4- Método de Diferenças Finitas Aplicado às Equações Diferenciais Parciais.

4.1- Aproximação de Funções.

4.1.1- Aproximação por Polinômios.

4.1.2- Ajuste de Dados: Mínimos Quadrados.

4.2- Derivadas e Integrais Numéricas.

4.2.1- Aproximação de Derivadas por Diferenças Finitas.

4.2.2- Aproximação de Integrais por Regras de Integração Numérica.

4.3- Solução de Equações Diferenciais Ordinárias.

4.4- Solução de Equações Diferenciais Parciais.

4.2- Derivadas e Integrais Numéricas.

Na aula anterior (4.1) aproximamos funções desconhecidas por outras funções conhecidas (polinômios, etc). Foi visto duas formas de aproximação: Interpolação por Polinômios e aproximação por Mínimos Quadrados.

$$f(x) \approx p_n(x) \text{ com erro } \quad e_n(x) = f(x) - p_n(x)$$

Agora estudaremos algumas formas de aproximar as derivadas e integrais de funções desconhecidas por outras funções conhecidas (polinômios).

$$\frac{df(x)}{dx} \approx \frac{dp_n(x)}{dx} \quad \text{e} \quad \int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b p_n(x)dx \qquad \text{ou} \quad \mathsf{L}(\circ) = \begin{cases} D(\circ) = \dfrac{d(\circ)}{dx} \text{ (derivadas)} \\ I(\circ) = \displaystyle\int_a^b (\circ)dx \text{ (integrais)} \end{cases}$$

Note que as operações de derivada e integral são lineares:

$$\mathsf{L}(f_1(x) + f_2(x)) = \mathsf{L}(f_1(x)) + \mathsf{L}(f_2(x)),$$

$$\mathsf{L}(\alpha f_1(x)) = \alpha \mathsf{L}(f_1(x)), \text{ onde } \alpha \text{ é um número.}$$

4.2- Derivadas e Integrais Numéricas.

Logo o erro verifica: $\mathrm{L}(e_n(x)) = \mathrm{L}(f\ (x) - p_n(x)) = \mathrm{L}(f\ (x)) - \mathrm{L}(p_n(x)).$

Escolhendo $p_n(x)$ como um polinômio que interpola a função $f(x)$ em (*n*+1) pontos e representando este polinômio na forma de Lagrange segue:

$$p_n(x) = L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) l_i(x) \text{ com } l_i(x) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} \frac{(x - x_k)}{(x_i - x_k)} \text{ e } l_k(x_i) = \delta_{ik}.$$

$$\mathrm{L}(f(x)) \approx \mathrm{L}(p_n(x)) = \mathrm{L}\left(\sum_{i=0}^{n} f(x_i) l_i(x)\right) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \mathrm{L}(l_i(x)) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) w_i$$

onde $w_i = \mathrm{L}(l_i(x))$ não depende de $f(x)$ e são determinados uma única vez, sendo válidos para qualquer função (Regra).

$\mathrm{L}(f(x)) \approx \sum_{i=0}^{n} f(x_i) w_i$ é uma Regra de Aproximação para $\mathrm{L}(f(x))$, onde os pontos x_i são chamados nós (pontos de discretização) e w_i pesos ou coeficientes. Estudaremos algumas Regras para aproximar derivadas e integrais.

4.2.1- Aproximação de Derivadas por Diferenças Finitas.

Como aproximar derivadas de uma função por formulas de diferenças finitas baseadas apenas nos valores dos nós (x_i) e da função nestes pontos ($f(x_i)$)?

$$\mathrm{L}(f(x)) = \frac{df(x)}{dx} = D(f(x)) \approx \frac{dp_n(x)}{dx} = D(p_n(x))$$

Faremos o desenvolvimento para uma função de uma variável, mas esta metodologia pode ser estendia para funções de várias variáveis. No desenvolvimento a seguir é assumido que a função $f(x)$ e suas derivadas são continuas num intervalo [*a*,*b*].

Sendo assim, podemos aproximar esta função por um polinômio representado como uma Serie de Taylor entorno do ponto $\bar{x} \in [a,b]$:

$$f(x) = f(\bar{x}) + \frac{1}{1!}\frac{df(\bar{x})}{dx}(x-\bar{x}) + \frac{1}{2!}\frac{d^2 f(\bar{x})}{dx^2}(x-\bar{x})^2 + \cdots + \frac{1}{n!}\frac{d^n f(\bar{x})}{dx^n}(x-\bar{x})^n + O\left((x-\bar{x})^{n+1}\right) \quad (1)$$

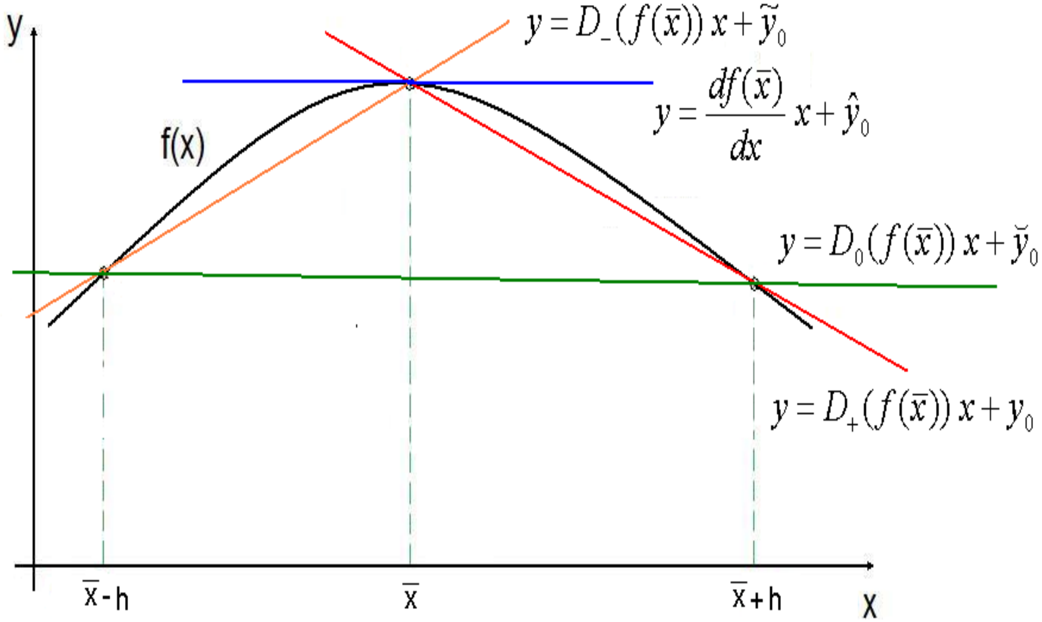
4.2.1- Aproximação de Derivadas por Diferenças Finitas.

A aproximação mais familiar para $\dfrac{df(\bar{x})}{dx}$ de acordo com a definição de derivada seria para algum *h* pequeno:

$$\frac{df(\bar{x})}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(\bar{x}+h) - f(\bar{x})}{h} \approx D_+(f(\bar{x})) = \frac{f(\bar{x}+h) - f(\bar{x})}{h} \quad \begin{cases} \text{Lado Direito (Adiantado)} \\ \text{forward-difference formula} \end{cases}$$

$$\frac{df(\bar{x})}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(\bar{x}+h) - f(\bar{x})}{h} \approx D_-(f(\bar{x})) = \frac{f(\bar{x}) - f(\bar{x}-h)}{h} \quad \begin{cases} \text{Lado Esquerdo (Retardado)} \\ \text{backward-difference formula} \end{cases}$$

$$\frac{df(\bar{x})}{dx} \approx D_0(f(\bar{x})) = \frac{f(\bar{x}+h) - f(\bar{x}-h)}{2h} = \frac{1}{2}\left(D_+(f(\bar{x})) + D_-(f(\bar{x}))\right) \quad \begin{cases} \text{DiferençaCentrada} \\ \text{centered-differenceformula} \end{cases}$$



Note que $D_0(f(\bar{x}))$ é o valor médio da aproximação por ambos lados (centrada). Este valor aproxima melhor a derivada da função que as diferenças laterais (adiantada ou retardada).

4.2.1- Aproximação de Derivadas por Diferenças Finitas.

Por que $D_0(f(\bar{x}))$ parece ser mais precisa que $D_+(f(\bar{x}))$ ou $D_-(f(\bar{x}))$?

Analisemos o erro de cada aproximação! Para isto é comum usar a expansão em Serie de Taylor entorno do ponto $\bar{x} \in [a,b]$:

$$f(x) = f(\bar{x}) + \frac{1}{1!}\frac{df(\bar{x})}{dx}(x-\bar{x}) + \frac{1}{2!}\frac{d^2 f(\bar{x})}{dx^2}(x-\bar{x})^2 + \cdots + \frac{1}{n!}\frac{d^n f(\bar{x})}{dx^n}(x-\bar{x})^n + O\left((x-\bar{x})^{n+1}\right) \quad (1)$$

$$f(x=\bar{x}+h) = f(\bar{x}) + \frac{df(\bar{x})}{dx}h + \frac{1}{2}\frac{d^2 f(\bar{x})}{dx^2}h^2 + \frac{1}{6}\frac{d^3 f(\bar{x})}{dx^3}h^3 + \cdots + \frac{1}{n!}\frac{d^n f(\bar{x})}{dx^n}h^n + O\left(h^{n+1}\right) \quad (2)$$

$$f(x=\bar{x}-h) = f(\bar{x}) - \frac{df(\bar{x})}{dx}h + \frac{1}{2}\frac{d^2 f(\bar{x})}{dx^2}h^2 - \frac{1}{6}\frac{d^3 f(\bar{x})}{dx^3}h^3 + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\frac{d^n f(\bar{x})}{dx^n}h^n + O\left(h^{n+1}\right) \quad (3)$$

Logo:

$$D_+(f(\bar{x})) = \frac{f(\bar{x}+h)-f(\bar{x})}{h} = \frac{df(\bar{x})}{dx} + \frac{1}{2}\frac{d^2 f(\bar{x})}{dx^2}h + \frac{1}{6}\frac{d^3 f(\bar{x})}{dx^3}h^2 + O\left(h^3\right) \text{ ou}$$

$$\underbrace{D_+(f(\bar{x})) - \frac{df(\bar{x})}{dx}}_{\text{erro na aproximação da derivada}} = \frac{1}{2}\frac{d^2 f(\bar{x})}{dx^2}h + \frac{1}{6}\frac{d^3 f(\bar{x})}{dx^3}h^2 + O\left(h^3\right)$$

Para *h* pequeno o erro é dominado pelo termo: $\frac{1}{2}\frac{d^2 f(\bar{x})}{dx^2}h$

4.2.1- Aproximação de Derivadas por Diferenças Finitas.

Similarmente temos:

$$D_-(f(\bar{x})) = \frac{f(\bar{x}) - f(\bar{x}-h)}{h} = \frac{df(\bar{x})}{dx} - \frac{1}{2}\frac{d^2 f(\bar{x})}{dx^2}h + \frac{1}{6}\frac{d^3 f(\bar{x})}{dx^3}h^2 + O\left(h^3\right) \text{ ou}$$

$$\underbrace{D_-(f(\bar{x})) - \frac{df(\bar{x})}{dx}}_{\text{erro na aproximação da derivada}} = -\frac{1}{2}\frac{d^2 f(\bar{x})}{dx^2}h + \frac{1}{6}\frac{d^3 f(\bar{x})}{dx^3}h^2 + O\left(h^3\right)$$

Para *h* pequeno o erro é dominado pelo termo: $-\frac{1}{2}\frac{d^2 f(\bar{x})}{dx^2}h$

$$D_0(f(\bar{x})) = \frac{f(\bar{x}+h) - f(\bar{x}-h)}{2h} = \frac{df(\bar{x})}{dx} + \frac{1}{3}\frac{d^3 f(\bar{x})}{dx^3}h^2 + O\left(h^3\right) \text{ ou}$$

$$\underbrace{D_0(f(\bar{x})) - \frac{df(\bar{x})}{dx}}_{\text{erro na aproximação da derivada}} = \frac{1}{3}\frac{d^3 f(\bar{x})}{dx^3}h^2 + O\left(h^3\right)$$

Para *h* pequeno o erro é dominado pelo termo: $\frac{1}{3}\frac{d^3 f(\bar{x})}{dx^3}h^2$

4.2.1- Aproximação de Derivadas por Diferenças Finitas.

Resumindo o erro de cada aproximação:

$$\underbrace{D_+(f(\bar{x})) - \frac{df(\bar{x})}{dx}}_{\text{erro na aproximação da derivada}} = \frac{1}{2}\frac{d^2 f(\bar{x})}{dx^2}h + O\left(h^2\right) \approx C_+ h \text{ (primeira ordem } h\text{) (Adiantada)}$$

$$\underbrace{D_-(f(\bar{x})) - \frac{df(\bar{x})}{dx}}_{\text{erro na aproximação da derivada}} = -\frac{1}{2}\frac{d^2 f(\bar{x})}{dx^2}h + O\left(h^2\right) \approx C_- h \text{ (primeira ordem } h\text{) (Retardada)}$$

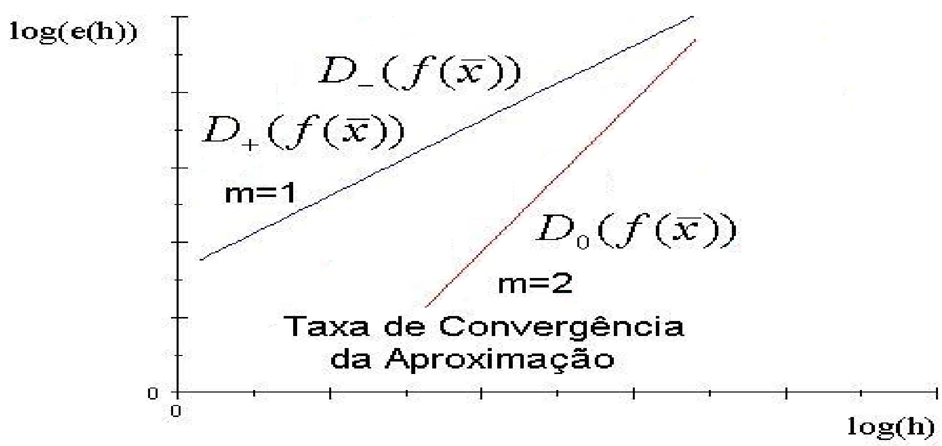
$$\underbrace{D_0(f(\bar{x})) - \frac{df(\bar{x})}{dx}}_{\text{erro na aproximação da derivada}} = \frac{1}{3}\frac{d^3 f(\bar{x})}{dx^3}h^2 + O\left(h^3\right) \approx C_0 h^2 \text{ (segunda ordem } h^2\text{) (Centrada)}$$

onde C_+, C_- e C_o são constantes específicas para cada função.
Ou seja, o erro $e(h)$ é uma função de *h* na forma:

$$e(h) \approx Ch^m \text{ (de ordem } m\text{)}$$

$$\log(e(h)) \approx \log(Ch^m) = \log C + m \log h$$

Num gráfico com escala log-log o erro se comporta como uma linha reta com inclinação igual à ordem de precisão.



4.2.1- Aproximação de Derivadas por Diferenças Finitas.

É possível aproximar a primeira derivada com ordem de precisão maior que 2? SIM.

Por exemplo, $\dfrac{df(\bar{x})}{dx} \approx D_3(f(\bar{x})) = \dfrac{2f(\bar{x}+h)+3f(\bar{x})-6f(\bar{x}-h)+f(\bar{x}-2h)}{6h}$

$$\underbrace{D_3(f(\bar{x})) - \frac{df(\bar{x})}{dx}}_{\text{erro na aproximação da derivada}} = \frac{1}{12}\frac{d^4 f(\bar{x})}{dx^4}h^3 + O\left(h^4\right) \approx C_3 h^3 \text{ (terceira ordem } h^3\text{)}$$

Existe alguma metodologia que permita obter as formulas de diferenças finitas? SIM. Destacamos duas formas:

1- Usando a Serie de Taylor para aproximar junto com o método dos coeficientes indeterminados.

2- Usando um Polinômio de Interpolação para aproximar a função e aproximamos a derivada da função pela derivada do Polinômio de Interpolação.

4.2.1- Aproximação de Derivadas por Diferenças Finitas.

1-Metodologia para obter as formulas de diferenças finitas usando a Serie de Taylor para aproximar junto com o método dos coeficientes indeterminados.

Por exemplo, suponha que queremos aproximar a derivada da função pelo lado esquerdo conhecendo três pontos apenas.

$$\frac{df(\bar{x})}{dx} \approx ? \qquad (\bar{x}, f(\bar{x})), \quad ((\bar{x}-h), f(\bar{x}-h)) \;\; \text{e} \;\; ((\bar{x}-2h), f(\bar{x}-2h))$$

$$\frac{df(\bar{x})}{dx} \approx D_2(f(\bar{x})) = af(\bar{x}) + bf(\bar{x}-h) + cf(\bar{x}-2h)$$

Os coeficientes *a*,*b* e *c* devem ser determinados de forma a obter o menor erro possível. Expandindo em Serie de Taylor:

$$f(\bar{x}-h) = f(\bar{x}) - \frac{df(\bar{x})}{dx}h + \frac{1}{2}\frac{d^2 f(\bar{x})}{dx^2}h^2 - \frac{1}{6}\frac{d^3 f(\bar{x})}{dx^3}h^3 + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\frac{d^n f(\bar{x})}{dx^n}h^n + O\left(h^{n+1}\right)$$

$$f(\bar{x}-2h) = f(\bar{x}) - \frac{df(\bar{x})}{dx}2h + \frac{1}{2}\frac{d^2 f(\bar{x})}{dx^2}(2h)^2 - \frac{1}{6}\frac{d^3 f(\bar{x})}{dx^3}(2h)^3 + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\frac{d^n f(\bar{x})}{dx^n}(2h)^n + O\left(h^{n+1}\right)$$

4.2.1- Aproximação de Derivadas por Diferenças Finitas.

Substituindo as expansões em: $D_2(f(\bar{x})) = af(\bar{x}) + bf(\bar{x}-h) + cf(\bar{x}-2h)$

$$D_2(f(\bar{x})) = [a+b+c]f(\bar{x}) - [b+2c]h\frac{df(\bar{x})}{dx} + \frac{1}{2}[b+4c]h^2\frac{d^2 f(\bar{x})}{dx^2}$$

$$-\frac{1}{6}[b+8c]h^3\frac{d^3 f(\bar{x})}{dx^3} + \cdots$$

Para obter maior precisão na derivada primeira devemos escolher $[a+b+c]=0, \quad -[b+2c]h=1, \quad \frac{1}{2}[b+4c]h^2 = 0$ ou

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ b+2c=-1/h \\ b+4c=0 \end{cases} \left(\begin{array}{l} \text{A solução deste sistema é} \\ a=\dfrac{3}{2h},\ b=-\dfrac{2}{h},\ c=\dfrac{1}{2h} \end{array}\right) \left(\begin{array}{l} \text{Note que temos três nós,} \\ \text{portanto apenas podemos} \\ \text{colocar três restrições para} \\ \text{os coeficientes indeterminados} \end{array}\right)$$

$$\frac{df(\bar{x})}{dx} \approx D_2(f(\bar{x})) = \frac{3f(\bar{x}) - 4f(\bar{x}-h) + f(\bar{x}-2h)}{2h}$$

Erro: $D_2(f(\bar{x})) - \dfrac{df(\bar{x})}{dx} = -\dfrac{1}{6}[b+8c]h^3\dfrac{d^3 f(\bar{x})}{dx^3} + \cdots = \dfrac{1}{12}h^2\dfrac{d^3 f(\bar{x})}{dx^3} + O\left(h^3\right)$

4.2.1- Aproximação de Derivadas por Diferenças Finitas.

E as derivadas de ordem maior? Derivada de segunda ordem!

Suponha que queremos obter uma formula de diferenças finitas centrada para aproximar a derivada segunda conhecendo apenas três pontos igualmente espaçados.

$$\frac{d^2 f(\bar{x})}{dx^2} \approx ? \qquad (\bar{x}, f(\bar{x})), \quad ((\bar{x}-h), f(\bar{x}-h)) \text{ e } ((\bar{x}+h), f(\bar{x}+h))$$

Usaremos a expansão em Serie Taylor junto com o método dos coeficientes indeterminados! (Pode ser usado outros métodos)

$$\frac{d^2 f(\bar{x})}{dx^2} \approx D^2(f(\bar{x})) = af(\bar{x}-h) + bf(\bar{x}) + cf(\bar{x}+h)$$

$$f(\bar{x}-h) = f(\bar{x}) - \frac{df(\bar{x})}{dx}h + \frac{1}{2}\frac{d^2 f(\bar{x})}{dx^2}h^2 - \frac{1}{6}\frac{d^3 f(\bar{x})}{dx^3}h^3 + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\frac{d^n f(\bar{x})}{dx^n}h^n + O\left(h^{n+1}\right)$$

$$f(\bar{x}+h) = f(\bar{x}) + \frac{df(\bar{x})}{dx}h + \frac{1}{2}\frac{d^2 f(\bar{x})}{dx^2}h^2 + \frac{1}{6}\frac{d^3 f(\bar{x})}{dx^3}h^3 + \cdots + \frac{1}{n!}\frac{d^n f(\bar{x})}{dx^n}h^n + O\left(h^{n+1}\right)$$

Substituindo e agrupando termos obtemos:

4.2.1- Aproximação de Derivadas por Diferenças Finitas.

$$D^2(f(\bar{x})) = af(\bar{x}-h) + bf(\bar{x}) + cf(\bar{x}+h)$$

$$= [a+b+c]f(\bar{x}) + [c-a]h\frac{df(\bar{x})}{dx} + \frac{1}{2}[c+a]h^2\frac{d^2f(\bar{x})}{dx^2} + [c-a]h^3\frac{1}{6}\frac{d^3f(\bar{x})}{dx^3}h^3$$

$$+\cdots+[c+(-1)^n a]\frac{1}{n!}h^n\frac{d^nf(\bar{x})}{dx^n} + O\left(h^{n+1}\right)$$

Para obter a maior precisão possível na derivada segunda devemos escolher os coeficientes como:

$$[a+b+c]=0,\quad [c-a]h=0,\quad \frac{1}{2}[c+a]h^2=1 \quad \text{ou}$$

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ c=a \\ a=\dfrac{1}{h^2} \end{cases} \left(\begin{matrix}\text{A solução deste sistema é} \\ a=\dfrac{1}{h^2},\; b=-\dfrac{2}{h^2},\; c=\dfrac{1}{h^2}\end{matrix}\right) \left(\begin{matrix}\text{Note que todos os termos} \\ \text{de potencia impar de } h \text{ são} \\ \text{zeros. Isto é uma caraterística} \\ \text{das diferenças centradas.}\end{matrix}\right)$$

Erro da aproximação?

$$\frac{d^2f(\bar{x})}{dx^2} \approx D^2(f(\bar{x})) = \frac{[f(\bar{x}-h) - 2f(\bar{x}) + f(\bar{x}+h)]}{h^2}$$

Erro: $D^2(f(\bar{x})) - \dfrac{d^2f(\bar{x})}{dx^2} = \dfrac{1}{12}h^2\dfrac{d^4f(\bar{x})}{dx^4} + O\left(h^4\right)$

4.2.2- Aproximação de Integrais por Regras de Integração Numérica.

Existem várias Regras de Integração Numérica: Regra do Trapézio, Regra de Simpson, Quadratura de Newton-Cotes, Quadratura de Gauss, etc. Destacamos aqui a Quadratura de Gauss.

Teorema Fundamental do Cálculo:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), \text{ onde } \frac{dF}{dx} = f(x) \text{ em } [a,b]$$

O problema da Integração Numérica consiste em determinar o valor da integral definida a partir de (*n*+*1*) valores conhecidos da função integrando.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b p_n(x)dx = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)w_i$$

Esta é a Formula Geral para as Quadraturas. Resta encontrar os pesos e os pontos de quadraturas.

4.2.2- Aproximação de Integrais por Regras de Integração Numérica.

Quadratura de Gauss!

Considere uma função $f(x)$ definida em $[-1,1]$. O problema consiste em determinar os pontos de quadratura x_i e os pesos w_i para que a Formula de Quadratura seja exata quando a função integrando é um polinômio de maior grau possível *N*.

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{1} p_N(x)dx = \sum_{i=1}^{m} f(x_i)w_i \qquad (1)$$

Esta formula possui *2m* constantes (x_i e w_i). Lembrando que um polinômio de grau *2m-1* é determinado por *2m* coeficientes segue que *N=2m-1*.

Para que (1) seja verificado para qualquer polinômio de grau *2m-1* é necessário e suficiente que (1) seja verificado para o conjunto de polinômios:

$$p_N(x) = \sum_{k=0}^{2m-1} C_k x^k \text{ (polinômio arbitrário)} \qquad \left\{1, x, x^2, \cdots, x^{2m-1}\right\}$$

4.2.2- Aproximação de Integrais por Regras de Integração Numérica.

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{1} p_N(x)dx = \sum_{i=1}^{m} p_N(x_i)w_i \quad (1) \Rightarrow \int_{-1}^{1} x^k dx = \sum_{i=1}^{m} (x_i)^k w_i, \quad k = 0,1,2,\cdots,2m-1$$

$$\int_{-1}^{1} p_N(x)dx = \int_{-1}^{1} \sum_{k=0}^{2m-1} C_k x^k dx = \sum_{k=0}^{2m-1} C_k \int_{-1}^{1} x^k dx = \sum_{k=0}^{2m-1} C_k \sum_{i=1}^{m} (x_i)^k w_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} w_i \sum_{k=0}^{2m-1} C_k (x_i)^k = \sum_{i=1}^{m} w_i p_N(x_i)$$

Considerando que:

$$\int_{-1}^{1} x^k dx = \frac{1-(-1)^{k+1}}{k+1} = \begin{cases} \dfrac{2}{k+1} & \text{se } k \text{ é par} \\ 0 & \text{se } k \text{ é impar} \end{cases}$$

se substituímos o conjunto de polinômios em (1) obtemos um sistema não linear de *2m* equações.

4.2.2- Aproximação de Integrais por Regras de Integração Numérica.

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} w_i = 2, \text{ para o polinômio } x^0 \\ \sum_{i=1}^{m} w_i x_i = 0, \text{ para o polinômio } x^1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sum_{i=1}^{m} w_i (x_i)^{2m-2} = \dfrac{2}{2m-1}, \text{ para o polinômio } x^{2m-2} \\ \sum_{i=1}^{m} w_i (x_i)^{2m-1} = 0, \text{ para o polinômio } x^{2m-1} \end{cases} \qquad (2)$$

Este sistema não linear é de difícil solução. Entretanto, em lugar do conjunto de polinômios $\{1, x, x^2, \cdots, x^{2m-1}\}$ podemos usar polinômios da forma $x^k P_m(x) \quad (k = 0,1,2,\cdots,m-1)$, onde $P_m(x)$ são os polinômios de Legendre. O grau deste novo conjunto de polinômios não é maior que *2m-1* e se usamos eles na formula de quadratura (1) obtemos:

4.2.2- Aproximação de Integrais por Regras de Integração Numérica.

$$\int_{-1}^{1} x^k P_m(x)dx = \sum_{i=1}^{m} (x_i)^k P_m(x_i) w_i, \quad k = 0,1,2,\cdots,m-1 \qquad (3)$$

Por outra parte, os polinômios de Legendre tem a seguinte propriedade de ortogonalidade:

$$\int_{-1}^{1} P_m(x) Q_k(x) dx = 0 \ \text{ para todo polinômio } Q_k(x) \text{ com } k < m$$

Logo (3) se reduze a um sistema de *m* equações da forma:

$$\sum_{i=1}^{m} (x_i)^k P_m(x_i) w_i = 0, \quad k = 0,1,2,\cdots,m-1 \qquad (3')$$

Note que para qualquer peso w_i este sistema é satisfeito se os pontos x_i são os zeros do polinômio de Legendre $P_m(x)$. Os zeros dos polinômios de Legendre são todos reais e diferentes no intervalo (-1,1). Logo conhecendo estes zeros e substituindo eles no sistema (2) obtemos um sistema linear de *m* equações que permite determinar os pesos w_i.

4.2.2- Aproximação de Integrais por Regras de Integração Numérica.

Pode ser provado que a Formula de Quadratura

$$\int_{-1}^{1} p_N(x)dx = \sum_{i=1}^{m} p_N(x_i)w_i, \qquad (4)$$

onde os x_i são os zeros dos polinômios de Legendre e os pesos determinados da forma anterior é exata para todo polinômio de grau *N<2m-1*. Esta formula se conhece com o nome de Quadratura de Gauss.

Polinômios de Legendre $P_m(x)$ e seus zeros!

$$P_m(x) = \frac{1}{2^m m!}\frac{d^m}{dx^m}\left[\left(x^2-1\right)^m\right], \quad m = 0,1,2,\cdots$$

Propriedades:

1) $P_m(1) = 1, \quad P_m(-1) = (-1)^m, \quad m = 0,1,\cdots$

2) $\int_{-1}^{1} P_m(x)Q_k(x)dx = 0$ para todo polinômio $Q_k(x)$ com $k < m$

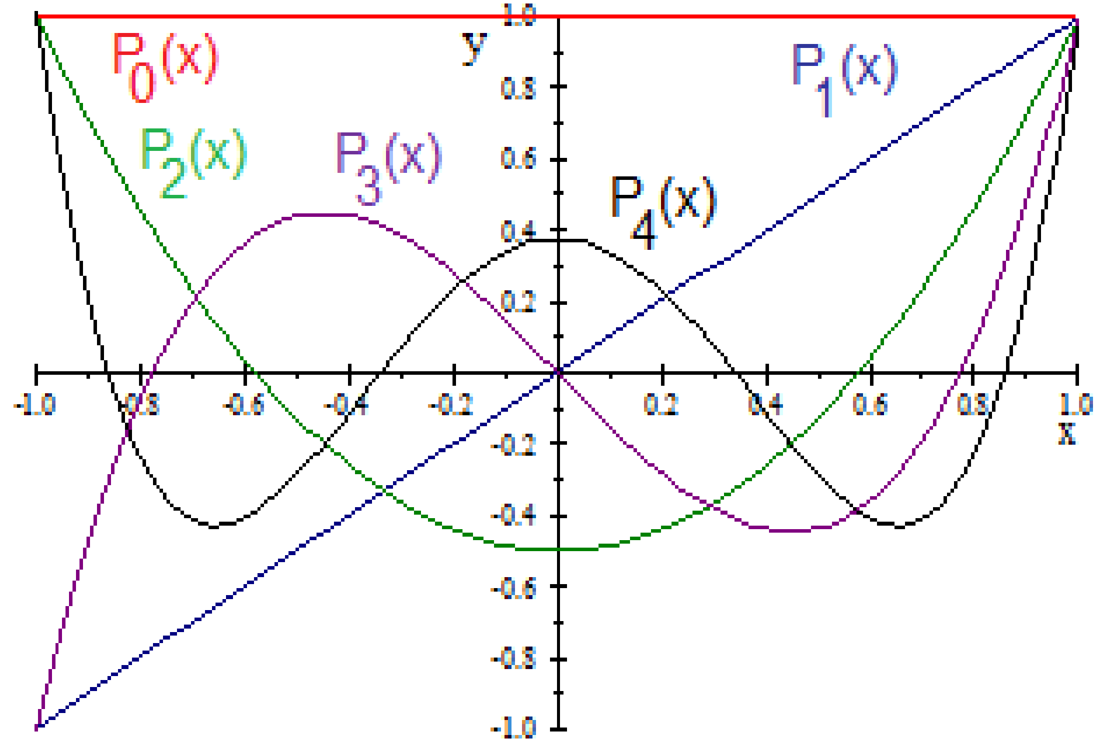
3) $P_m(x)$ tem *m* raízes reais diferentes no intervalo (-1,1)

4.2.2- Aproximação de Integrais por Regras de Integração Numérica.

A seguir listamos os cinco primeiros Polinômios de Legendre:

$$P_m(x) = \frac{1}{2^m m!}\frac{d^m}{dx^m}\left[\left(x^2-1\right)^m\right], \quad m = 0,1,2,\cdots$$

$$\begin{cases} P_0(x) = 1, \\ P_1(x) = x, \\ P_2(x) = \frac{1}{2}\left(3x^2-1\right), \\ P_3(x) = \frac{1}{2}\left(5x^3-3x\right), \\ P_4(x) = \frac{1}{8}\left(35x^4-30x^2+3\right). \end{cases}$$



4.2.2- Aproximação de Integrais por Regras de Integração Numérica.

A seguir listamos os pontos e pesos da Quadratura de Gauss:

m	***i***	x_i	W_i
1	1	0	2
2	1,2	(-/+) 0.57735027	1
3	1,3	(-/+) 0.77459667	0.55555556
	2	0	0.88888889
4	1,4	(-/+) 0.86113631	0.34785484
	2,3	(-/+) 0.33998104	0.65214516
5	1,5	(-/+) 0.90617985	0.23692688
	2,4	(-/+) 0.53846931	0.47862868
	3	0	0.56888889

4.2.2- Aproximação de Integrais por Regras de Integração Numérica.

Uma desvantagem da Quadratura de Gauss consiste em que os pontos e os pesos da formula são, em geral, números irracionais. Uma vantagem é o alto grau de precisão obtido com poucos pontos.

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{m} f(x_i)w_i \quad \text{e} \quad \int_{-1}^{1} p_{2m-1}(x)dx = \sum_{i=1}^{m} p_{2m-1}(x_i)w_i, \qquad (4)$$

O erro $R_m = \int_{-1}^{1} f(x)dx - \sum_{i=1}^{m} f(x_i)w_i$ é da ordem:

$$R_m = \frac{2^{2m+1} \quad (m!)^4}{(2m!)^3 \quad (2m+1)} \frac{d^{2m} f(\xi)}{dx^{2m}}$$

Note que $\frac{2^{2m+1} \quad (m!)^4}{(2m!)^3 \quad (2m+1)} < 1 \quad \forall m \geq 1$ e $\lim_{m\to\infty} \frac{2^{2m+1} \quad (m!)^4}{(2m!)^3 \quad (2m+1)} = 0.$

Frase do Dia

"Although to penetrate into the intimate mysteries of nature and thence to learn the true causes of phenomena is not allowed to us, nevertheless it can happen that a certain fictive hypothesis may suffice for explaining many phenomena."

Leonhard Euler

(A mesma da Aula 9)