4- Método de Diferenças Finitas Aplicado às Equações Diferenciais Parciais.

4.1- Aproximação de Funções.

4.1.1- Aproximação por Polinômios.

4.1.2- Ajuste de Dados: Mínimos Quadrados.

4.2- Derivadas e Integrais Numéricas.

4.2.1- Aproximação de Derivadas por Diferenças Finitas.

4.2.2- Aproximação de Integrais por Regras de Integração Numérica.

4.3- Solução de Equações Diferenciais Ordinárias.

4.3.1- Problema de Valor Inicial.

4.3.2- Problema de Valor de Contorno.

4.4- Solução de Equações Diferenciais Parciais.

4.3- Solução de Equações Diferenciais Ordinárias.

Muitos problemas na ciência e na tecnologia podem ser modelados por equações que estabelecem uma relação entre funções desconhecidas $f(\circ)$ e as derivadas destas fun ções $\dfrac{\partial f(\circ)}{\partial(\circ)}$.

Equações deste tipo são chamadas Equações Diferenciais.

Quando a função depende apenas de uma variável $f(x)$ a equação diferencial é chamada de Equação Diferencial Ordinária, já que apenas podem aparecer as derivadas ordinárias da função $\dfrac{d^k f(x)}{dx^k}$.

Quando a função depende de mais de e uma vari ável $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ a equação diferencial é chamada de Equação Diferencial Parcial, já que podem aparecer as di ferentes derivadas parciais desta função $\dfrac{\partial^k f}{\partial x_i^{k_i} \cdots \partial x_j^{k_j}}$ $(i, j = 1, \cdots, n)$ e $(k_i + \cdots + k_j = k)$

4.3- Solução de Equações Diferenciais Ordinárias.

No tópico 4.3 estudaremos Equações Diferenciais Ordinárias.
No tópico 4.4 estudaremos Equações Diferenciais Parciais.

Se diz que uma Equação Diferencial Ordinária é de ordem *n* se a ordem da maior derivada que aparece na equação é *n*.

$$F\left(f(x), \frac{df(x)}{dx}, \frac{d^2 f(x)}{dx^2}, \cdots, \frac{d^n f(x)}{dx^n} \right) = 0 \quad \text{(EDO implicita)}$$

$$\frac{d^n f(x)}{dx^n} = \breve{F}\left(f(x), \frac{df(x)}{dx}, \frac{d^2 f(x)}{dx^2}, \cdots, \frac{d^{n-1} f(x)}{dx^{n-1}} \right) \quad \text{(EDO explicita)}$$

Resolver esta problema consiste em encontrar a função $f(x)$ que deve ser *n* vezes continuamente diferenciavel num intervalo e satisfaz esta equação.

Em geral, soluções exatas para este problema pode ser uma tarefa difícil. Neste caso os métodos numéricos são uma boa ferramenta para tentar resolver problemas deste tipo.

4.3- Solução de Equações Diferenciais Ordinárias.

Equações Diferenciais Ordinárias são classificadas como Lineares e Não Lineares.

Se diz que uma EDO é Linear se a função F ou $\breve{F}$ dependem linearmente de $f(x)$ e todas suas derivadas. Isto é, se:

$$F\left(\alpha[f_1(x)+f_2(x)], \frac{d\alpha[f_1(x)+f_2(x)]}{dx}, \frac{d^2\alpha[f_1(x)+f_2(x)]}{dx^2}, \cdots, \frac{d^n\alpha[f_1(x)+f_2(x)]}{dx^n}\right)=$$

$$\alpha F\left(f_1(x), \frac{df_1(x)}{dx}, \frac{d^2 f_1(x)}{dx^2}, \cdots, \frac{d^n f_1(x)}{dx^n}\right)+\alpha F\left(f_2(x), \frac{df_2(x)}{dx}, \frac{d^2 f_2(x)}{dx^2}, \cdots, \frac{d^n f_2(x)}{dx^n}\right)$$

As EDO Lineares verificam as seguintes propriedade: Suponha que as funções $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_m(x)$ são m soluções da EDO Linear, então a função definida pela combinação linear destas soluções $\breve{f}(x)=\sum_{i=1}^{m} C_i f_i(x) \quad (C_i \text{ são constantes arbirarias})$ é também solução da EDO Linear. A prova desta propriedade é conseqüência imediata da linearidade da EDO.

4.3- Solução de Equações Diferenciais Ordinárias.

A forma geral para uma EDO Linear explicita de ordem *n* é:

$$g_n(x)\frac{d^n f(x)}{dx^n} + g_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} f(x)}{dx^{n-1}} + \cdots + g_1(x)\frac{df(x)}{dx} + g_0(x)f(x) = g_{n+1}(x)$$

onde as funções $g_{n+1}(x), g_n(x), \cdots, g_0(x)$ não dependem nem da função $f(x)$ nem de suas derivadas.

Quando a função $g_{n+1}(x) = 0$ se diz que a EDO Linear é homogênea. Caso contrário se diz que a EDO Linear é não homogênea $g_{n+1}(x) \neq 0$.

$$g_n(x)\frac{d^n f(x)}{dx^n} + g_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} f(x)}{dx^{n-1}} + \cdots + g_1(x)\frac{df(x)}{dx} + g_0(x)f(x) = 0 \quad \begin{cases} \text{EDO Linear} \\ \text{Homogênea} \end{cases}$$

Entre as possíveis soluções $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_m(x)$ da EDO Linear estamos interessados em destacar aquelas soluções que são linearmente independentes. Isto porque elas formam uma base que permite representar a solução geral da EDO Linear:

$$\breve{F}(x) = \sum_{i=1}^{m} C_i f_i(x), \text{ onde } C_i \text{ são constantes arbirarias e } f_i(x) \text{ são funções LI.}$$

4.3- Solução de Equações Diferenciais Ordinárias.

Um conjunto de *m* soluções da EDO Linear de ordem *n* é dito ser Linearmente Independente (*m*<*n*) se o Wronskiano destas soluções é diferente de zero. Isto é se

$$W(f_1(x), f_2(x), \cdots, f_m(x)) = \begin{vmatrix} f_1(x) & \dfrac{df_1(x)}{dx} & \cdots & \dfrac{d^m f_1(x)}{dx^m} \\ f_2(x) & \dfrac{df_2(x)}{dx} & \cdots & \dfrac{d^m f_2(x)}{dx^m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_m(x) & \dfrac{df_m(x)}{dx} & \cdots & \dfrac{d^m f_m(x)}{dx^m} \end{vmatrix} \neq 0$$

Se as funções $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)$ são *n* Soluções Linearmente Independentes da EDO Linear Homogênea de ordem *n*, então a função $f_{SG}(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i f_i(x)$, onde C_i são constantes arbirarias,

é também solução da EDO e é chamada de Solução Geral desta EDO Linear Homogênea .

4.3- Solução de Equações Diferenciais Ordinárias.

Um caso particular de EDO Linear Homogênea de ordem *n* é quando as funções $g_n(x),\cdots,g_0(x)$ são constantes. Neste caso temos:

$$g_n \frac{d^n f(x)}{dx^n} + g_{n-1}\frac{d^{n-1} f(x)}{dx^{n-1}} + \cdots + g_1 \frac{df(x)}{dx} + g_0 f(x) = 0$$

Se procuramos soluções para esta equação na forma $f(x) = e^{\lambda x}$; então obtemos a chamada Equação Característica da EDO Linear Homogênea:

$$g_n \lambda^n + g_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + g_1 \lambda + g_0 = 0$$

Note que resolver esta equação corresponde a encontrar os zeros de um polinômio de grau *n* em λ. Esta equação característica tem *n* raízes.

Se estas raízes são todas diferentes $\lambda_i \ (i = 1,\cdots,n)$, então as *n* soluções $f_i(x) = e^{\lambda_i x}$ são Linearmente Independentes e

$$f_{SG}(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i e^{\lambda_i x}, \quad \text{onde } C_i \text{ são constantes arbirarias.}$$

4.3- Solução de Equações Diferenciais Ordinárias.

Se as raízes da Equação Característica da EDO Linear Homogênea tem multiplicidade, por exemplo, a raiz λ_k tem multiplicidade $\bar{k}$, podemos obter as $\bar{k}$ soluções LI que correspondem à esta raiz na forma:

$$f_k(x) = e^{\lambda_k x},\ f_{k+1}(x) = xe^{\lambda_k x},\ \ f_{k+2}(x) = x^2 e^{\lambda_k x}, \cdots,\ f_{k+\bar{k}-1}(x) = x^{\bar{k}-1} e^{\lambda_k x}.$$

No caso que a EDO Linear é Não Homogênea $g_{n+1}(x) \neq 0$ e for conhecida uma solução particular desta EDO Linear Não Homogênea $f_{SP}(x)$

$$g_n(x)\frac{d^n f_{SP}(x)}{dx^n} + g_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} f_{SP}(x)}{dx^{n-1}} + \cdots + g_1(x)\frac{df_{SP}(x)}{dx} + g_0(x) f_{SP}(x) = g_{n+1}(x)$$

a Solução Geral desta equação será a soma da Solução da Equação Homogênea mais a Solução Particular:

$$f_{SG}(x) = f_{SP}(x) + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} C_i f_i(x)}_{\text{Solução da EDO Homogênea}} \quad , \quad \text{onde} \quad C_i \ \text{são constantes arbirarias.}$$

4.3- Solução de Equações Diferenciais Ordinárias.

Se destacam dois tipos de problemas para as EDO:

$$F\left(f(x), \frac{df(x)}{dx}, \frac{d^2 f(x)}{dx^2}, \cdots, \frac{d^n f(x)}{dx^n} \right) = 0 \quad \text{(EDO implicita)}$$

$$\frac{d^n f(x)}{dx^n} = F\left(f(x), \frac{df(x)}{dx}, \frac{d^2 f(x)}{dx^2}, \cdots, \frac{d^{n-1} f(x)}{dx^{n-1}} \right) \quad \text{(EDO explicita)}$$

A solução geral desta equação possui *n* constantes arbitrárias, que podem ser determinadas se são impostas *n* restrições:

- Problema de Valor Inicial: Quando as restrições são impostas num ponto inicial $x = x_0$ (Condições Iniciais). Ou seja, quando são conhecidas no ponto inicial $f(x_0), \frac{df(x_0)}{dx}, \cdots, \frac{d^{n-1} f(x_0)}{dx^{n-1}}$

- Problema de Valor de Contorno : Quando as restrições são impostas nos extremos do intervalo $x \in [a,b]$(Condições de Contorno).

4.3.1- Problema de Valor Inicial (PVI).

Considere que a variável independente é o tempo. Então nosso Problema de Valor Inicial consiste em encontrar $u(t)$ que satisfaz:

$$\frac{du(t)}{dt} = f\left(u(t), t\right) \quad \forall t > t_0 \quad \text{(EDO)} \qquad (1)$$

$$u(t_0) = u_0 \qquad \text{(Condição Inicial)} \qquad (2)$$

Problemas que envolvem derivadas de ordem maior podem ser transformados num sistema de equações de primeira ordem.

Se $f\left(u(t), t\right) = g_1(t)u(t) + g_2(t)$ a EDO é linear.

Estudaremos alguns métodos numéricos que aproximam a solução deste PVI. Note que a solução aproximada consiste em aproximar a derivada e partindo do dado inicial avançar no tempo de forma a encontrar aproximadamente $U^n \approx u(t_n)$.
Discretizamos o tempo da seguinte forma: $t_n = n\Delta t$ com $n \geq 0$

onde Δt é o passo de tempo.

4.3.1- Problema de Valor Inicial (PVI).

Método de Euler: Quando aproximamos a deri vada na forma

$$\frac{du(t_n)}{dt} \approx D_+(u(t_n)) = \frac{u(t_n+\Delta t)-u(t_n)}{\Delta t} \approx \frac{U(t_{n+1})-U(t_n)}{\Delta t} = \frac{U^{n+1}-U^n}{\Delta t} \quad \begin{cases} \text{Lado Direito (Adiantado)} \\ \text{forward-difference formula} \end{cases}$$

obtemos o problema aproximado (discretizado)

$$\frac{U^{n+1}-U^n}{\Delta t} = f(U^n, t_n) \text{ ou } U^{n+1} = U^n + \Delta t\, f(U^n, t_n) \text{ Forward-Euler(Explícito)}$$

Desta forma U^{n+1} est á explicitado em fun ção de U^n e partindo da condição inicial $U^0 = u_0$ podemos obter uma aproxima ção da solução para os instantes de tempo seguintes

$$u(t_1) \approx U^1, u(t_2) \approx U^2, \cdots, u(t_n) \approx U^n$$

Quando aproximamos a derivada na f orma retardada obtemos

$$\frac{du(t_n)}{dt} \approx D_-(u(t_n)) = \frac{u(t_n)-u(t_n-\Delta t)}{\Delta t} \approx \frac{U(t_n)-U(t_{n-1})}{\Delta t} = \frac{U^n-U^{n-1}}{\Delta t} \quad \begin{cases} \text{Lado Esquerdo (Retardado)} \\ \text{backward-difference formula} \end{cases}$$

outro problema aproximado (discretizado)

$$\frac{U^n-U^{n-1}}{\Delta t} = f(U^n, t_n) \text{ ou } U^n = U^{n-1} + \Delta t\, f(U^n, t_n) \text{ Backward-Euler(Implícito)}$$

4.3.1- Problema de Valor Inicial (PVI).

$$\frac{U^{n+1}-U^n}{\Delta t} = f(U^n, t_n) \text{ ou } U^{n+1} = U^n + \Delta t\, f(U^n, t_n) \text{ Forward-Euler(Explícito)}$$

$$\frac{U^n-U^{n-1}}{\Delta t} = f(U^n, t_n) \text{ ou } U^n = U^{n-1} + \Delta t\, f(U^n, t_n) \text{ Backward-Euler(Implícito)}$$

Desta forma U^n está implícito em função de U^{n-1} e partindo da condição inicial $U^0 = u_0$ podemos obter uma aproximação da solução para os instantes de tempo seguintes

$$u(t_1) \approx U^1, u(t_2) \approx U^2, \cdots, u(t_n) \approx U^n$$

De qualquer forma o Método Implícito de Euler deve ser resolvido com respeito a U^n e está equação pode ser não linear se $f(U^n, t_n)$ for não linear. Neste caso devemos usar algum método iterativo para resolver a equação não linear.

Ambos métodos são chamados método de um passo (*one-step*) que significa que para determinar U^{n+1} precisa do conhecimento de apenas um valor prévio U^n. Ambos métodos têm precisão de primeira ordem!

4.3.1- Problema de Valor Inicial (PVI).

Erro do Método de Euler: Para estimar o erro local e_n escrevemos a equação de diferenças na forma que assemelha a derivada e substituímos nesta equação a solução exata da EDO. Depois usamos expansão em serie de Taylor para cancelar os termos comuns:

$$\frac{U^{n+1}-U^n}{\Delta t} = f(U^n, t_n) \quad \begin{cases} \text{Forward-Euler (Explícito)} \\ \text{Equação de Diferenças} \end{cases}$$

$$e_n = \frac{u(t_{n+1})-u(t_n)}{\Delta t} - f(u(t_n), t_n) = \frac{u(t_{n+1})-u(t_n)}{\Delta t} - \frac{du(t_n)}{dt} \qquad \left(\text{EDO} \ \frac{du(t)}{dt} = f\left(u(t), t\right) \right)$$

$$u(t_{n+1}) = u(t_n) + \frac{du(t_n)}{dt}\Delta t + \frac{1}{2}\frac{d^2u(t_n)}{dt^2}(\Delta t)^2 + \frac{1}{6}\frac{d^3u(t_n)}{dt^3}(\Delta t)^3 + \cdots + \frac{1}{n!}\frac{d^nu(t_n)}{dt^n}(\Delta t)^n + O\left(\Delta t^{n+1}\right)$$

$$e_n = \frac{1}{2}\frac{d^2u(t_n)}{dt^2}\Delta t + \frac{1}{6}\frac{d^3u(t_n)}{dt^3}(\Delta t)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}\frac{d^nu(t_n)}{dt^n}(\Delta t)^{n-1} + O\left(\Delta t^n\right) \approx C\Delta t \quad \begin{cases} \text{Primeira Ordem} \\ \text{de Precisão} \end{cases}$$

Similarmente, o erro para o Método Backward Euler é de primeira ordem.

4.3.1- Problema de Valor Inicial (PVI).

Uma forma de aumentar a ordem de precisão é desenvolver métodos multipasso (*multistep*) que envolvem o conhecimento prévio de mais de um valor.

$$\frac{du(t_n)}{dt} \approx D_0(u(t_n)) = \frac{u(t_n+\Delta t)-u(t_n-\Delta t)}{2\Delta t} \approx \frac{U^{n+1}-U^{n-1}}{2\Delta t} \quad \text{(Diferença Centrada)}$$

$$U^{n+1} = U^{n-1} + 2\Delta t\, f(U^n, t_n) \quad \text{(Diferença Centrada)} \begin{cases}\text{Explicito de Segunda} \\ \text{Ordem de Precisão}\end{cases}$$

Outro método:

$$\frac{du(t_n)}{dx} \approx D_2(u(t_n)) = \frac{3u(t_n)-4u(t_n-\Delta t)+u(t_n-2\Delta t)}{2\Delta t} \approx \frac{3U^n-4U^{n-1}+U^{n-2}}{2\Delta t}$$

$$U^n = \frac{1}{3}[4U^{n-1} - U^{n-2} + 2\Delta t\, f(U^n, t_n)] \quad \text{(Diferença Retardada)} \begin{cases}\text{Implícito de Segunda} \\ \text{Ordem de Precisão}\end{cases}$$

E assim, usando as formulas de diferenças finitas desenvolvidas na aula anterior podemos obter diferentes tipos de aproximações para o PVI. Estes métodos não indicam como obter os valores prévios antes de poder aplicar o método. O primeiro valor prévio é obtido da condição inicial $U^0 = u(t_0) = u_0$, mas os outros devem ser obtidos aplicando algum método de um passo.

4.3.1- Problema de Valor Inicial (PVI).

Métodos multipasso possuem ordem de precisão maior que os métodos de um passo. Na prática, é comum o uso de métodos de um passo com etapas intermediarias (*multistage*) que possuem a mesma precisão que os métodos multipassos. Nestas etapas intermediarias são gerados valores intermediários da incógnita e suas derivadas.

Método de Runge-Kutta Explicito de Duas Etapas:

$$U^{*} = U^{n} + \frac{1}{2}\Delta t\ f(U^{n}, t_{n}) \qquad \begin{cases} \text{Primeira Etapa gera um valor intermediario entre o passo } n \text{ e } n+1 \\ u(t_{n+1/2}) \approx U^{*} \text{ obtido pelo Forward Euler} \end{cases}$$

$$U^{n+1} = U^{n} + \Delta t\ f\left(U^{*}, t_{n} + \frac{\Delta t}{2}\right) \qquad \begin{cases} \text{Segunda Etapa avalia } f \text{ no ponto intermediario gerado na Primeira Etapa} \\ \text{para estimar a derivada no intervalo definido entre o passo } n \text{ e } n+1. \end{cases}$$

Combinado estas duas etapas o método pode ser escrito como

$$U^{n+1} = U^{n} + \Delta t\ f\left(U^{n} + \frac{1}{2}\Delta t\ f(U^{n}, t_{n}), t_{n} + \frac{\Delta t}{2}\right) \quad \text{(Método de Um Passo)} \begin{cases} \text{Explicito de Segunda} \\ \text{Ordem de Precisão} \end{cases}$$

Este método possui precisão de segunda ordem.

4.3.1- Problema de Valor Inicial (PVI).

Método de Runge-Kutta Explicito de Quatro Etapas :

$$Y^1 = U^n \quad \{\text{Etapa Zero}$$

$$Y^2 = U^n + \frac{1}{2}\Delta t\ f(Y^1, t_n) \quad \{\text{Primeira Etapa}$$

$$Y^3 = U^n + \frac{1}{2}\Delta t\ f\left(Y^2, t_n + \frac{\Delta t}{2}\right) \quad \{\text{Segunda Etapa}$$

$$Y^4 = U^n + \Delta t\ f\left(Y^3, t_n + \frac{\Delta t}{2}\right) \quad \{\text{Terceira Etapa}$$

$$U^{n+1} = U^n + \frac{\Delta t}{6}\left[f\left(Y^1, t_n\right) + 2f\left(Y^2, t_n + \frac{\Delta t}{2}\right) + 2f\left(Y^3, t_n + \frac{\Delta t}{2}\right) + f\left(Y^4, t_n + \Delta t\right)\right] \{\text{Quarta Etapa}$$

Note que este método é Explícito e de Um Passo

$$U^{n+1} = F(U^n, f(U^n, t_n, \Delta t), \Delta t)$$

A precisão deste método de Runge-Kutta é de quarta ordem .

4.3.1- Problema de Valor Inicial (PVI).

Exemplo: Use ambos métodos de Euler para resolver o PVI

$$\frac{du(t)}{dt} = \lambda u(t) \quad \forall t > t_0 \quad \text{(EDO)}$$

(Conte pág. 356)

$$u(t_0) = 1 \quad \text{(Condição Inicial)}$$

Esta EDO Linear Homogênea tem como solução exata: $u(t) = Ce^{\lambda t}$

que com a condição inicial resulta em $u(t) = e^{\lambda t}$, já que $C = 1$.

Os métodos de Euler (Um Passo) são:

$$U^{n+1} = U^n + \Delta t\, f(U^n, t_n) = U^n + \Delta t\, \lambda U^n \Rightarrow U^{n+1} = (1 + \lambda \Delta t) U^n \quad \text{Forward (Explícito)}$$

$$U^{n+1} = U^n + \Delta t\, f(U^{n+1}, t_n) = U^n + \Delta t\, \lambda U^{n+1} \Rightarrow U^{n+1} = \frac{1}{1 - \lambda \Delta t} U^n \quad \text{Backward (Implícito)}$$

O método multipasso da Diferença Centrada é:

$$\underbrace{U^{n+1} = U^{n-1} + 2\Delta t\, f(U^n, t_n)}_{\text{Explícito de Segunda Ordem de Precisão}} = U^{n-1} + 2\Delta t\, \lambda U^n \ \text{com}\ U^0 = u_0 \ \text{e}\ \underbrace{U^1 = (1 + \lambda \Delta t) U^0}_{\text{Forward Euler}}$$

4.3.1- Problema de Valor Inicial (PVI).

Exemplo: Use ambos métodos de Euler para resolver o PVI

$$\frac{du(t)}{dt} = \lambda u(t) \quad \forall t > t_0 \quad \text{(EDO)}$$

(Conte pág. 356)

$$u(t_0) = 1 \quad \text{(Condição Inicial)}$$

Esta EDO Linear Homogênea tem como solução exata: $u(t) = Ce^{\lambda t}$
que com a condição inicial resulta em $u(t) = e^{\lambda t}$, já que $C = 1$.

Método Runge-Kutta de Duas Etapas (Um Passo, Explícito):

$$U^{n+1} = U^n + \Delta t \, f\left(U^n + \frac{1}{2}\Delta t \, f(U^n, t_n), t_n + \frac{\Delta t}{2}\right) \quad \begin{cases}\text{Segunda} \\ \text{Ordem de Precisão}\end{cases}$$

$$U^{n+1} = U^n + \Delta t \, \lambda U^n\left(1 + \frac{1}{2}\Delta t \, \lambda\right) = \left[1 + \lambda \, \Delta t\left(1 + \frac{1}{2}\Delta t \, \lambda\right)\right] U^n$$

4.3.1- Problema de Valor Inicial (PVI).

Exemplo: Continuação do Exemplo

Método Runge-Kutta de Quatro Etapas (Um Passo, Explícito):

$$Y^2 = U^n + \frac{1}{2}\Delta t\,\lambda U^n = \left(1 + \frac{1}{2}\Delta t\,\lambda\right)U^n \quad \{1 \text{ Etapa}$$

$$Y^3 = U^n + \frac{1}{2}\Delta t\, f\left(Y^2\right) = U^n + \frac{1}{2}\Delta t\,\lambda\left(1 + \frac{1}{2}\Delta t\,\lambda\right)U^n = \left[1 + \frac{1}{2}\Delta t\,\lambda\left(1 + \frac{1}{2}\Delta t\,\lambda\right)\right]U^n \quad \{2 \text{ Etapa}$$

$$Y^4 = U^n + \Delta t\, f\left(Y^3\right) = U^n + \Delta t\,\lambda\left[1 + \frac{1}{2}\Delta t\,\lambda\left[1 + \frac{1}{2}\Delta t\,\lambda\right]\right]U^n = \left[1 + \Delta t\,\lambda\left[1 + \frac{1}{2}\Delta t\,\lambda\left(1 + \frac{1}{2}\Delta t\,\lambda\right)\right]\right]U^n$$

$$U^{n+1} = U^n + \frac{\Delta t}{6}\left[f\left(Y^1\right) + 2f\left(Y^2\right) + 2f\left(Y^3\right) + f\left(Y^4\right)\right] \quad \{4 \text{ Etapa}$$

$$U^{n+1} = \left\{1 + \frac{\Delta t\,\lambda}{6}\left[1 + 2\left(1 + \frac{1}{2}\Delta t\,\lambda\right) + 2\left[1 + \frac{1}{2}\Delta t\,\lambda\left(1 + \frac{1}{2}\Delta t\,\lambda\right)\right] + \left[1 + \Delta t\,\lambda\left[1 + \frac{1}{2}\Delta t\,\lambda\left(1 + \frac{1}{2}\Delta t\,\lambda\right)\right]\right]\right]\right\}U^n$$

Possui quarta ordem de precisão

Frase do Dia

ñAlthough to penetrate into the intimate mysteries of nature and thence to learn the true causes of phenomena is not allowed to us, nevertheless it can happen that a certain fictive hypothesis may suffice for explaining many phenomena.ò

Leonhard Euler (A mesma das Aula 9, 11)

ñRead Euler, read Euler, he is the master of us all. Read Euler: he is our master in everything.ò

Pierre Simon de Laplace