4- Método de Diferenças Finitas Aplicado às Equações Diferenciais Parciais.

4.1- Aproximação de Funções.

4.1.1- Aproximação por Polinômios.

4.1.2- Ajuste de Dados: Mínimos Quadrados.

4.2- Derivadas e Integrais Numéricas.

4.2.1- Aproximação de Derivadas por Diferenças Finitas.

4.2.2- Aproximação de Integrais por Regras de Integração Numérica.

4.3- Solução de Equações Diferenciais Ordinárias.

4.3.1- Problema de Valor Inicial.

4.3.2- Problema de Valor de Contorno.

4.4- Solução de Equações Diferenciais Parciais.

4.3- Solução de Equações Diferenciais Ordinárias.

Se destacam dois tipos de problemas para as EDO:

$$F\left(f(x), \frac{df(x)}{dx}, \frac{d^2 f(x)}{dx^2}, \cdots, \frac{d^n f(x)}{dx^n} \right) = 0 \quad \text{(EDO implicita)}$$

$$\frac{d^n f(x)}{dx^n} = F\left(f(x), \frac{df(x)}{dx}, \frac{d^2 f(x)}{dx^2}, \cdots, \frac{d^{n-1} f(x)}{dx^{n-1}} \right) \quad \text{(EDO explicita)}$$

A solução geral desta equação possui *n* constantes arbitrárias, que podem ser determinadas se são impostas *n* restrições:

-Problema de Valor Inicial : Quando as restrições são impostas num ponto inicial $x = x_0$(Condições Iniciais). Ou seja, quando são conhecidas no ponto inicial $f(x_0), \frac{df(x_0)}{dx}, \cdots, \frac{d^{n-1} f(x_0)}{dx^{n-1}}$

(Estudado na Aula anterior)

- Problema de Valor de Contorno : Quando as restrições são impostas nos extremos do intervalo $x \in [a,b]$(Condições de Contorno).

4.3.2- Problema de Valor de Contorno (PVC).

Considere que a variável independente é a posição $x \in [a,b]$ e não o tempo t. Nosso Problema de Valor de Contorno consiste em encontrar $u(x)$ que satisfaz:

$$g_n(x)\frac{d^n u(x)}{dx^n} + g_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}u(x)}{dx^{n-1}} + \cdots + g_1(x)\frac{du(x)}{dx} + g_0(x)u(x) = g_{n+1}(x) \quad \forall x \in]a,b[\quad \text{(EDO)}$$

$$\left.\begin{array}{l} n\,\text{Condições} \\ \text{de Contorno.} \\ \text{Por exemplo} \\ \text{para } k < n \end{array}\right\} \begin{cases} u(a) = u_a, \quad u(b) = u_b \\ \dfrac{du(a)}{dx} = u_a', \quad \dfrac{du(b)}{dx} = u_b' \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{d^k u(a)}{dx^k} = u_a^{(k)}, \quad \dfrac{d^k u(b)}{dx^k} = u_b^{(k)} \end{cases}$$

Problemas deste tipo modelam fenômenos unidimensionais que não variam com o tempo, ou seja $\dfrac{\partial u}{\partial t} = 0$. Estudaremos alguns métodos de Diferenças Finitas que aproximam a solução deste PVC. Faremos isto aplicado a problemas que aparecem na vida prática.

4.3.2- Problema de Valor de Contorno (PVC).

Para exemplificar o Método de Aproximação por Diferenças Finitas (MDF) considere um PVC descrito por uma EDO Linear de Segunda Ordem e as seguintes condições de contorno

$$g_2(x)\frac{d^2u(x)}{dx^2}+g_1(x)\frac{du(x)}{dx}+g_0(x)u(x)=g_3(x)\ \ \forall x\in]a,b[\ \ \text{(EDO)}$$

$$u(a)=u_a,\quad u(b)=u_b \qquad \{2 \quad \text{Condições de Contorno}$$

Uma forma de discretizar o problema é construir uma malha da seguinte forma. Dividimos o intervalo $[a,b]$ em n partes iguais de tamanho Δx e definimos o conjunto de nós da malha como:

$$x_i = a + i\Delta x,\quad \Delta x = \frac{(b-a)}{n},\qquad i = 0,1,\cdots,n$$

Os valores correspondentes de $u(x)$ nos pontos desta malha são $u(x_i)=u_i$. Resolver este PVC pelo MDF consiste em aproximar todas as derivadas que aparecem na EDO e nas condições de contorno por formulas de diferenças. Diferenças Centradas são mais usadas porque possuem maior precisão.

4.3.2- Problema de Valor de Contorno (PVC).

Destacamos três formulas de diferenças centradas:

$$\frac{du(x_i)}{dx} \approx D_0(u(x_i)) = \frac{u(x_i+\Delta x)-u(x_i-\Delta x)}{2\Delta x} = \frac{u_{i+1}-u_{i-1}}{2\Delta x} \approx \frac{U_{i+1}-U_{i-1}}{2\Delta x}$$

$$\frac{d^2u(x_i)}{dx^2} \approx D^2(u(x_i)) = \frac{u(x_i+\Delta x)-2u(x_i)+u(x_i-\Delta x)}{(\Delta x)^2} \approx \frac{U_{i+1}-2U_i+U_{i-1}}{(\Delta x)^2}$$

$$\frac{d^4u(x_i)}{dx^4} \approx D^4(u(x_i)) = \frac{u(x_i+2\Delta x)-4u(x_i+\Delta x)+6u(x_i)-4u(x_i-\Delta x)+u(x_i-2\Delta x)}{(\Delta x)^4}$$

$$\approx \frac{U_{i+2}-4U_{i+1}+6U_i-4U_{i-1}+U_{i-2}}{(\Delta x)^4}$$

Então a aproximação pelo MDF para o PVC anterior consiste em encontrar $U_i \approx u(x_i)$ que satisfaz

$$g_2(x_i)\frac{U_{i+1}-2U_i+U_{i-1}}{(\Delta x)^2} + g_1(x_i)\frac{U_{i+1}-U_{i-1}}{2\Delta x} + g_0(x_i)U_i = g_3(x_i) \quad \forall 0<i<n \quad \text{(EDO)}$$

$$U_0 = u_a, \quad U_n = u_b \qquad \{2 \ \text{Condições de Contorno}$$

Esta equação pode ser reescrita como:

4.3.2- Problema de Valor de Contorno (PVC).

$$\left(g_2^i - \frac{\Delta x}{2} g_1^i\right) U_{i-1} + \left(g_0^i (\Delta x)^2 - 2 g_2^i\right) U_i + \left(g_2^i + \frac{\Delta x}{2} g_1^i\right) U_{i+1} = g_3^i (\Delta x)^2 \quad \forall 0 < i < n \ \ (\text{EDO})$$

$$U_0 = u_a, \quad U_n = u_b \ \left\{ 2\,\text{C.C., onde}\ g_3^i = g_3(x_i), g_2^i = g_2(x_i), g_1^i = g_1(x_i), g_0^i = g_0(x_i) \right.$$

Note que isto é um sistema linear de *n-1* equações com *n-1* incógnitas que pode ser resolvido pelos m étodos já estudados.

$$\left(g_2^1 - \frac{\Delta x}{2} g_1^1\right) U_0 + \left(g_0^1 (\Delta x)^2 - 2 g_2^1\right) U_1 + \left(g_2^1 + \frac{\Delta x}{2} g_1^1\right) U_2 = g_3^1 (\Delta x)^2$$

$$\left(g_2^2 - \frac{\Delta x}{2} g_1^2\right) U_1 + \left(g_0^2 (\Delta x)^2 - 2 g_2^2\right) U_2 + \left(g_2^2 + \frac{\Delta x}{2} g_1^2\right) U_3 = g_3^2 (\Delta x)^2$$

$$\left(g_2^3 - \frac{\Delta x}{2} g_1^3\right) U_2 + \left(g_0^3 (\Delta x)^2 - 2 g_2^3\right) U_3 + \left(g_2^3 + \frac{\Delta x}{2} g_1^3\right) U_4 = g_3^3 (\Delta x)^2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\left(g_2^{n-1} - \frac{\Delta x}{2} g_1^{n-1}\right) U_{n-2} + \left(g_0^{n-1} (\Delta x)^2 - 2 g_2^{n-1}\right) U_{n-1} + \left(g_2^{n-1} + \frac{\Delta x}{2} g_1^{n-1}\right) U_n = g_3^{n-1} (\Delta x)^2$$

$$U_0 = u_a, \quad U_n = u_b \ \left\{ 2\,\text{C.C.} \right.$$

4.3.2- Problema de Valor de Contorno (PVC).

Ou em forma matricial temos:

$$A_{(n-1)\times(n-1)}U = F, \text{ onde } U = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ \vdots \\ U_{n-1} \end{bmatrix}, \qquad F = \begin{bmatrix} g_3^1(\Delta x)^2 - \left(g_2^1 - \dfrac{\Delta x}{2} g_1^1\right) U_0 \\ g_3^2(\Delta x)^2 \\ g_3^3(\Delta x)^2 \\ \vdots \\ g_3^{n-1}(\Delta x)^2 - \left(g_2^{n-1} + \dfrac{\Delta x}{2} g_1^{n-1}\right) U_n \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix}
\left(g_0^1(\Delta x)^2 - 2g_2^1\right) & \left(g_2^1 + \dfrac{\Delta x}{2} g_1^1\right) & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\left(g_2^2 - \dfrac{\Delta x}{2} g_1^2\right) & \left(g_0^2(\Delta x)^2 - 2g_2^2\right) & \left(g_2^2 + \dfrac{\Delta x}{2} g_1^2\right) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \left(g_2^3 - \dfrac{\Delta x}{2} g_1^3\right) & \left(g_0^3(\Delta x)^2 - 2g_2^3\right) & \left(g_2^3 + \dfrac{\Delta x}{2} g_1^3\right) & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \cdots & a_{ii-1} & a_{ii} & a_{ii+1} & \cdots & 0 \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \left(g_2^{n-2} - \dfrac{\Delta x}{2} g_1^{n-2}\right) & \left(g_0^{n-2}(\Delta x)^2 - 2g_2^{n-2}\right) & \left(g_2^{n-2} + \dfrac{\Delta x}{2} g_1^{n-1}\right) \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \left(g_2^{n-1} - \dfrac{\Delta x}{2} g_1^{n-1}\right) & \left(g_0^{n-1}(\Delta x)^2 - 2g_2^{n-1}\right)
\end{bmatrix}$$

4.3.2- Problema de Valor de Contorno (PVC).

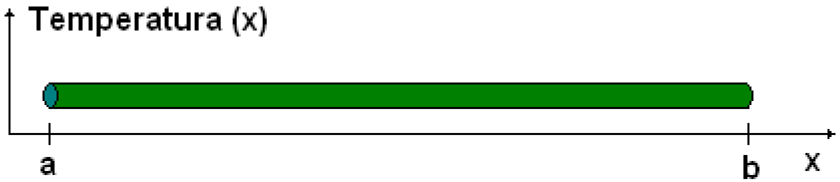
Note que a matriz **A** do sistema linear de equações algébricas obtido pela aplicação do método de diferenças finitas é tridiagonal (matriz esparsa). Ou seja, apenas os elementos da diagonal principal e da diagonal superior e inferior à diagonal principal são diferentes de zero. Isto é uma característica das matrizes geradas pelo método de diferenças finitas. Esta característica deve ser explorada na hora de resolver o sistema de equações linear algébricas porque reduz o uso de memória para armazenar a matriz do sistema.

Note que a matriz é tridiagonal porque usamos formulas de diferenças finitas com no máximo de três pontos. Se tivéssemos usado formulas de diferenças finitas com um número maior de pontos teríamos mais diagonais diferentes de zero. Entretanto a matriz continua sendo esparsa.

4.3.2- Problema de Valor de Contorno (PVC).

Problema 1 ï Equação do Calor: Considere uma barra feita de um material condutor de calor sujeita a alguma fonte externa de calor e condições de contorno nos extremos da barra.

Suponha que as propriedades do material, a distribuição de temperatura inicial e a fonte externa dependem apenas de x e não das direções na seção transversal e nem do tempo.



O fenômeno de condução do calor nesta barra pode ser modelado pela seguinte equação:

$$\underbrace{\frac{d}{dx}\left(-k(x)\frac{du(x)}{dx}\right)}_{\text{Difusão}} = \underbrace{g(x)}_{\text{Fonte Externa}} \quad \forall x \in]a,b[\quad \text{(EDO)}$$

onde $k(x)$ é o coeficiente de condução do calor e $g(x)$ é a fonte externa de calor (Equação da Difusão Estacionária Unidimensional).

4.3.2- Problema de Valor de Contorno (PVC).

Se o material é homogêneo, então $k(x)$ não depende de x e a EDO se transforma e:

$$\underbrace{-k\frac{d^2u(x)}{dx^2}}_{\text{Difusão}} = \underbrace{g(x)}_{\text{Fonte Externa}} \quad \forall x \in]a,b[\quad \text{(EDO)}$$

Condições de Contorno: Destacamos três tipos de condições de contorno

1- A temperatura é conhecida nos extremos do intervalo

$$u(a) = u_a, \quad u(b) = u_b \qquad \{\text{Condição de Dirichlet}$$

2- O fluxo de calor é conhecido em algum extremo do intervalo

$$\frac{du(a)}{dx} = q_a \quad \text{ou} \quad \frac{du(b)}{dx} = q_b \qquad \{\text{Condição de Neumann}$$

3- Se conhece em algum extremo do intervalo uma combinação das duas condições anteriores

$$-k(a)\frac{du(a)}{dx} + \alpha u(a) = r_a \quad \text{ou} \quad -k(b)\frac{du(b)}{dx} + \alpha u(b) = r_b \qquad \{\text{Condição de Robin}$$

4.3.2- Problema de Valor de Contorno (PVC).

Exemplo 1: Resolva o seguinte PVC

$$\underbrace{-k\frac{d^2u(x)}{dx^2}}_{\text{Difusão}} = \underbrace{g(x)}_{\text{Fonte Externa}} \quad \forall x \in]a,b[\quad \text{(EDO)}$$

$$u(a)=u_a, \quad u(b)=u_b \qquad \{\text{Condição de Dirichlet}$$

Este problema é tão simples que pode ser resolvido de forma exata:

$$-k\int\frac{d^2u(x)}{dx^2}dx = \int g(x)dx \quad \text{ou} \quad -k\frac{du(x)}{dx} = \underbrace{\int g(x)dx}_{G_1(x)\ \text{Primitiva}} + C_1 \quad \{\text{Primeira Integração}$$

$$-k\int\frac{du(x)}{dx}dx = \int G_1(x)dx + C_1\int dx \quad \text{ou} \quad -ku(x) = \underbrace{\int G_1(x)dx}_{G_2(x)\ \text{Primitiva}} + C_1x + C_2 \quad \{\text{Segunda Integração}$$

$$-ku(a) = G_2(a) + C_1a + C_2 \quad \{\text{Primeira Condição de Contorno}$$

$$-ku(b) = G_2(b) + C_1b + C_2 \quad \{\text{Segunda Condição de Contorno}$$

$$C_1 = \frac{-k[u(b)-u(a)]+[G_2(b)-G_2(a)]}{b-a} \quad \text{e} \quad C_2 = -ku(b) - G_2(b) - \frac{-k[u(b)-u(a)]+[G_2(b)-G_2(a)]}{b-a}$$

4.3.2- Problema de Valor de Contorno (PVC).

Se aproximamos a derivada segunda pela formula de diferença centrada:

$$\frac{d^2u(x_i)}{dx^2} \approx D^2(u(x_i)) = \frac{u(x_i+\Delta x) - 2u(x_i) + u(x_i - \Delta x)}{(\Delta x)^2} \approx \frac{U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}}{(\Delta x)^2}$$

Então a aproximação pelo MDF para o PVC anterior consiste em encontrar $U_i \approx u(x_i)$ que satisfaz

$$-k\,\frac{U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}}{(\Delta x)^2} = g(x_i) \quad \forall 0 < i < n \quad \text{(EDO)}$$

$$U_0 = u_a, \quad U_n = u_b \qquad \{2 \text{ Condições de Contorno}$$

onde a malha usada para discretizar o problema é:

$$x_i = a + i\Delta x, \quad \Delta x = \frac{(b-a)}{n}, \qquad i = 0, 1, \cdots, n$$

Esta equação pode ser reescrita na forma:

4.3.2- Problema de Valor de Contorno (PVC).

$$\frac{-k}{(\Delta x)^2}[U_{i-1} - 2U_i + U_{i+1}] = g^i \quad \forall 0 < i < n \quad \text{(EDO)}$$

$$U_0 = u_a, \quad U_n = u_b \quad \{2\,\text{C.C., onde } g^i = g(x_i)$$

Note que isto é um sistema linear de *n-1* equações com *n-1* incógnitas que pode ser resolvido pelos métodos já estudados.

$$\frac{-k}{(\Delta x)^2}[U_0 - 2U_1 + 1U_2] = g^1$$

$$\frac{-k}{(\Delta x)^2}[U_1 - 2U_2 + U_3] = g^2$$

$$\frac{-k}{(\Delta x)^2}[U_2 - 2U_3 + U_4] = g^3$$

....

$$\frac{-k}{(\Delta x)^2}[U_{n-2} - 2U_{n-1} + U_n] = g^{n-1}$$

$$U_0 = u_a, \quad U_n = u_b \quad \{2\,\text{C.C.}$$

$$\mathrm{A}_{(n-1)\times(n-1)}\mathrm{U} = \mathrm{F}, \text{ onde } \mathrm{A} = \frac{-k}{(\Delta x)^2}\begin{bmatrix} -2 & 1 & & & & \\ 1 & -2 & 1 & & & \\ & 1 & -2 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{U} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ \vdots \\ U_{n-1} \end{bmatrix}, \qquad \mathrm{F} = \begin{bmatrix} g^1 + \dfrac{k}{(\Delta x)^2}U_0 \\ g^2 \\ g^3 \\ \vdots \\ g^{n-1} + \dfrac{k}{(\Delta x)^2}U_n \end{bmatrix}$$

4.3.2- Problema de Valor de Contorno (PVC).

A matriz **A** é não singular e o sistema anterior pode ser resolvido pelos métodos já estudados.

Erro da Solução Aproximada? já que $\frac{d^2u(x)}{dx^2} \approx D^2(u(x_n)) \Rightarrow U_n \approx u(x_n)$

1- Erro em cada ponto x_i: $e(x_i) = U_i - u(x_i)$

2- Erro global: $\mathrm{E}_G = \mathrm{U} - \mathrm{u}$, onde $\mathrm{U} = [U_0, \cdots, U_n]^{\mathrm{T}}$ e $\mathrm{u} = [u_0, \cdots, u_n]^{\mathrm{T}}$

$$\left.\begin{array}{l} -k\dfrac{d^2u(x)}{dx^2} = g\ (x)\ \ \forall x \in]a,b[\\ u(a) = u_a, \quad u(b) = u_b \end{array}\right\}(1)\ \ \text{Aplicando o MDF} \Rightarrow \mathbf{A}_{(n-1)\times(n-1)}\mathbf{U} = \mathbf{F} \qquad (2)$$

3- Note que em geral u não satisfaz (2) e isto define o chamado erro local

$$\mathrm{E}_L = \mathrm{A}_{(n-1)\times(n-1)}\mathrm{u} - \mathrm{F} \Rightarrow \mathrm{A}_{(n-1)\times(n-1)}\mathrm{u} = \mathrm{F} + \mathrm{E}_L \qquad (3)$$

A componente *i* do erro local (linha *i*) é

$$\left(\mathrm{E}_L\right)_i = \frac{-k}{(\Delta x)^2}[u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}] - g^i \ \ \forall 0 < i < n \ \ (\text{EDO})$$

4.3.2- Problema de Valor de Contorno (PVC).

Se a solução exata do problema é suave expandindo ela em serie de Taylor entorno do ponto x_i para u_{i-1} e u_{i+1} e substituindo na equação anterior obtemos:

$$(\mathrm{E}_L)_i = -k\left[\frac{d^2u(x_i)}{dx^2} + \frac{1}{12}(\Delta x)^2\frac{d^4u(x_i)}{dx^4} + O((\Delta x)^4)\right] - g^i \quad \forall 0<i<n \ \text{(EDO)}$$

Substituindo a EDO (1) segue que:

$$(\mathrm{E}_L)_i = -k\left[\frac{1}{12}(\Delta x)^2\frac{d^4u(x_i)}{dx^4} + O((\Delta x)^4)\right] \quad \forall 0<i<n \ \text{(EDO)}$$

Ou seja, o erro local é de ordem 2 $(\mathrm{E}_L)_i = C_i(\Delta x)^2 \quad \forall 0<i<n \ \text{(EDO)}$

Podemos estabelecer uma rela ção entre o erro local E_L e o erro global E_G. Para isto fa ça a diferença entre (2)-(3) e obtemos:

$$\mathrm{A}_{(n-1)\times(n-1)}\underbrace{(\mathrm{U}-\mathrm{u})}_{\mathrm{E}_G} = -\mathrm{E}_L \quad \text{ou} \quad \mathrm{A}_{(n-1)\times(n-1)}\mathrm{E}_G = -\mathrm{E}_L$$

Note que este é o mesmo sistema de equa ções em diferenças obtido para U exceto que em lugar de F temos $-\mathrm{E}_L$. Este sistema pode ser interpretado como sendo a discretização da

4.3.2- Problema de Valor de Contorno (PVC).

EDO correspondente ao erro em cada ponto:

$$\left.\begin{array}{l} -k\dfrac{d^2e(x)}{dx^2} = -\mathrm{E}_L(x) \quad \forall x \in]a,b[\\ e(a)=0, \quad e(b)=0 \end{array}\right\} (1) \ \text{Aplicando o MDF} \Rightarrow \mathrm{A}_{(n-1)\times(n-1)}\mathrm{E}_G = -\mathrm{E}_L \qquad (2)$$

Já que $\mathrm{E}_L(x) \approx -k\left[\dfrac{1}{12}(\Delta x)^2\dfrac{d^4u(x)}{dx^4}\right]$, então o erro global pode ser obtido integrando duas vezes a EDO anterior:

$$e(x) \approx -k\left[-\frac{1}{12}(\Delta x)^2\frac{d^2u(x)}{dx^2} + \frac{1}{12}(\Delta x)^2\left(\frac{d^2u(a)}{dx^2} + x\left(\frac{d^2u(b)}{dx^2} - \frac{d^2u(a)}{dx^2}\right)\right)\right]$$

Ou seja, $e(x) \approx C(x)(\Delta x)^2$

$$\mathbf{E}_G(x_i) = \left[e(x_0),\cdots,e(x_n)\right]^{\mathrm{T}} \approx (\Delta x)^2\left[C(x_0),\cdots,C(x_n)\right]^{\mathrm{T}}$$

Logo para este problema o erro global também é de ordem 2 ao igual que o erro local.

4.3.2- Problema de Valor de Contorno (PVC).

Estabilidade: Considere o sistema que estabelece a relação entre o erro local e o erro global:

$$\mathbf{A}\mathbf{E}_G = -\mathbf{E}_L \quad \text{ou} \quad \mathbf{A}^h\mathbf{E}_G^h = -\mathbf{E}_L^h, \quad \text{onde } h = \Delta x$$

Escrito desta forma nos lembra que o sistema depende do tamanho da malha $h = \Delta x$. Note que quando $h \to 0$ a dimensão da matriz $\mathbf{A}^h$ aumenta.

Seja $\left(\mathbf{A}^h\right)^{-1}$ a inversa da matriz $\mathbf{A}^h$, logo a solução do sistema é

$$\mathbf{E}_G^h = -\left(\mathbf{A}^h\right)^{-1}\mathbf{E}_L^h \quad \text{e} \quad \left\|\mathbf{E}_G^h\right\| = \left\|\left(\mathbf{A}^h\right)^{-1}\mathbf{E}_L^h\right\| \le \left\|\left(\mathbf{A}^h\right)^{-1}\right\| \left\|\mathbf{E}_L^h\right\| \qquad (4)$$

Foi visto que $\left\|\mathbf{E}_L^h\right\| = O(h^2)$ e esperamos a mesma ordem de precisão para $\left\|\mathbf{E}_G^h\right\|$ (como foi visto também). Para que isto se verifique na relação (4) é necessário que $\left\|\left(\mathbf{A}^h\right)^{-1}\right\|$ seja limitado por uma constante independente de h quando $h \to 0$.

$$\left\|\left(\mathbf{A}^h\right)^{-1}\right\| < C \quad \text{para } h \text{ suficientemente pequeno} \Rightarrow \left\|\mathbf{E}_G^h\right\| \le C\left\|\mathbf{E}_L^h\right\| = C\,O(h^2)$$

4.3.2- Problema de Valor de Contorno (PVC).

Isto motiva a seguinte definição de estabilidade para PVC.

ESTABILIDADE: Suponha que um método de diferenças finitas para o PVC linear fornece uma seqüência de equações matriciais da forma $\mathbf{A}^h\mathbf{U}^h = \mathbf{F}^h$, onde h é o parâmetro da malha. Se diz que este Método de Diferenças Finitas é Estável se $\left(\mathbf{A}^h\right)^{-1}$ existe para todo h suficientemente pequeno $(\forall h < h_0)$ e se existe uma constante C, que independe de h, tal que

$$\left\|\left(\mathbf{A}^h\right)^{-1}\right\| < C \quad \forall h < h_0$$

Note que se esta condição de estabilidade se verifica, então

$$\text{para } h \text{ suficientemente pequeno} \Rightarrow \left\|\mathbf{E}_G^h\right\| \le C\left\|\mathbf{E}_L^h\right\| = C\,O(h^2)$$

CONSISTÊNCIA: Se diz que o MDF é consistente se o Erro Local tende para zero quando o parâmetro da malha tende para zero: $\mathbf{E}_L^h \to 0 \text{ quando } h \to 0 \Rightarrow \mathbf{A}^h\mathbf{E}_G^h \to 0 \Rightarrow \mathbf{E}_G^h \to 0 \Rightarrow \mathbf{U}^h \to \mathbf{u}$

4.3.2- Problema de Valor de Contorno (PVC).

CONVERGÊNCIA: Se diz que o MDF é convergente se a norma do Erro Global tende para zero quando o parâmetro da malha tende para zero: $\left\|\mathbf{E}_G^h\right\| \to 0 \text{ quando } h \to 0$

Combinando os três conceitos anteriores chegamos ao resultado

$$Consistência + Estabilidade \Rightarrow Convergência$$

Ou seja, se $\mathbf{E}_L^h \to 0 \text{ quando } h \to 0$ e $\left\|\left(\mathbf{A}^h\right)^{-1}\right\| < C \quad \forall h < h_0$, então

$$\left\|\mathbf{E}_G^h\right\| \leq \left\|\left(\mathbf{A}^h\right)^{-1}\right\| \left\|\mathbf{E}_L^h\right\| \leq C \left\|\mathbf{E}_L^h\right\| \to 0 \text{ quando } h \to 0$$

Em geral, Consistência é mais fácil de verificar que Estabilidade. Provar a Estabilidade de um MDF é um dos maiores desafios que encontramos quando queremos mostrar a Convergência dos MDF para novos problemas, sejam eles problemas lineares ou não lineares.

4.3.2- Problema de Valor de Contorno (PVC).

Exemplo 1: Resolva o seguinte PVC

$$\underbrace{-\frac{d^2u(x)}{dx^2}}_{\text{Difusão } k=1} = \underbrace{0}_{\text{Fonte Externa}} \quad \forall x \in]0,1[\quad \text{(EDO)}$$

$$u(0)=0, \quad u(1)=1 \qquad \{\text{Condição de Dirichlet}$$

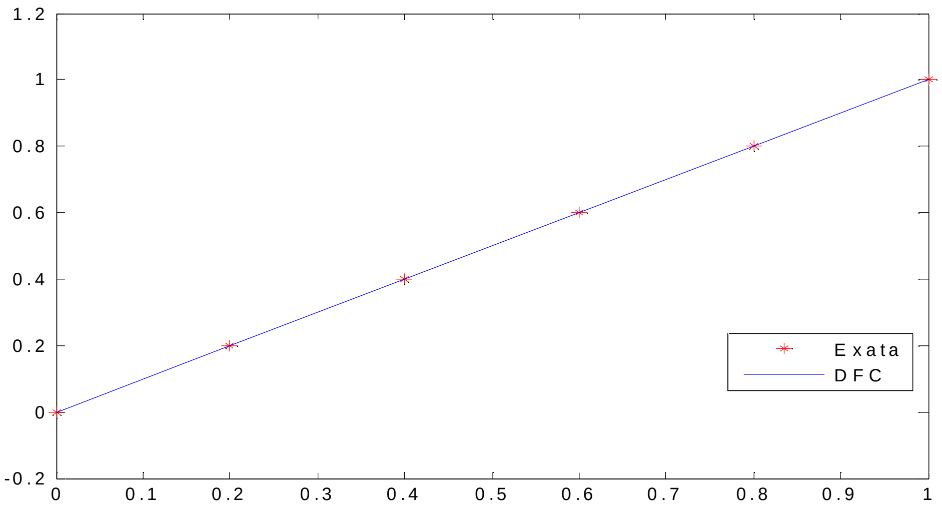
Este problema é tão simples que pode ser resolvido de forma exata: $-u(x) = C_1 x + C_2$ onde $C_1 = -1$ e $C_2 = 0$ ou $u(x) = x$

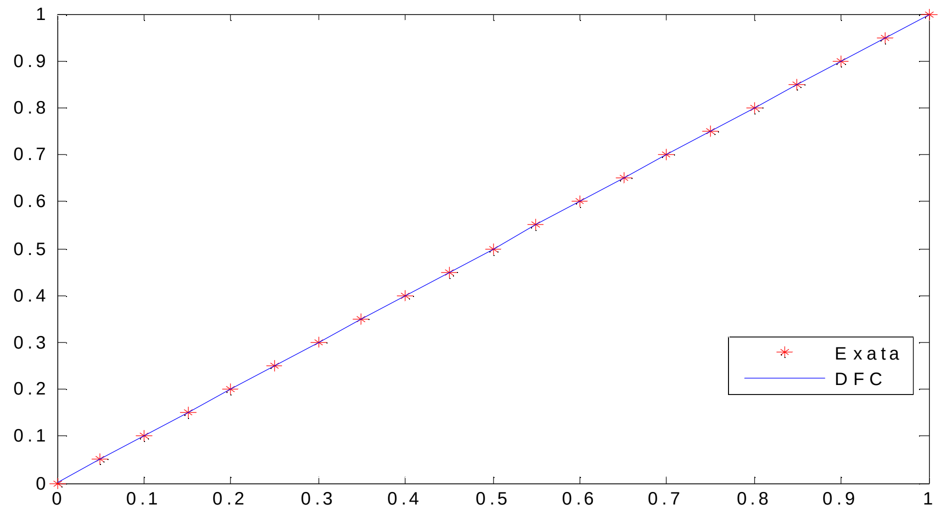
Construímos a malha na forma

$$x_i = a + i\Delta x, \quad \Delta x = \frac{(b-a)}{n}, \qquad i = 0,1,\cdots,n \qquad \text{n=5 e n=20}$$

$$\left.\begin{array}{l} -\dfrac{d^2e(x)}{dx^2} = -\mathbf{E}_L(x) \quad \forall x \in]0,1[\\ e(0)=0, \quad e(1)=0 \\ \mathbf{E}_L(x) \approx -k\left[\dfrac{1}{12}(\Delta x)^2 \dfrac{d^4u(x)}{dx^4}\right] \\ \text{como } \dfrac{d^4(x)}{dx^4} = 0 \Rightarrow \mathbf{E}_L(x) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} -ke(x) = C_1x + C_2 \\ e(0)=0, \quad e(1)=0 \end{array}\right. \Rightarrow \{e(x) = 0$$

4.3.2- Problema de Valor de Contorno (PVC).





Frase do Dia

ñAlthough to penetrate into the intimate mysteries of nature and thence to learn the true causes of phenomena is not allowed to us, nevertheless it can happen that a certain fictive hypothesis may suffice for explaining many phenomena.ò

Leonhard Euler (A mesma das Aula 9, 11, 12)

ñ... the study of Eulerôs works will remain the best for different fields of mathematics and nothing else can replace it.ò

Friedrich Gauss