

4- Método de Diferenças Finitas Aplicado às Equações Diferenciais Parciais.

4.1- Aproximação de Funções.

4.1.1- Aproximação por Polinômios.

4.1.2- Ajuste de Dados: Mínimos Quadrados.

4.2- Derivadas e Integrais Numéricas.

4.2.1- Aproximação de Derivadas por Diferenças Finitas.

4.2.2- Aproximação de Integrais por Regras de Integração Numérica.

4.3- Solução de Equações Diferenciais Ordinárias.

4.3.1- Problema de Valor Inicial.

4.3.2- Problema de Valor de Contorno.

4.4- Solução de Equações Diferenciais Parciais.

4.4- Solução de Equações Diferenciais Parciais.

Muitos problemas na ciência e na tecnologia podem ser modelados por **equações** que estabelecem uma **relação entre funções desconhecidas** $u(\circ)$ e as derivadas destas funções $\frac{\partial u(\circ)}{\partial(\circ)}$

Equações deste tipo são chamadas **Equações Diferenciais**.

Quando a **função** depende apenas de **uma variável** $u(x)$ a equação diferencial é chamada de **Equação Diferencial Ordinária**, já que apenas podem aparecer as derivadas ordinárias da função $\frac{d^k u(x)}{dx^k}$.

Quando a **função** depende de **mais de uma variável** $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ a equação diferencial é chamada de **Equação Diferencial Parcial**, já que podem aparecer as diferentes derivadas parciais desta função $\frac{\partial^k u}{\partial x_i^{k_i} \dots \partial x_j^{k_j}}$ ($i, j = 1, \dots, n$) e ($k_i + \dots + k_j = k$)

4.4- Solução de Equações Diferenciais Parciais.

No tópico 4.3 estudamos **Equações Diferenciais Ordinárias**. No tópico 4.4 estudaremos **Equações Diferenciais Parciais**.

Algumas **Equações Diferenciais Parciais** podem ser classificadas como: **Elípticas**, **Parabólicas** e **Hiperbólicas**.

Faremos isto para uma **Equação Diferencial Parcial Linear de Segunda Ordem** com duas variáveis independentes:

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial u}{\partial y} + pu = f(x, y) \quad \forall (x, y) \in \Omega$$

A classificação depende do **Sinal do Discriminante** e os nomes são por analogia com as seções cônicas:

$$b^2 - 4ac \begin{cases} < 0 & \text{EDP Elíptica} \\ = 0 & \text{EDP Parabólica} \\ > 0 & \text{EDP Hiperbólica} \end{cases}$$

4.4- Solução de Equações Diferenciais Parciais.

Os três exemplos canônicos mais típicos são:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} = f(x, y) & \left\{ \begin{array}{l} \text{Equação de Poisson} \\ \text{EDP Elíptica} \end{array} \right\} \\ \frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} & \left\{ \begin{array}{l} \text{Equação do Calor} \\ \text{EDP Parabólica} \end{array} \right\} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} & \left\{ \begin{array}{l} \text{Equação da Onda} \\ \text{EDP Hiperbólica} \end{array} \right\} \end{aligned} \quad \left(\underbrace{\nabla^2 u = \nabla \cdot \nabla u = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y}}_{\text{Laplaciano}} \right)$$

Estas EDP descrevem **diferentes tipos de fenômenos** que requerem de **diferentes técnicas para sua solução**, tanto analítica quanto numérica.

Nas três telas a seguir formalizamos EDP Elíptica e Parabólica de 2ª Ordem e Hiperbólica de 1ª Ordem.

4.4- Solução de Equações Diferenciais Parciais.

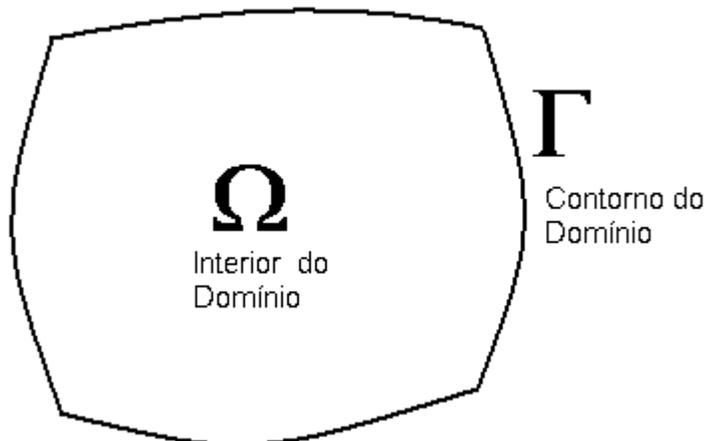
EDP Elíptica Linear de Segunda Ordem : $L(u) = f$ em Ω

$$L = \sum_{i,j=1}^n A_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n B_j \frac{\partial}{\partial x_i} + C, \text{ onde } n \text{ é a dimensão do espaço.}$$

Os coeficientes constantes A_{ij}, B_j, C são reais. A matriz $[A_{ij}]$ é simétrica. O operador L é dito ser elíptico se a matriz $[A_{ij}]$ é definida positiva ou definida negativa. Ou seja, se

$$v^T A v \text{ conserva o sinal } \forall v \in \mathbb{R}^n$$

Num **Problema de Valor de Contorno Elíptico** a solução deve ser determinada impondo restrições para a solução em todo o contorno do domínio (**Condições de Contorno**).



$$L(u) = f \text{ em } \Omega$$

$$u(\Gamma) = u_0 \text{ (Dirichlet)}$$

Para este problema o Método de Diferenças Finitas transforma o PVP num sistema linear espaço de equações algébricas.

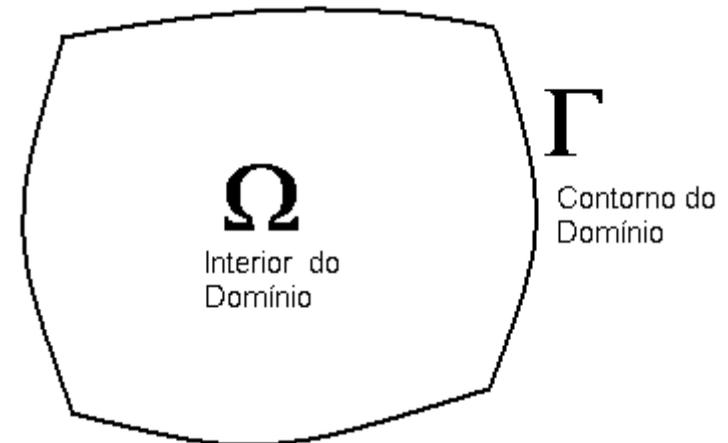
4.4- Solução de Equações Diferenciais Parciais.

EDP Parabólica Linear de Segunda Ordem : Se L é um operador elíptico linear de segunda ordem com matriz $[A_{ij}]$ definida positiva, então a EDP a seguir é parabólica

$$\frac{\partial u}{\partial t} = L(u) - f \quad \text{em } \Omega \text{ e } t > 0 \quad (\text{EDP})$$

$$u(\Gamma, t) = u_1 \quad (\text{Condição de Contorno de Dirichlet})$$

$$u(\Omega, t_0) = u_0 \quad (\text{Condição Inicial})$$



Num **Problema de Valor de Contorno Parabólico** a solução deve ser determinada impondo restrições para a solução em todo o contorno do domínio para cada instante de tempo (**Condições de Contorno**) e a **Condição Inicial** para todos os pontos do interior do domínio.

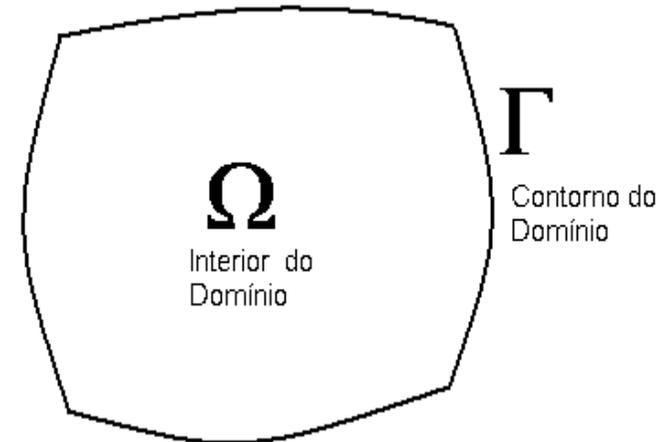
4.4- Solução de Equações Diferenciais Parciais.

EDP Hiperbólica Linear de Primeira Ordem : A EDP a seguir é hiperbólica se a matriz A tem autovalores reais e pode ser diagonalizada. Ou seja, se A tem um conjunto completo de autovetores linearmente independentes.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A \frac{\partial u}{\partial x} \text{ em } \Omega \text{ e } t > 0 \quad (\text{EDP})$$

$$u(\Gamma_+, t) = u_1 \text{ (Condição de Contorno de Dirichlet)}$$

$$u(\Omega, t_0) = u_0 \text{ (Condição Inicial)}$$



Descreve o movimento de ondas e/ou transporte advectivo.

Num **Problema de Valor de Contorno Hiperbólico** a solução deve ser determinada impondo restrições para a solução em parte do contorno do domínio para cada instante de tempo (**Condições de Contorno**) e a **Condição Inicial** para todos os pontos do interior do domínio.

4.4- Solução de Equações Diferenciais Parciais.

No que resta desta aula estudaremos apenas uma **EDP Elíptica Linear de Segunda Ordem**. Para simplificar a exposição estudaremos o caso quando temos **duas variáveis independentes e coeficientes constantes**.

Logo nosso problema será descrito pela EDP:

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial u}{\partial y} + pu = f(x, y) \quad \forall (x, y) \in \Omega$$

onde os coeficientes da EDP verificam $b^2 - 4ac < 0$. Se os coeficientes não são constantes a Condição de ELIPTICIDADE deve ser verificada para todos os pontos do domínio $\forall (x, y) \in \Omega$.

Para que o problema esteja bem posto devemos impor restrições em todos os pontos do contorno do domínio.

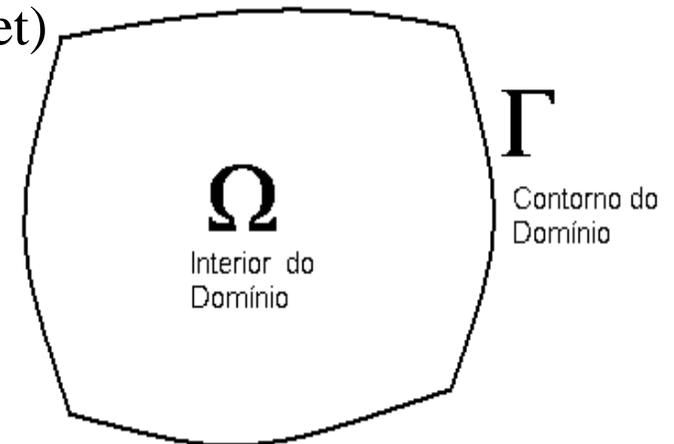
4.4- Solução de Equações Diferenciais Parciais.

A **EDP Elíptica Linear de Segunda Ordem** com duas variáveis independentes e coeficientes constantes $b^2 - 4ac < 0$ é:

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial u}{\partial y} + pu = f(x, y) \quad \forall (x, y) \in \Omega$$

Destacamos dois casos de restrições impostas em todos os pontos do contorno do domínio (**Condições de Contorno - PVC**).

Caso 1 $\{u(x, y) = u_\Gamma \quad \forall (x, y) \in \Gamma$ (CC de Dirichlet)



Caso 2 $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ $\left\{ \begin{array}{l} u(x, y) = u_{\Gamma_1} \quad \forall (x, y) \in \Gamma_1 \quad (\text{CC de Dirichlet}) \\ \vec{n} \cdot \nabla u = q_{\Gamma_2} \quad \forall (x, y) \in \Gamma_2 \quad (\text{CC de Neumann}) \end{array} \right.$
onde \vec{n} é o vetor normal ao contorno

4.4- Solução de Equações Diferenciais Parciais.

Problema 1 . Equação do Calor: Considere uma chapa feita de um material condutor de calor sujeita a alguma fonte externa de calor e condições de contorno no contorno da chapa.

O fenômeno de condução do calor estacionário nesta chapa pode ser modelado pela seguinte equação:

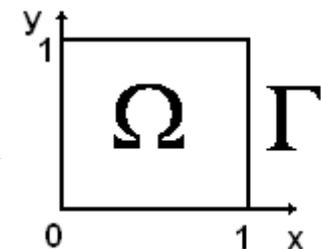
$$\underbrace{\nabla \cdot (-k \nabla u)}_{\text{Difusão}} = \underbrace{g(\mathbf{x})}_{\text{Fonte Externa}} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (\text{EDP})$$

Se o material é homogêneo, então $k(\mathbf{x})$ não depende da posição e a EDP se transforma em:

Exemplo 1 :

$$\underbrace{-k \nabla \cdot \nabla u}_{\text{Difusão}} = \underbrace{g(\mathbf{x})}_{\text{Fonte Externa}} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega =]0, 1[\times]0, 1[\quad (\text{EDP}) \quad \text{ou} \quad \underbrace{-k \nabla^2 u}_{\text{Difusão}} = \underbrace{g(\mathbf{x})}_{\text{Fonte Externa}}$$

$$\text{Caso 1} \quad \{ u(\mathbf{x}) = u_{\Gamma} \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma \quad (\text{CC de Dirichlet})$$



Vamos aproximar o Laplaciano por fórmulas de **Diferenças Finitas Centradas :**

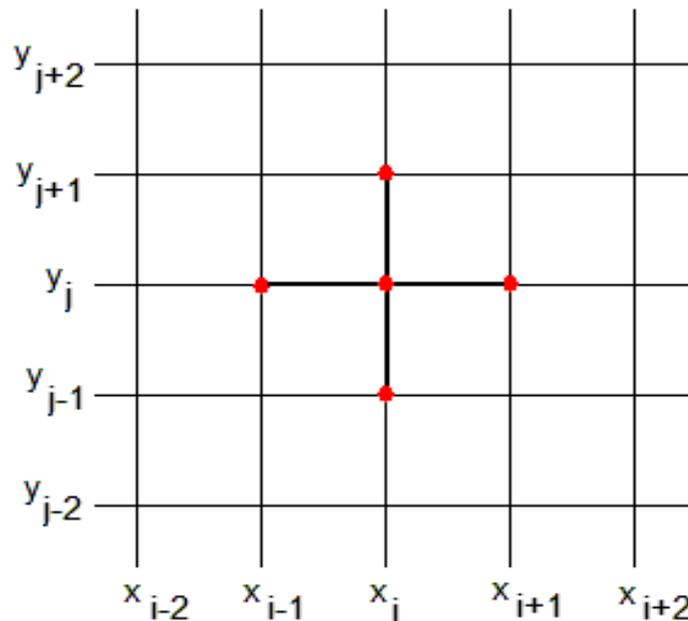
4.4- Solução de Equações Diferenciais Parciais.

Note que o domínio agora é um quadrado unitário e podemos **discretizar o problema** construindo uma **malha** uniforme da seguinte forma:

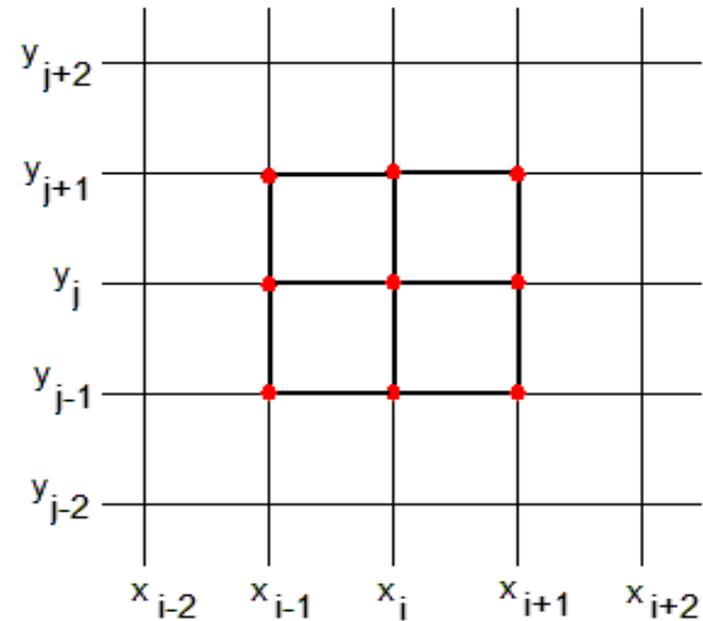
$$x_i = a + i\Delta x, \quad \Delta x = \frac{(b-a)}{n}, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

$$y_j = c + j\Delta y, \quad \Delta y = \frac{(d-c)}{m}, \quad j = 0, 1, \dots, m$$

Abaixo mostramos uma porção (**ESTENCIL-STENCIL**) desta malha:



Estencil de 5 pontos



Estencil de 9 pontos

4.4- Solução de Equações Diferenciais Parciais.

Denotemos por $u_{ij} = u(x_i, y_j)$ a solução exata no nó com coordenadas (x_i, y_j) e seja $U_{ij} \approx u(x_i, y_j)$ a solução aproximada.

Se aproximamos as derivadas segunda pela fórmula de

Diferença Finita Centrada de segunda ordem:

$$\frac{\partial^2 u(x_i, y_j)}{\partial x^2} \approx D^2(u(x_i, y_j)) = \frac{u(x_i + \Delta x, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i - \Delta x, y_j)}{(\Delta x)^2} \approx \frac{U_{i+1,j} - 2U_{ij} + U_{i-1,j}}{(\Delta x)^2}$$

$$\frac{\partial^2 u(x_i, y_j)}{\partial y^2} \approx D^2(u(x_i, y_j)) = \frac{u(x_i, y_j + \Delta y) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_j - \Delta y)}{(\Delta y)^2} \approx \frac{U_{i,j+1} - 2U_{ij} + U_{i,j-1}}{(\Delta y)^2}$$

Então a aproximação pelo **MDF** para a **EDP** anterior consiste em encontrar $U_{ij} \approx u(x_i, y_j)$ que satisfaz

$$-k \left[\underbrace{\frac{U_{i+1,j} - 2U_{ij} + U_{i-1,j}}{(\Delta x)^2}}_{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} + \underbrace{\frac{U_{i,j+1} - 2U_{ij} + U_{i,j-1}}{(\Delta y)^2}}_{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}} \right] = g(x_i, y_j) \begin{cases} \forall 0 < i < n \\ \forall 0 < j < m \end{cases} \quad (\text{EDP})$$

Por simplicidade consideramos $\Delta x = \Delta y \equiv h$ e $m = n$ logo

4.4- Solução de Equações Diferenciais Parciais.

$$-\frac{k}{h^2} [U_{i-1,j} + U_{i,j-1} - 4U_{i,j} + U_{i+1,j} + U_{i,j+1}] = g(x_i, y_j) \begin{cases} \forall 0 < i < n \\ \forall 0 < j < n \end{cases} \quad (\text{EDP})$$

Este esquema de diferenças finitas pode ser representado geometricamente pelo **ESTENCIL de 5 pontos**. Note que para cada nó (ij) da malha temos uma incógnita U_{ij} e uma equação em diferenças (acima). Nas equações para os nós perto do contorno devem ser substituídas as condições de contorno, semelhante ao caso unidimensional.

Como a malha tem n partição por x e n partição por y o número total de incógnitas (graus de liberdade) do sistema linear equações será de $(n-1)^2$.

$$\mathbf{A}_{(n-1)^2 \times (n-1)^2} \mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (\text{Matriz Esparsa})$$

O Sistema para o Problema Unidimensional é de ordem $n-1$ e para o Problema Bidimensional é de ordem $(n-1)^2$. Logo, para o Problema Tridimensional a ordem do sistema será $(n-1)^3$.

4.4- Solução de Equações Diferenciais Parciais.

$$-\frac{k}{h^2} [U_{i-1,j} + U_{i,j-1} - 4U_{ij} + U_{i+1,j} + U_{i,j+1}] = g(x_i, y_j) \quad \begin{cases} \forall 0 < i < n \\ \forall 0 < j < n \end{cases} \quad (\text{EDP})$$

$$-\frac{k}{h^2} [U_{0,1} + U_{1,0} - 4U_{1,1} + U_{2,1} + U_{1,2}] = g(x_1, y_1) \quad \{i = 1, j = 1\}$$

$$-\frac{k}{h^2} [U_{0,2} + U_{1,1} - 4U_{1,2} + U_{2,2} + U_{1,3}] = g(x_1, y_2) \quad \{i = 1, j = 2\}$$

.....

$$-\frac{k}{h^2} [U_{0,n-1} + U_{1,n-2} - 4U_{1,n-1} + U_{2,n-1} + U_{1,n}] = g(x_1, y_{n-1}) \quad \{i = 1, j = n - 1\}$$

$$-\frac{k}{h^2} [U_{1,1} + U_{2,0} - 4U_{2,1} + U_{3,1} + U_{2,2}] = g(x_2, y_1) \quad \{i = 2, j = 1\}$$

.....

$n - 1$ equações para $i = 3, \dots, n - 1$ equações para $i = n - 1$

$$-\frac{k}{h^2} [U_{n-2,n-1} + U_{n-1,n-2} - 4U_{n-1,n-1} + U_{n,n-1} + U_{n-1,n}] = g(x_{n-1}, y_{n-1}) \quad \{i = n - 1, j = n - 1\}$$

Note que a **matriz é esparsa**, ou seja, para **cada linha apenas 5**

4.4- Solução de Equações Diferenciais Parciais.

coeficientes são diferentes de zero. Note também que temos dois sub-índices para determinar a localização de um nó na malha. Ou seja, temos $(n-1)^2$ incógnitas:

$$\{U_{1,1}, U_{1,2}, \dots, U_{1,n-1}\}, \{U_{2,1}, U_{2,2}, \dots, U_{2,n-1}\}, \dots, \{U_{n-1,1}, U_{n-1,2}, \dots, U_{n-1,n-1}\}$$

2 sub-índices $i = 1, \dots, (n-1)$ e $j = 1, \dots, (n-1)$

$$\{U_1, U_2, \dots, U_{(n-1)}\}, \{U_{(n-1)+1}, U_{(n-1)+2}, \dots, U_{(n-1)+(n-1)}\}, \dots, \\ \{U_{(n-2)(n-1)+1}, U_{(n-2)(n-1)+2}, \dots, U_{(n-2)(n-1)+(n-1)}\} \quad 1 \text{ sub-índice } m = 1, \dots, (n-1)(n-1)$$

Isto quer dizer que apenas precisamos de 1 sub-índice para determinar a localização do nó na malha. Ou seja, que devemos construir uma função que faça uma ligação entre os dois sub-índices e a numeração global (1 sub-índice). Destacamos que esta função vai determinar a estrutura da matriz do sistema linear de equações algébricas.

Existem diferentes maneiras de construir a função de ligação. Uma forma muito simples é reordenar a numeração por linhas.

4.4- Solução de Equações Diferenciais Parciais.

Precisão e Estabilidade : Semelhante ao caso 1D $U_{ij} \approx u(x_i, y_j)$

Erro da Solução Aproximada?

1- Erro em cada ponto (x_i, y_j) $e(x_i, y_j) = U_{ij} - u(x_i, y_j)$

2- **Erro Global**: $\mathbf{E}_G = \mathbf{U} - \mathbf{u}$, com $\mathbf{U} = [U_1, \dots, U_{(n-1)^2}]^T$ e $\mathbf{u} = [u_1, \dots, u_{(n-1)^2}]^T$

$$\left. \begin{array}{l} -k \nabla \cdot \nabla u = g(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \\ u(\Gamma) = u_\Gamma, \end{array} \right\} (1) \text{ Aplicando o MDF} \Rightarrow \mathbf{A}_{(n-1)^2 \times (n-1)^2} \mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (2)$$

3- Note que em geral \mathbf{u} não satisfaz (2) e isto define o chamado **Erro Local**

$$\mathbf{E}_L = \mathbf{A}_{(n-1)^2 \times (n-1)^2} \mathbf{u} - \mathbf{F} \Rightarrow \mathbf{A}_{(n-1)^2 \times (n-1)^2} \mathbf{u} = \mathbf{F} + \mathbf{E}_L \quad (3)$$

A componente i do erro local (linha i) é

$$(\mathbf{E}_L)_i = \frac{-k}{h^2} [u_{i-1,j} + u_{i+1,j} - 4u_{ij} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1}] - g_{ij} \quad \forall 0 < i, j < n \quad (\text{EDP})$$

4.4- Solução de Equações Diferenciais Parciais.

Se a solução exata do problema é suave expandindo ela em **serie de Taylor** entorno do ponto (x_i, y_j) . Substituindo na equação anterior esta expansão e a EDP obtemos:

$$(\mathbf{E}_L)_i = -k \left[\frac{1}{12} h^2 \left(\frac{\partial^4 u(x_i, y_j)}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u(x_i, y_j)}{\partial y^4} \right) + O(h^4) \right] \quad \forall 0 < i, j < n \quad (\text{EDP})$$

Ou seja, o erro local é de ordem 2 $(\mathbf{E}_L)_i = C_i h^2$

Podemos estabelecer uma relação entre o **Erro Local** E_L e o **Erro Global** E_G . Para isto faça a diferença entre (2)-(3) e obtemos: $\mathbf{A}_{(n-1)^2 \times (n-1)^2} \underbrace{(\mathbf{U} - \mathbf{u})}_{E_G} = -E_L$ ou $\mathbf{A}_{(n-1)^2 \times (n-1)^2} E_G = -E_L$

Note que este é o mesmo sistema de equações em diferenças obtido para \mathbf{U} exceto que em lugar de \mathbf{F} temos $-E_L$. Para alguma norma o **Erro Global é da mesma ordem que o Local**, indicando que nesta norma o **sistema pode ser estável**

$$\left\| (\mathbf{A}^h)^{-1} \right\| < C \text{ para } h \text{ suficientemente pequeno} \Rightarrow \left\| \mathbf{E}_G^h \right\| \leq C \left\| \mathbf{E}_L^h \right\| = C O(h^2)$$

Frases do Dia

Although to penetrate into the intimate mysteries of nature and thence to learn the true causes of phenomena is not allowed to us, nevertheless it can happen that a certain fictive hypothesis may suffice for explaining many phenomena. +

Leonhard Euler (A mesma das Aulas 9, 11, 12, 13)

the study of Euler's works will remain the best for different fields of mathematics and nothing else can replace it. +

Friedrich Gauss