

4- Método de Diferenças Finitas Aplicado às Equações Diferenciais Parciais.

4.1- Aproximação de Funções.

4.1.1- Aproximação por Polinômios.

4.1.2- Ajuste de Dados: Mínimos Quadrados.

4.2- Derivadas e Integrais Numéricas.

4.2.1- Aproximação de Derivadas por Diferenças Finitas.

4.2.2- Aproximação de Integrais por Regras de Integração Numérica.

4.3- Solução de Equações Diferenciais Ordinárias.

4.3.1- Problema de Valor Inicial.

4.3.2- Problema de Valor de Contorno.

4.4- Solução de Equações Diferenciais Parciais.

4.3.2- Problema de Valor de Contorno (PVC).

Problema 1 . Equação do Calor: Considere uma barra feita de um material condutor de calor sujeita a alguma fonte externa de calor e condições de contorno nos extremos da barra.

Suponha que as propriedades do material, a distribuição de temperatura inicial e a fonte externa dependem apenas de x e não das direções na seção transversal e nem do tempo.



O fenômeno de condução do calor nesta barra pode ser modelado pela seguinte equação:

$$\underbrace{\frac{d}{dx} \left(-k(x) \frac{du(x)}{dx} \right)}_{\text{Difusão}} = \underbrace{g(x)}_{\text{Fonte Externa}} \quad \forall x \in]a, b[\quad (\text{EDO})$$

onde $k(x)$ é o coeficiente de condução do calor e $g(x)$ é a fonte externa de calor (**Equação da Difusão Estacionária Unidimensional**).

4.3.2- Problema de Valor de Contorno (PVC).

Se o material é homogêneo, então $k(x)$ não depende de x e a

EDO se transforma em:
$$\underbrace{-k \frac{d^2 u(x)}{dx^2}}_{\text{Difusão}} = \underbrace{g(x)}_{\text{Fonte Externa}} \quad \forall x \in]a, b[\quad (\text{EDO})$$

Condições de Contorno: Destacamos três tipos de condições de contorno

Tipo 1- A temperatura é conhecida nos extremos do intervalo

$$u(a) = u_a, \quad u(b) = u_b \quad \{\text{Condição de Dirichlet}$$

Tipo 2- O fluxo de calor é conhecido em algum extremo do

intervalo $\frac{du(a)}{dx} = q_a$ ou $\frac{du(b)}{dx} = q_b$ $\{\text{Condição de Neumann}$

Tipo 3- Se conhece em algum extremo do intervalo uma combinação das duas condições anteriores

$$-k(a) \frac{du(a)}{dx} + \alpha u(a) = r_a \quad \text{ou} \quad -k(b) \frac{du(b)}{dx} + \alpha u(b) = r_b \quad \{\text{Condição de Robin}$$

4.3.2- Problema de Valor de Contorno (PVC).

Exemplo 1: Resolva o seguinte PVC

$$\underbrace{-k \frac{d^2 u(x)}{dx^2}}_{\text{Difusão}} = \underbrace{g(x)}_{\text{Fonte Externa}} \quad \forall x \in]a, b[\quad (\text{EDO})$$

$$u(a) = u_a, \quad u(b) = u_b \quad \{\text{Condição de Dirichlet}\}$$

Este problema é tão simples que pode ser resolvido de forma exata:

$$-k \int \frac{d^2 u(x)}{dx^2} dx = \int g(x) dx \quad \text{ou} \quad -k \frac{du(x)}{dx} = \underbrace{\int g(x) dx}_{G_1(x) \text{ Primitiva}} + C_1 \quad \{\text{Primeira Integração}\}$$

$$-k \int \frac{du(x)}{dx} dx = \int G_1(x) dx + C_1 \int dx \quad \text{ou} \quad -ku(x) = \underbrace{\int G_1(x) dx}_{G_2(x) \text{ Primitiva}} + C_1 x + C_2 \quad \{\text{Segunda Integração}\}$$

$$-ku(a) = G_2(a) + C_1 a + C_2 \quad \{\text{Primeira Condição de Contorno}\}$$

$$-ku(b) = G_2(b) + C_1 b + C_2 \quad \{\text{Segunda Condição de Contorno}\}$$

$$C_1 = \frac{-k[u(b) - u(a)] + [G_2(b) - G_2(a)]}{b - a} \quad \text{e} \quad C_2 = -ku(b) - G_2(b) - \frac{-k[u(b) - u(a)] + [G_2(b) - G_2(a)]}{b - a}$$

4.3.2- Problema de Valor de Contorno (PVC).

Se aproximamos a derivada segunda pela formula de diferença centrada:

$$\frac{d^2 u(x_i)}{dx^2} \approx D^2(u(x_i)) = \frac{u(x_i + \Delta x) - 2u(x_i) + u(x_i - \Delta x)}{(\Delta x)^2} \approx \frac{U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}}{(\Delta x)^2}$$

Então a aproximação pelo MDF para o PVC anterior consiste em encontrar $U_i \approx u(x_i)$ que satisfaz

$$-k \frac{U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}}{(\Delta x)^2} = g(x_i) \quad \forall 0 < i < n \quad (\text{EDO})$$

$$U_0 = u_a, \quad U_n = u_b \quad \{2 \text{ Condições de Contorno}\}$$

onde a malha usada para discretizar o problema é:

$$x_i = a + i\Delta x, \quad \Delta x = \frac{(b-a)}{n}, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

Esta equação pode ser reescrita na forma:

4.3.2- Problema de Valor de Contorno (PVC).

O erro em cada ponto:

$$\left. \begin{aligned} -k \frac{d^2 e(x)}{dx^2} &= -\mathbf{E}_L(x) \quad \forall x \in]a, b[\\ e(a) &= 0, \quad e(b) = 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &(1) \text{ Aplicando o MDF} \Rightarrow \mathbf{A}_{(n-1) \times (n-1)} \mathbf{E}_G = -\mathbf{E}_L \quad (2) \end{aligned}$$

Já que $\mathbf{E}_L(x) \approx -k \left[\frac{1}{12} (\Delta x)^2 \frac{d^4 u(x)}{dx^4} \right]$, então o erro global pode ser obtido integrando duas vezes a EDO anterior:

$$e(x) \approx -k \left[-\frac{1}{12} (\Delta x)^2 \frac{d^2 u(x)}{dx^2} + \frac{1}{12} (\Delta x)^2 \left(\frac{d^2 u(a)}{dx^2} + x \left(\frac{d^2 u(b)}{dx^2} - \frac{d^2 u(a)}{dx^2} \right) \right) \right]$$

Ou seja, $e(x) \approx C(x)(\Delta x)^2$

$$\mathbf{E}_G(x_i) = [e(x_0), \dots, e(x_n)]^T \approx (\Delta x)^2 [C(x_0), \dots, C(x_n)]^T$$

Logo para este problema o erro global também é de ordem 2 ao igual que o erro local. Isto garante a Estabilidade e Consistência do método e conseqüentemente a Convergência.

4.3.2- Problema de Valor de Contorno (PVC).

Um caso do Exemplo 1 : Resolva o seguinte PVC

$$\underbrace{-\frac{d^2 u(x)}{dx^2}}_{\text{Difusão } k=1} = \underbrace{0}_{\text{Fonte Externa}} \quad \forall x \in]0,1[\quad (\text{EDO})$$

$$u(0) = 0, \quad u(1) = 1 \quad \left\{ \text{Condição de Dirichlet} \right.$$

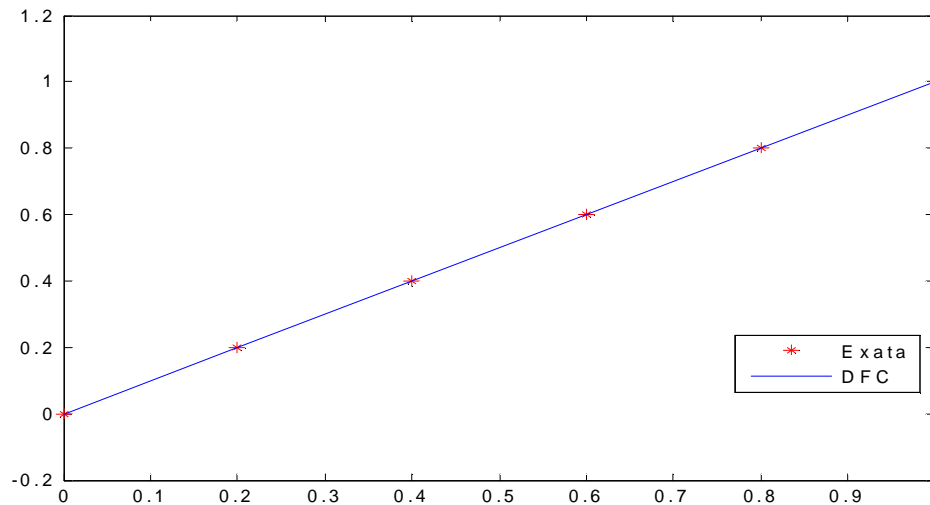
Este problema é tão simples que pode ser resolvido de forma exata: $-u(x) = C_1 x + C_2$ onde $C_1 = -1$ e $C_2 = 0$ ou $u(x) = x$

Construímos a malha na forma

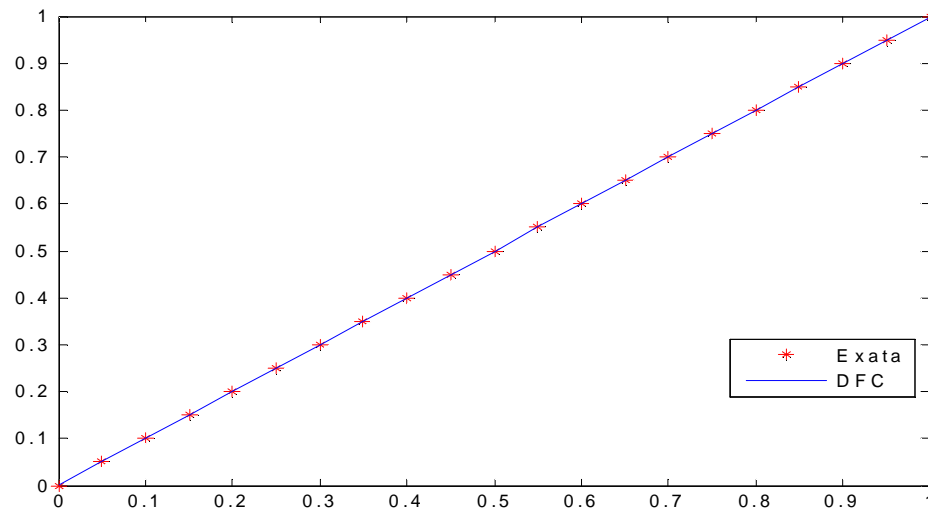
$$x_i = a + i\Delta x, \quad \Delta x = \frac{(b-a)}{n}, \quad i = 0, 1, \dots, n \quad \text{usamos } n=5 \text{ e } n=20$$

$$\left. \begin{array}{l} -k \frac{d^2 e(x)}{dx^2} = -\mathbf{E}_L(x) \quad \forall x \in]a, b[\\ e(a) = 0, \quad e(b) = 0 \\ \mathbf{E}_L(x) \approx -k \left[\frac{1}{12} (\Delta x)^2 \frac{d^4 u(x)}{dx^4} \right] \\ \text{como } \frac{d^4 u(x)}{dx^4} = 0 \Rightarrow \mathbf{E}_L(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} -ke(x) = C_1 x + C_2 \\ e(a) = 0, \quad e(b) = 0 \end{cases} \Rightarrow \{e(x) = 0$$

4.3.2- Problema de Valor de Contorno (PVC).



n=5



n=20

$$e(x) = 0 \quad \forall x \in [0,1]$$

Erro global zero para todos os pontos.
Ou seja, a solução do método numérico corresponde ao interpolante. Neste caso, isto é possível por dois motivos:

1- porque o método é estável e consistente, logo convergente

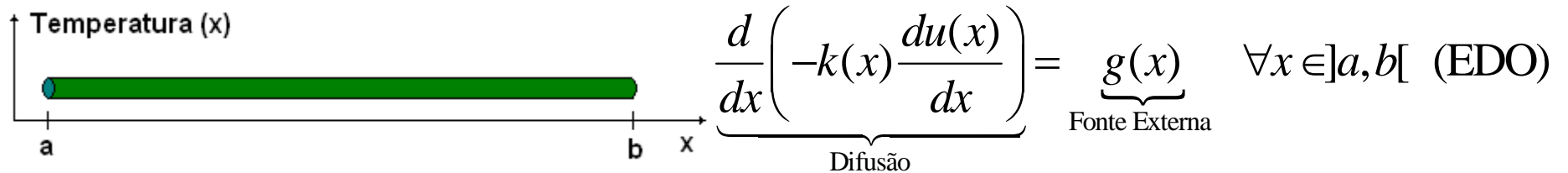
2- porque a solução exata é um polinômio linear e nossa aproximação é de segunda ordem de precisão.

Se a solução exata fosse um polinômio de grau maior que 1 o erro seria pequeno, mas não zero.

$$e(x) \approx C(x)(\Delta x)^2 \quad \forall x \in [0,1]$$

4.3.2- Problema de Valor de Contorno (PVC).

Problema 1 . Equação do Calor: Considere o mesmo problema 1 anterior. Ou seja, o fenômeno de condução do calor numa barra unidimensional:


$$\frac{d}{dx} \left(\underbrace{-k(x) \frac{du(x)}{dx}}_{\text{Difusão}} \right) = \underbrace{g(x)}_{\text{Fonte Externa}} \quad \forall x \in]a, b[\quad (\text{EDO})$$

Mas agora com **condições de contorno** de **Dirichlet (tipo 1)** e de **Neumann (tipo 2)**:

1- A temperatura é conhecida num extremo do intervalo

$$u(b) = u_b \quad \{ \text{Condição de Dirichlet} \}$$

2- O fluxo de calor é conhecido em algum extremo do intervalo

$$\frac{du(a)}{dx} = q_a \quad \{ \text{Condição de Neumann} \}$$

Impondo condição de Neumann nos dois extremos do intervalo o problema é mal posto: infinitas soluções ou nenhuma!

4.3.2- Problema de Valor de Contorno (PVC).

Exemplo 1.1: Suponha $k(x)=1$, $g(x)=0$ logo

$$\underbrace{-\frac{d^2u(x)}{dx^2}}_{\text{Difusão } k=1} = \underbrace{0}_{\text{Fonte Externa}} \quad \forall x \in]0,1[\quad (\text{EDO})$$

$$\frac{du(0)}{dx} = 1, \quad u(1) = 2$$

Este problema é tão simples que pode ser resolvido de forma exata: $u(x) = C_1x + C_2$ onde $C_1 = 1$ e $C_2 = 1$ ou $u(x) = x + 1$

Construímos a malha na forma $x_i = a + i\Delta x$, $\Delta x = \frac{(b-a)}{n}$, $i = 0, 1, \dots, n$

$$\left. \begin{array}{l} -\frac{d^2e(x)}{dx^2} = -\mathbf{E}_L(x) \quad \forall x \in]0,1[\\ \frac{de(0)}{dx} = 0, \quad e(1) = 0 \\ \mathbf{E}_L(x) \approx -\left[\frac{1}{12} (\Delta x)^2 \frac{d^4u(x)}{dx^4} \right] \\ \text{como } \frac{d^4u(x)}{dx^4} = 0 \Rightarrow \mathbf{E}_L(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} e(x_i) = U_i - u(x_i) \\ e(x) = C_1x + C_2 \\ \frac{de(0)}{dx} = 0, \quad e(1) = 0 \Rightarrow \{e(x) = 0 \end{array} \right.$$

Novamente o erro global é zero! (Interpolante)

4.3.2- Problema de Valor de Contorno (PVC).

Para resolver numericamente este problema precisamos **determinar** U_0 **no extremo esquerdo** do intervalo porque a **condição** neste ponto é **de Neumann**. Entre as várias formas de fazer isto destacamos **duas**:

Primeira Forma: **Aproximamos a derivada neste ponto por uma formula adiantada**

$$\frac{du(0)}{dx} \approx D_+(u(0)) = \frac{u(0 + \Delta x) - u(0)}{\Delta x} \approx \frac{U_1 - U_0}{\Delta x} = 1$$

Obtemos o seguinte sistema que difere do caso de **condição de contorno de Dirichlet** apenas na primeira linha.

$$\frac{-1}{(\Delta x)^2} [U_{i-1} - 2U_i + U_{i+1}] = g^i \quad \forall 0 < i < n \quad (\text{EDO})$$

$$\frac{1}{\Delta x} [-U_0 + U_1] = 1, \quad U_n = 0 \quad \{2 \text{ C. C.}\}$$

4.3.2- Problema de Valor de Contorno (PVC).

A solução deste sistema é de **segunda ordem de precisão** porque o **erro local** no extremo esquerdo é

$$\mathbf{E}_L = \mathbf{A}_{n \times n} \mathbf{u} - \mathbf{F} \Rightarrow \mathbf{A}_{n \times n} \mathbf{u} = \mathbf{F} + \mathbf{E}_L \Rightarrow (\mathbf{E}_L)_0 = \frac{1}{2\Delta x} [3u_0 - 4u_1 + u_2] - 1 \text{ para } i = 0$$

expandindo em **serie de Taylor** entorno do ponto $x_0 = 0$ para u_1 e u_2 e substituindo na equação anterior obtemos

$$(\mathbf{E}_L)_0 = \frac{1}{2\Delta x} \left[2(\Delta x) \frac{du(x_0)}{dx} + \frac{2}{3} (\Delta x)^3 \frac{d^3u(x_0)}{dx^3} + O((\Delta x)^3) \right] - 1 = \frac{1}{3} (\Delta x)^2 \frac{d^3u(x_0)}{dx^3} + O((\Delta x)^2)$$

Depois de substituir a **condição de contorno** $\frac{du(0)}{dx} = 1$. O **erro**

neste ponto é da mesma ordem que para o restante dos pontos da malha. Logo, devemos esperar que o **erro global seja de segunda ordem**. Diferentemente da primeira aproximação da **CC** onde o **erro global foi de primeira ordem**, já que o **erro local** no primeiro ponto era de primeira ordem e esta ordem se propagou para os outros pontos da malha.

4.3.2- Problema de Valor de Contorno (PVC).

Problema 2 . Equação Unidimensional da Difusão-Adveção

Linear e Estacionaria : Considere o fenômeno da distribuição de temperatura num tubo unidimensional por onde escoa um fluido com velocidade $\vec{\omega}$ e com coeficiente de difusão do calor $k(x)$. A equação que descreve matematicamente este fenômeno é:



$$\left. \begin{array}{l} u(a) = u_a, \\ u(b) = u_b. \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Condição} \\ \text{de Dirichlet} \end{array}$$

$$\underbrace{\frac{d}{dx} \left(-k(x) \frac{du(x)}{dx} \right)}_{\text{Difusão}} + \underbrace{\omega \frac{du(x)}{dx}}_{\text{Adveção}} = \underbrace{g(x)}_{\text{Fonte Externa}} \quad \forall x \in]a, b[\quad (\text{EDO})$$

onde $g(x)$ é a fonte externa de calor e condições de contorno nos extremos de Dirichlet.

Suponha para simplificar que os coeficientes da equação são constantes (não dependem da posição).

4.3.2- Problema de Valor de Contorno (PVC).

Então o PVC se transforma em:

$$\left. \begin{aligned} -k \frac{d^2 u(x)}{dx^2} + \omega \frac{du(x)}{dx} &= g(x) \quad \forall x \in]a, b[\\ u(a) &= u_a, \quad u(b) = u_b \end{aligned} \right\}$$

Este problema pode ser discretizado usando a aproximação já estudada de **diferenças finitas centradas** de segunda ordem:

$$x_i = a + i\Delta x, \quad \Delta x = \frac{(b-a)}{n}, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

$$\frac{du(x_i)}{dx} \approx D_0(u(x_i)) = \frac{u(x_i + \Delta x) - u(x_i - \Delta x)}{2\Delta x} = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x} \approx \frac{U_{i+1} - U_{i-1}}{2\Delta x}$$

$$\frac{d^2 u(x_i)}{dx^2} \approx D^2(u(x_i)) = \frac{u(x_i + \Delta x) - 2u(x_i) + u(x_i - \Delta x))}{(\Delta x)^2} \approx \frac{U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}}{(\Delta x)^2}$$

Quando $|\vec{\omega}| \ll k$ esta aproximação é **ESTÁVEL** e **CONSISTENTE**.

Ou seja, quando a **difusão é dominante perante a advecção** (convecção) a solução numérica obtida através do MDF

4.3.2- Problema de Valor de Contorno (PVC).

CONVERGE para a solução exata do **PVC**. Note que se $|\vec{\omega}|=0$, então este problema se transforma no **problema puramente difusivo** que possui segunda ordem de precisão para esta

aproximação:

$$\left. \begin{aligned} -k \frac{d^2 u(x)}{dx^2} &= g(x) \quad \forall x \in]a, b[\\ u(a) &= u_a, \quad u(b) = u_b \end{aligned} \right\}$$

Note também que se $|\vec{\omega}| \approx 0$ (**efeitos advectivos desprezíveis**) a solução do PVC deve ser muito próxima da solução do **problema puramente difusivo**.

Entretanto, quando $|\vec{\omega}| \gg k$ esta aproximação é **INESTÁVEL**. Ou seja, quando a **advecção é dominante perante a difusão** a solução numérica obtida através deste MDF apresenta **oscilações espúrias** (não correspondem à solução exata). Em termos físicos é diminuída a possibilidade do calor se difundir em direções diferentes da direção de escoamento do fluido $\vec{\omega}$. Lembre que o calor se difunde na direção do gradiente.

4.3.2- Problema de Valor de Contorno (PVC).

Este problema pode ser escrito numa forma mais apropriada. Ou seja, em termos de um **parâmetro adimensional** que indique a razão entre a **velocidade de advecção** e a **velocidade de transporte devido a difusão**. O **Número de Péclet** $P_e = \frac{h|\vec{\omega}|}{k}$ é usado para definir este parâmetro $\varepsilon \equiv \frac{k}{|\vec{\omega}|} = \frac{h}{P_e}$, onde h tem dimensão espacial. Então o PVC pode ser escrito como:

$$\left. \begin{aligned} -k \frac{d^2 u(x)}{dx^2} + \omega \frac{du(x)}{dx} &= g(x) \quad \forall x \in]a, b[\\ u(a) &= u_a, \quad u(b) = u_b \end{aligned} \right\} \left\{ \begin{aligned} -\varepsilon \frac{d^2 u(x)}{dx^2} + \frac{du(x)}{dx} &= \check{g}(x) \quad \forall x \in]a, b[\\ u(a) &= u_a, \quad u(b) = u_b \quad \text{onde } \check{g}(x) \equiv \frac{g(x)}{\omega} \end{aligned} \right\}$$

Note que se $|\vec{\omega}| \gg k \Rightarrow P_e \gg 1 \Rightarrow \varepsilon \ll 1$ (**advecção dominante**) e para a **difusão dominante** temos $|\vec{\omega}| \ll k \Rightarrow P_e \ll 1 \Rightarrow \varepsilon \gg 1$.

Quando $|\vec{\omega}| \ll k \Rightarrow P_e \ll 1 \Rightarrow \varepsilon \gg 1$ (**difusão dominante**) a solução numérica deste problema é próxima da solução do **problema puramente difusivo**. Ambas EDO são de segunda ordem e

4.3.2- Problema de Valor de Contorno (PVC).

requerem da mesma quantidade de condições de contorno (duas) para possuir uma única solução. Neste caso se diz que a perturbação introduzida pela **advecção** é uma **perturbação regular**.

Quando $|\vec{\omega}| \gg k \Rightarrow P_e \gg 1 \Rightarrow \varepsilon \ll 1$ (**advecção dominante**) se diz que a perturbação introduzida pela **advecção** é uma **perturbação singular (não regular)**. Neste caso devemos esperar dificuldades para o método numérico quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Note que no limite $\varepsilon = 0$ a EDO se transforma em uma EDO de primeira ordem:

$$-\varepsilon \frac{d^2 u(x)}{dx^2} + \frac{du(x)}{dx} = \dot{g}(x) \quad \forall x \in]a, b[\Rightarrow \left\{ \frac{du(x)}{dx} = \dot{g}(x) \forall x \in]a, b[\right.$$

que precisa apenas de uma condição de contorno (**inflow boundary**) para possuir uma única solução (**problema puramente advectivo**). Ou seja, quando $\varepsilon \rightarrow 0$ a influência de uma das condições de contorno no PVC se torna desprezível. Isto indica que a solução exata deve ter um comportamento parecido com a

4.3.2- Problema de Valor de Contorno (PVC).

solução do **problema puramente advectivo** e que perto deste contorno (**outflow boundary**) a solução exata pode apresentar derivada grande. Em outras palavras, nesta região perto do contorno onde o fluido está saindo (**outflow boundary**) a solução exata pode tender a ter **salto (discontinuidades ou derivada grande)**. As regiões onde a derivada da solução é muito grande são chamadas de regiões com **camadas limites externa (boundary layer)**. Pode ser mostrado que para este tipo de problema a **espessura desta camada limite externa** é da ordem de $O(\varepsilon)$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Por exemplo, a solução do PVC

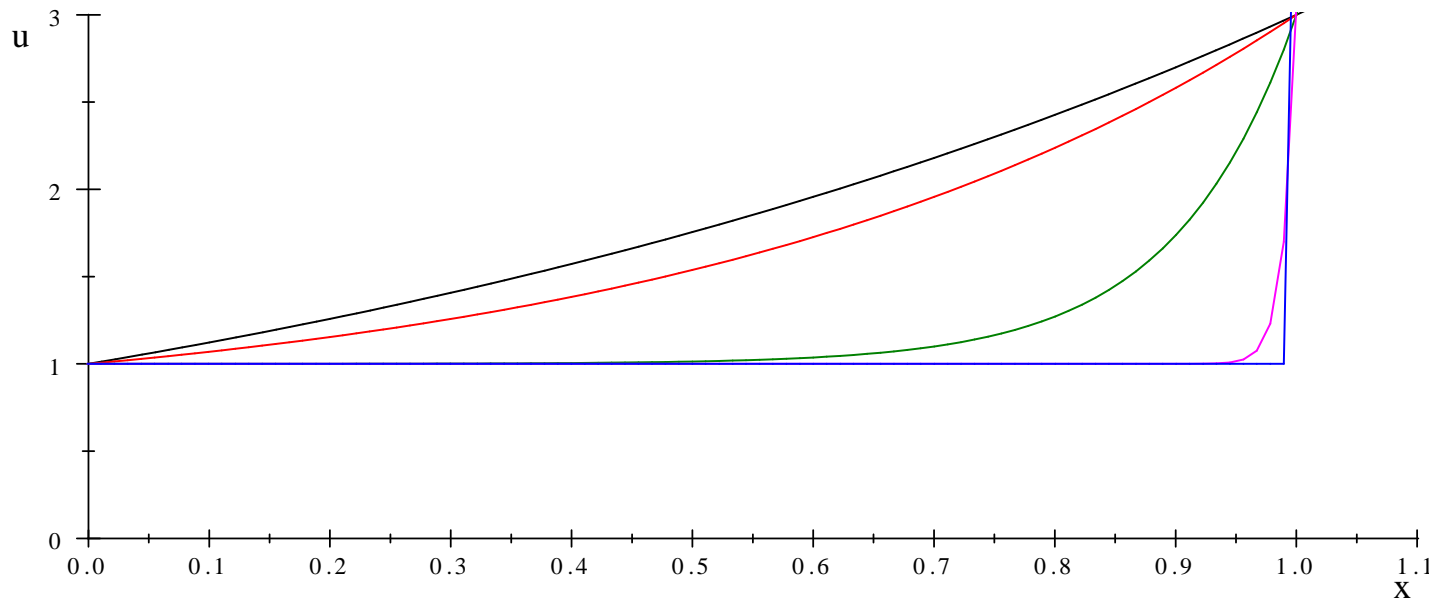
$$\begin{cases} -\varepsilon \frac{d^2 u(x)}{dx^2} + \frac{du(x)}{dx} = 0 & \forall x \in]a, b[\\ u(a) = u_a, & u(b) = u_b \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} u(x) = C_1 + C_2 e^{(x-a)/\varepsilon} \\ C_1 = u_a - \frac{[u_b - u_a]}{[e^{(b-a)/\varepsilon} - 1]}, \quad C_2 = \frac{[u_b - u_a]}{[e^{(b-a)/\varepsilon} - 1]} \end{array} \right.$$

4.3.2- Problema de Valor de Contorno (PVC).

Considere para este exemplo $a = 0, b = 1, u_a = 1, u_b = 3$. Logo

$$u(x) = C_1 + C_2 e^{(x-a)/\varepsilon} \left\{ \begin{array}{l} u(x) = C_1 + C_2 e^{x/\varepsilon} \\ C_1 = 1 - \frac{2}{[e^{1/\varepsilon} - 1]}, \quad C_2 = \frac{2}{[e^{1/\varepsilon} - 1]} \end{array} \right.$$

$$\text{ou } u(x) = 1 - \frac{2}{[e^{1/\varepsilon} - 1]} + \frac{2}{[e^{1/\varepsilon} - 1]} e^{x/\varepsilon} = 1 + 2 \frac{[e^{x/\varepsilon} - 1]}{[e^{1/\varepsilon} - 1]}$$



$$\varepsilon = \begin{cases} 1 \\ 0.5 \\ 0.1 \\ 0.01 \\ 0.001 \end{cases}$$

Espessura da camada limite externa é da ordem de $O(\varepsilon)$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

4.3.2- Problema de Valor de Contorno (PVC).

Este problema pode ser discretizado usando a aproximação já estudada de **diferenças finitas centradas**:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\varepsilon \frac{d^2 u(x)}{dx^2} + \frac{du(x)}{dx} = 0 \quad \forall x \in]a, b[\\ u(a) = u_a, \quad u(b) = u_b \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} u(x) = C_1 + C_2 e^{(x-a)/\varepsilon} \\ C_2 = \frac{[u_b - u_a]}{[e^{(b-a)/\varepsilon} - 1]}, \quad C_1 = u_a - \frac{[u_b - u_a]}{[e^{(b-a)/\varepsilon} - 1]} \end{array} \right.$$

$$x_i = a + i\Delta x, \quad \Delta x = \frac{(b-a)}{n}, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

E aproximamos as derivadas por

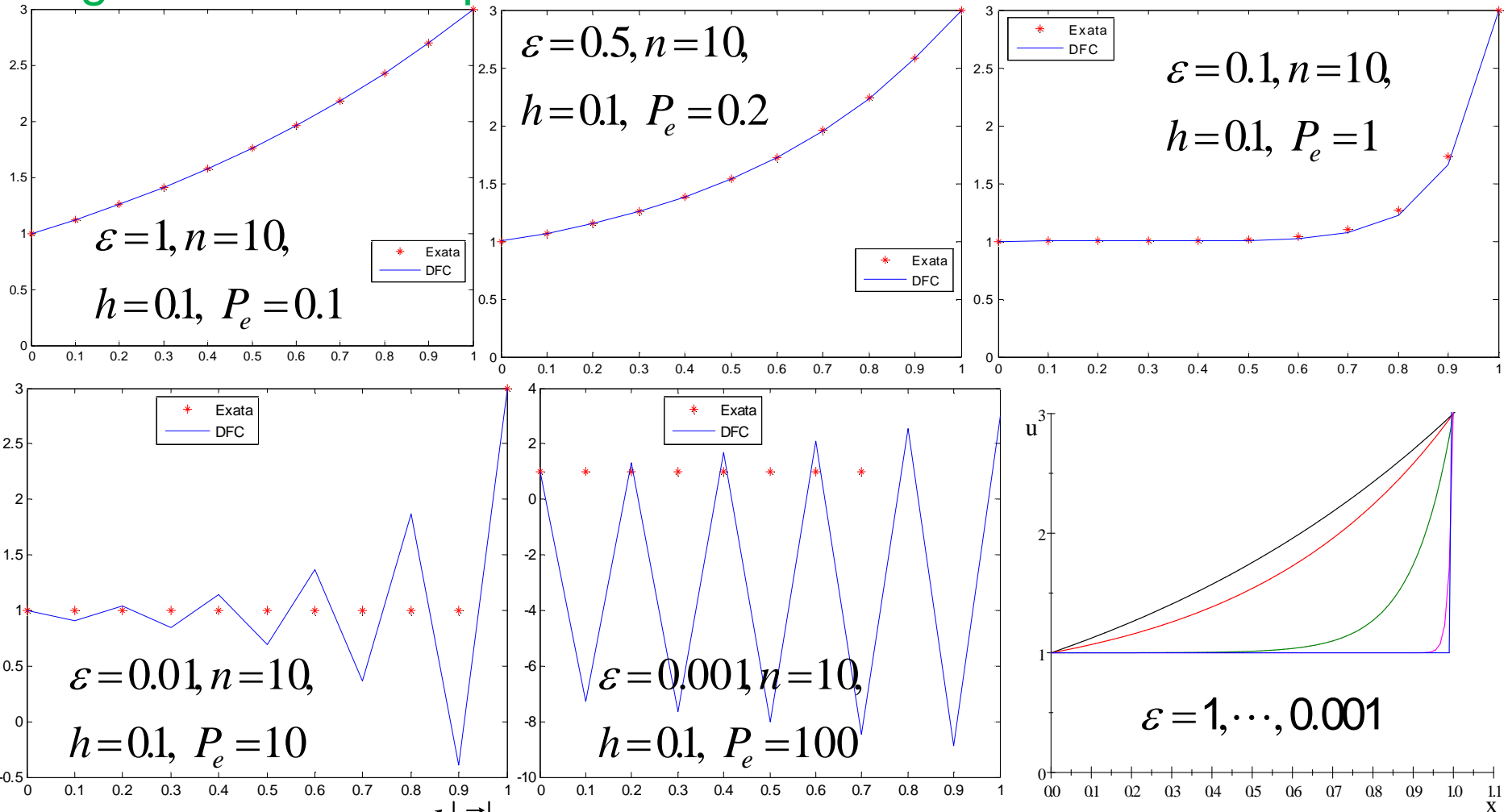
$$\frac{du(x_i)}{dx} \approx D_0(u(x_i)) = \frac{u(x_i + \Delta x) - u(x_i - \Delta x)}{2\Delta x} = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x} \approx \frac{U_{i+1} - U_{i-1}}{2\Delta x}$$

$$\frac{d^2 u(x_i)}{dx^2} \approx D^2(u(x_i)) = \frac{u(x_i + \Delta x) - 2u(x_i) + u(x_i - \Delta x))}{(\Delta x)^2} \approx \frac{U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}}{(\Delta x)^2}$$

Obtemos o seguinte **sistema linear algébrico de equações**

4.3.2- Problema de Valor de Contorno (PVC).

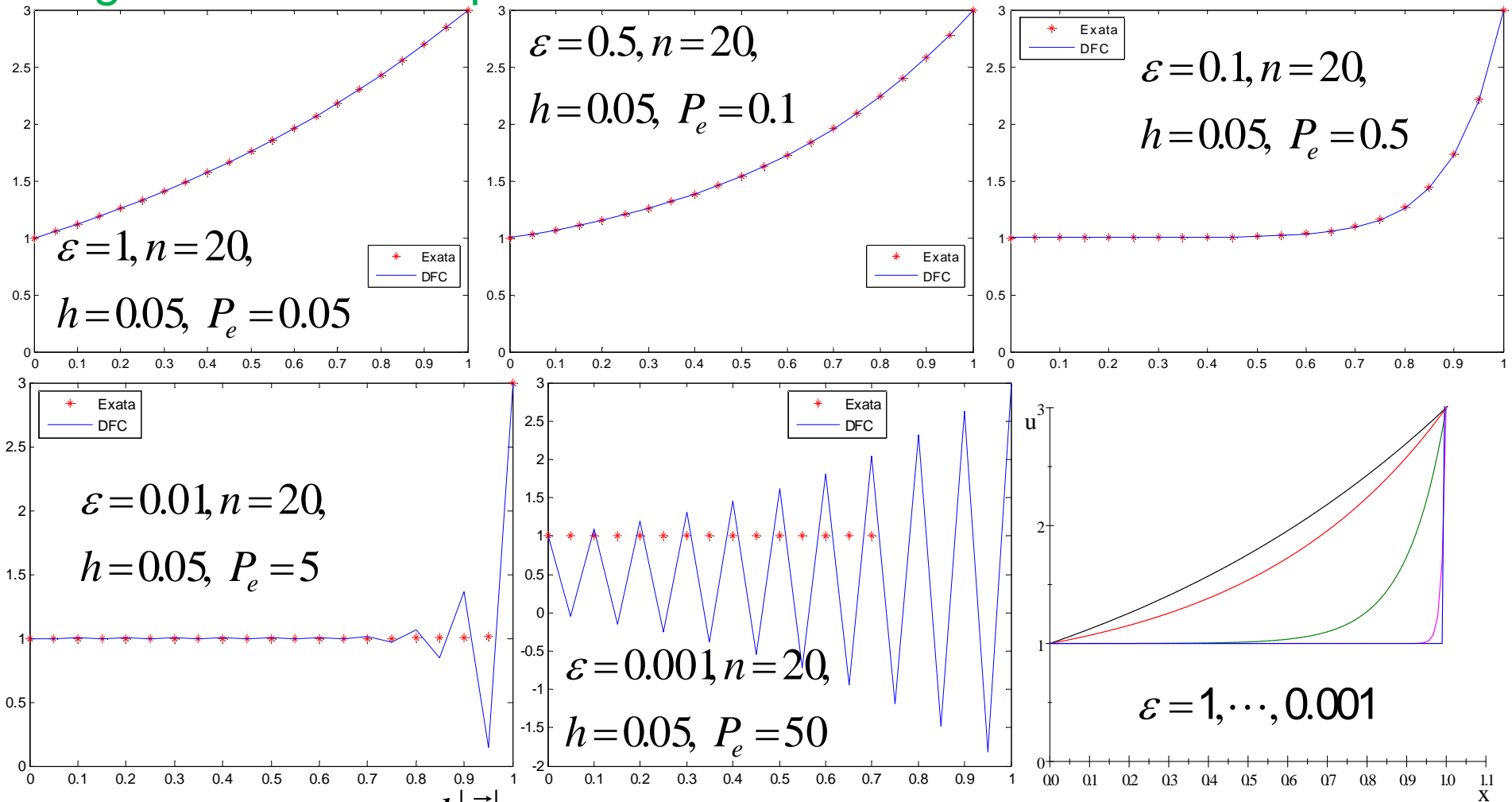
Se resolvemos este PVC com **diferenças finitas centradas** de **segunda ordem de precisão** obtemos:



$$\varepsilon \equiv \frac{k}{|\vec{\omega}|} = \frac{h}{P_e} \quad \text{e} \quad P_e = \frac{h|\vec{\omega}|}{k}$$

4.3.2- Problema de Valor de Contorno (PVC).

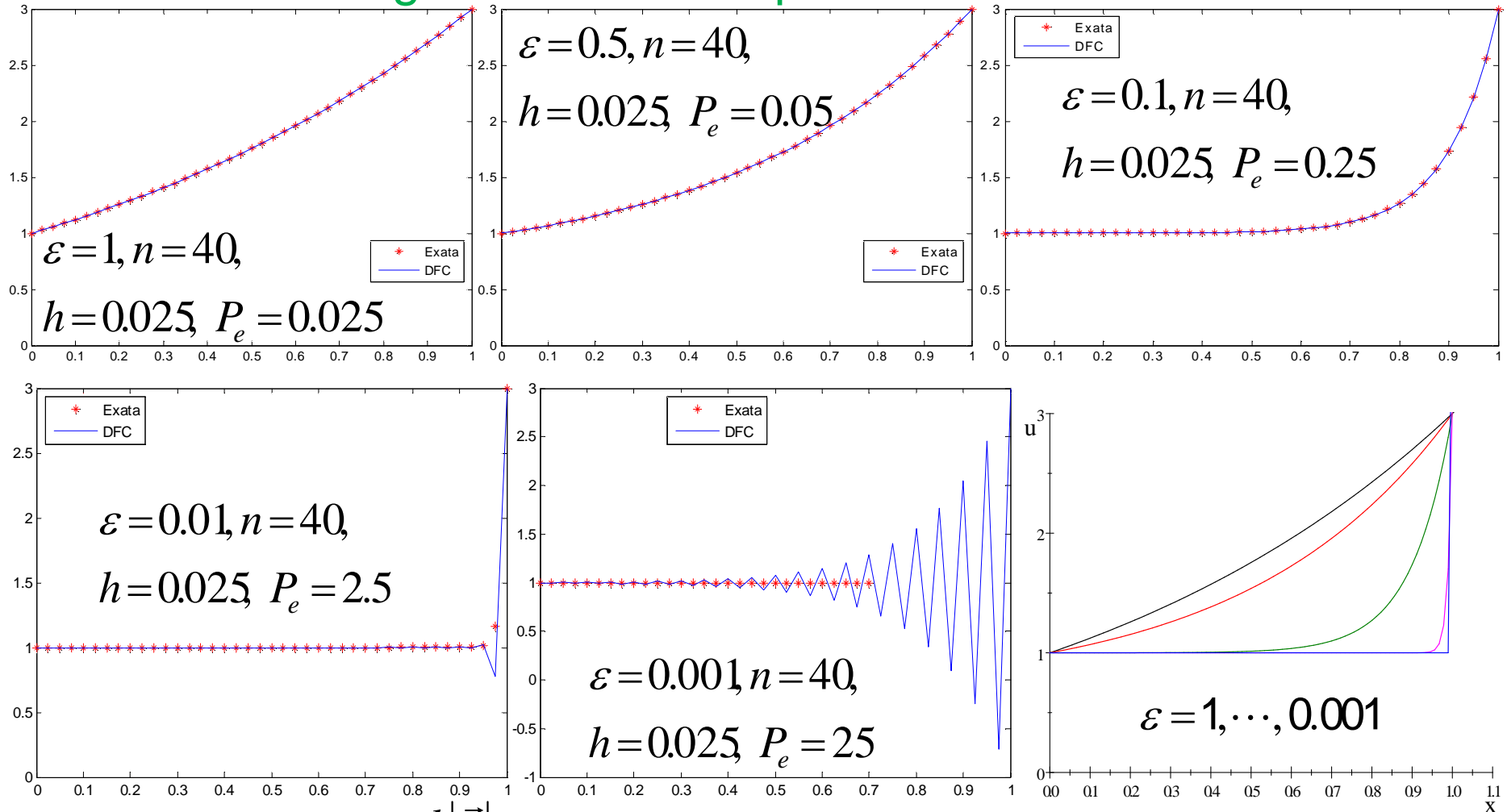
Se refinamos a malha para **diferenças finitas centradas** de **segunda ordem de precisão** obtemos:



$$\varepsilon \equiv \frac{k}{|\vec{\omega}|} = \frac{h}{P_e} \quad \text{e} \quad P_e = \frac{h|\vec{\omega}|}{k}$$

4.3.2- Problema de Valor de Contorno (PVC).

Se refinamos a malha mais ainda para **diferenças finitas centradas** de **segunda ordem de precisão** obtemos:



$$\varepsilon \equiv \frac{k}{|\vec{\omega}|} = \frac{h}{P_e} \quad \text{e} \quad P_e = \frac{h|\vec{\omega}|}{k}$$

4.3.2- Problema de Valor de Contorno (PVC).

Em geral, dizemos que estamos em presença de um **problema singularmente perturbado** quando o **coeficiente da derivada de ordem maior** da EDO **é um parâmetro pequeno** $\varepsilon \ll 1$:

$$\varepsilon \frac{d^n u(x)}{dx^n} + g_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} u(x)}{dx^{n-1}} + \dots + g_1(x) \frac{du(x)}{dx} + g_0(x)u(x) = g_{n+1}(x) \quad \forall x \in]a, b[\quad (\text{EDO})$$

Problemas Singularmente Perturbados apresentam **desafios numéricos** já que a solução pode variar rapidamente num pequeno intervalo (**camadas limites externas** e/ou **internas**). Nestas regiões onde a **derivada é muito grande** o erro para a aproximação **por diferenças finitas centradas** pode ser **muito grande**.

Lembrando que para **diferenças finitas centradas de segunda ordem** o **erro local** é proporcional a $E_L(x) \approx (\Delta x)^2 \frac{d^4 u(x)}{dx^4}$ se Δx não é o suficientemente pequeno, então o erro será grande na região onde existem camadas limites. E mesmo que o **erro local** seja grande apenas nestas regiões o **erro global** pode ser grande.

4.3.2- Problema de Valor de Contorno (PVC).

Para que o erro global recupere a convergência com segunda ordem de precisão é necessário refinar a malha. Na maioria dos casos o refinamento necessário para recuperar as propriedades de convergência exige que se aumente muito os graus de liberdade do problema (número de incógnitas). Isto implica num aumento do custo computacional (memória, tempo de calculo e round-off error).

Refinar quanto a malha?

Refinar a malha até que $\Delta x = h$ permita obter $P_e = \frac{h|\vec{\omega}|}{k} \ll 1 \Rightarrow \varepsilon \gg 1$.

Além das camadas externas a solução do problema pode ter camadas internas.

Atualmente, desenvolver boas aproximações para resolver Problemas Singularmente Perturbados é uns dos temas centrais em matemática aplicada (Técnicas de Estabilização).

4.3.2- Problema de Valor de Contorno (PVC).

Problema 3 . Equação Unidimensional da Difusão-Advecção-Reação Linear e Estacionaria : Considere o fenômeno da distribuição de temperatura num tubo unidimensional por onde escoa um fluido com velocidade $\bar{\omega}$, com coeficiente de difusão do calor $k(x)$ e com coeficiente reativo σ . A equação que descreve matematicamente este fenômeno é:



$$\left. \begin{array}{l} u(a) = u_a, \\ u(b) = u_b. \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Condição} \\ \text{de Dirichlet} \end{array}$$

$$\underbrace{\frac{d}{dx} \left(-k \frac{du(x)}{dx} \right)}_{\text{Difusão}} + \underbrace{\omega \frac{du(x)}{dx}}_{\text{Advecção}} + \underbrace{\sigma u(x)}_{\text{Reação}} = \underbrace{g(x)}_{\text{Fonte Externa}} \quad \forall x \in]a, b[\quad \text{EDO}$$

onde $g(x)$ é a fonte externa de calor e condições de contorno nos extremos de Dirichlet. O termo reativo modela uma fonte ou sumidouro interno de calor devido a alguma reação, por exemplo, química.

4.3.2- Problema de Valor de Contorno (PVC).

Esta equação não modela apenas a transferência de calor unidimensional, linear e estacionária. A **Equação da difusão-advecção-reação** também é conhecida como **Equação de Transporte** e modela o transporte de uma grandeza física. Esta grandeza pode ser, por exemplo, concentração, calor, etc.

$$\underbrace{\frac{d}{dx} \left(-k \frac{du(x)}{dx} \right)}_{\text{Difusão}} + \underbrace{\omega \frac{du(x)}{dx}}_{\text{Advecção}} + \underbrace{\sigma u(x)}_{\text{Reação}} = \underbrace{g(x)}_{\text{Fonte Externa}} \quad \forall x \in]a, b[\quad \text{EDO}$$

Quando $k \gg |\vec{\omega}|$ e $k \gg \sigma$ o **fenômeno difusivo é dominante**. Neste caso o **MDF centrada** de **segunda ordem de precisão** é **ESTÁVEL** e **CONSISTENTE**.

Quando $|\vec{\omega}| \gg k$ e/ou $\sigma \gg k$ a **difusão não é dominante**. Neste caso teremos um **problema singularmente perturbado** e o **MDF centrada** de **segunda ordem de precisão** é **INSTÁVEL**. Para que o **erro global** recupere a **convergência com segunda ordem de precisão** é necessário **refinar a malha**.

Frases do Dia

Although to penetrate into the intimate mysteries of nature and thence to learn the true causes of phenomena is not allowed to us, nevertheless it can happen that a certain fictive hypothesis may suffice for explaining many phenomena. +

Leonhard Euler (A mesma das Aulas 9, 11, 12, 13)

the study of Euler's works will remain the best for different fields of mathematics and nothing else can replace it. +

Friedrich Gauss