{n}$ a normal apontando para cima.

    (b) $\vec{F}(x,y,z)=y\,\vec{i}$, S a superfície $x^2+y^2+z^2=2$, $x^2+y^2\le 1$ e $z\ge 0$, sendo $\vec{n}$ a normal apontando para cima.

    (c) $\vec{F}(x,y,z)=x\,\vec{j}+xy\,\vec{k}$, $S:\ x^2+y^2+\frac{z^2}{4}=1$, $z\le 1$, sendo $\vec{n}$ tal que $\vec{n}(0,0,-2)=-\vec{k}$.

    (d) $\vec{F}(x,y,z)=x^2y\,\vec{i}+2y^3z\,\vec{j}+3z\,\vec{k}$, $S:\ \vec{r}(r,\theta)=(r\cos\theta)\,\vec{i}+(r\operatorname{sen}\theta)\,\vec{j}+r\,\vec{k}$, com $0\le r\le 1$, $0\le\theta\le 2\pi$, sendo $\vec{n}$ a normal exterior.

36. Calcule $\iint_S rot\,\vec{F}\cdot\vec{n}\;dS$, onde $\vec{F}(x,y,z)=(y,2x,xyz)$, S é formada pelas cinco faces do cubo $[0,2]\times[0,2]\times[0,2]$ que não estão no plano xy com $\vec{n}$ exterior a S.

    (a) Utilizando o teorema de Gauss

    (b) Utilizando o teorema de Stokes.

37. Calcule $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$, onde $\vec{F}(x,y,z)=\left(z^2+e^{x^2}, xz+e^y, 2xy+ze^z\right)$ e C é a curva obtida como interseção da superfície $z=1-y^2$, $z\ge 0$, com o plano $x+z=2$, orientada no sentido anti-horário quando vista do eixo x positivo.

38. Calcule $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$, onde $\vec{F}(x,y,z)=\left(z, z^2+y\cos y, 2yz+ze^{-z}\right)$ e C é a curva obtida como interseção da superfície $z=x^2$, com o plano $y+z=4$, orientada no sentido anti-horário quando vista de cima.

39. Calcule $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$, onde $\vec{F}(x,y,z)=\left(-2y+e^{\operatorname{sen} x}, -z+y, x^3+e^{\operatorname{sen} z}\right)$ e C é a interseção da superfície $z=y^2$, com o plano $x+z=1$, orientada no sentido de crescimento de y.

40. Determine $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$, onde $\vec{F}(x,y,z) = \left(yz + x^3, xz + 3y^2, xy + 4\right)$ e C é a curva obtida como interseção da superfícies $z = 5 - y^2$, $z \geq 1$ e $x + z = 5$, orientada no sentido de crescimento de y.

41. Calcule $\displaystyle\int_C (ze^{xz} + ye^{xy} + 6x)\,dx + (xe^{xy} + ze^{yz})\,dy + (xe^{xz} + ye^{yz} - \operatorname{sen} z)\,dz$, onde C é a curva dada por $\vec{r}(t) = t^2\,\vec{i} + (t-1)(t-3)\,\vec{j} + \pi t^3\,\vec{k}$, $0 \leq t \leq 1$.

42. Calcule $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$, onde $\vec{F}(x,y,z) = (e^{-y} - ze^{-x}, e^{-z} - xe^{-y}, e^{-x} - ye^{-z})$ e C é a curva parametrizada por $\vec{r}(t) = \left(\frac{\ln(1+t)}{\ln 2}, \operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{2}\right), \frac{1-e^t}{1-e}\right)$, $0 \leq t \leq 1$.

43. Calcule a integral do campo vetorial $\vec{F}(x,y,z) = \left(x + y + z, z + x + e^{-y^2/2}, x + y + e^{-z^2/2}\right)$ ao longo da curva interseção da superfície $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 = 1$, $z \geq 0$, com o plano $y = -1$, orientada no sentido de crescimento de x.

44. Seja o campo vetorial $\vec{F} = \left(3yz^2 - 2xe^z\right)\,\vec{i} + \left(3xz^2 + \cos y\right)\,\vec{j} + \left(6xyz - x^2e^z\right)\,\vec{k}$

    (a) $\vec{F}$ é conservativo? Por quê?

    (b) Calcule $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$, se C é a curva descrita por $\vec{r}(t) = t\,\vec{i} + \left(\frac{\pi}{2}t^3\right)\,\vec{j} + (t-1)(t-2)\,\vec{k}$, $0 \leq t \leq 1$

    (c) Calcule $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$, onde C é a fronteira do plano $x + y + z = 2$, que fica no primeiro octante, orientada no sentido anti-horário.

Respostas

1. (a) 24π
   (b) $\frac{\pi}{2}$
2. 1500π
3. 3π
4. $\frac{12\pi}{5}$
5. $\frac{2}{3}$
6. 17π
7. $\frac{164\pi}{5}$
8. $\frac{3\pi}{2}$
9. $\frac{81\pi}{4}$
10. $\frac{\pi}{15}\left(890 + 3\sqrt{2}\right)$
11. -12
12. $\frac{2\pi}{3}(h+3)$
13. $\frac{4\pi}{5}$
14. 8π
15. 1
16. $\frac{-9\pi}{2}$
18. $\frac{\pi}{6}$
19. $\frac{1}{3}$
20. 6π
21. $\frac{-3\pi}{4}$
22. (a) 2π
    (b) $-\pi a^2$
24. 4π
25. -4π
26. $\frac{1}{3}$
27. $-2\pi\, a(a+b)$
28. $-\frac{1}{2}$
29. 6π
30. 75π
31. 16
32. 32π
33. 5π
34. π
35. (a) 0
    (b) $-\pi$
    (c) $-\frac{3\pi}{4}$
    (d) $\frac{\pi}{4}$
36. (a) 4
    (b) 4
37. $\frac{8}{3} - e + e^{-1}$
38. $-\frac{16}{3}$
39. 2
40. 32
41. e^{π}
42. $3\,e^{-1}$
43. $-\frac{8\sqrt{2}}{3}$
44. (a) É conservativo
    (b) 0
    (c) 0