

4- Método de Diferenças Finitas Aplicado às Equações Diferenciais Parciais.

4.1- Aproximação de Funções.

4.1.1- Aproximação por Polinômios.

4.1.2- Ajuste de Dados: Mínimos Quadrados.

4.2- Derivadas e Integrais Numéricas.

4.2.1- Aproximação de Derivadas por Diferenças Finitas.

4.2.2- Aproximação de Integrais por Regras de Integração Numérica.

4.3- Solução de Equações Diferenciais Ordinárias.

4.3.1- Problema de Valor Inicial.

4.3.2- Problema de Valor de Contorno.

4.4- Solução de Equações Diferenciais Parciais.

4.4- Solução de Equações Diferenciais Parciais.

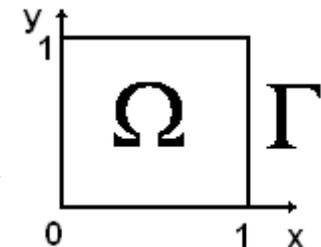
Problema 1 . Equação Bidimensional da Difusão Linear e Estacionária: O fenômeno da difusão estacionária numa chapa pode ser modelado pela seguinte equação:

$$\underbrace{\nabla \cdot (-k \nabla u)}_{\text{Difusão}} = \underbrace{g(\mathbf{x})}_{\text{Fonte Externa}} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (\text{EDP})$$

Se o material é homogêneo, então $k(\mathbf{x})$ não depende da posição e a EDP se transforma em:

Exemplo 1 :

$$\underbrace{-k \nabla \cdot \nabla u}_{\text{Difusão}} = \underbrace{g(\mathbf{x})}_{\text{Fonte Externa}} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega =]0, 1[\times]0, 1[\quad (\text{EDP}) \quad \text{ou} \quad \underbrace{-k \nabla^2 u}_{\text{Difusão}} = \underbrace{g(\mathbf{x})}_{\text{Fonte Externa}}$$



$$\text{Caso 1} \quad \{ u(\mathbf{x}) = u_{\Gamma} \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma \quad (\text{CC de Dirichlet})$$

Este problema não é tão simples e vamos aproximar o Laplaciano por formulas de diferenças finitas centradas:

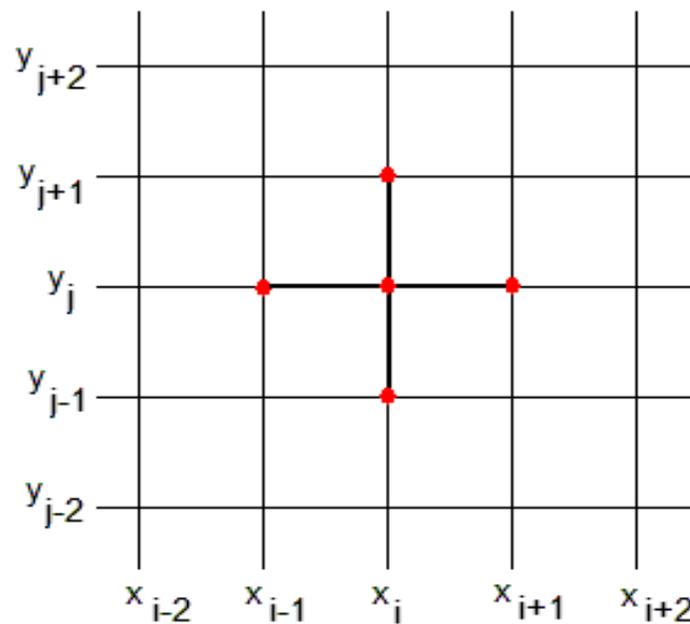
4.4- Solução de Equações Diferenciais Parciais.

Para um domínio quadrado unitário podemos discretizar o problema construindo uma malha uniforme da seguinte forma:

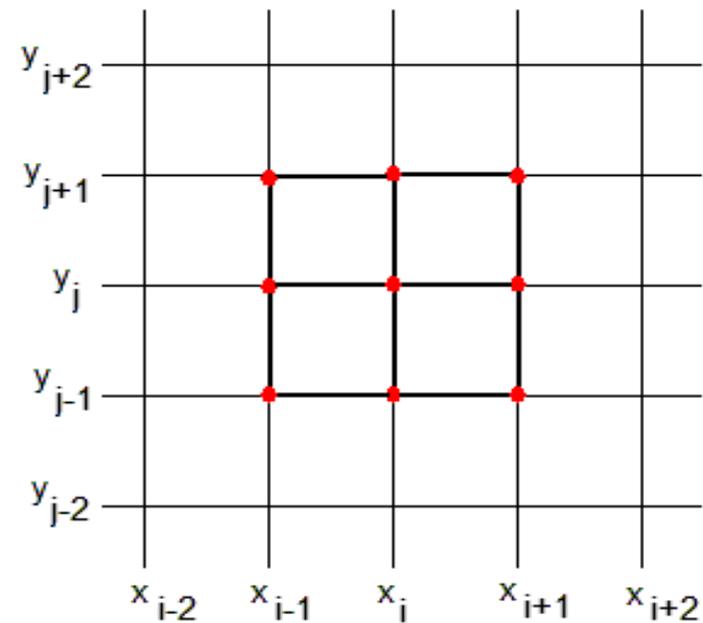
$$x_i = a + i\Delta x, \quad \Delta x = \frac{1}{n}, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

$$y_j = c + j\Delta y, \quad \Delta y = \frac{1}{n}, \quad j = 0, 1, \dots, n$$

Abaixo mostramos uma porção (ESTENCIL-STENCIL) desta malha:



Estencil de 5 pontos



Estencil de 9 pontos

4.4- Solução de Equações Diferenciais Parciais.

Denotemos por $u_{ij} = u(x_i, y_j)$ a solução exata no nó com coordenadas (x_i, y_j) e seja $U_{ij} \approx u(x_i, y_j)$ a solução aproximada. Se aproximamos as derivadas segunda pela fórmula de diferença centrada de segunda ordem de precisão:

$$\frac{\partial^2 u(x_i, y_j)}{\partial x^2} \approx D^2(u(x_i, y_j)) = \frac{u(x_i + \Delta x, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i - \Delta x, y_j)}{(\Delta x)^2} \approx \frac{U_{i+1,j} - 2U_{ij} + U_{i-1,j}}{(\Delta x)^2}$$

$$\frac{\partial^2 u(x_i, y_j)}{\partial y^2} \approx D^2(u(x_i, y_j)) = \frac{u(x_i, y_j + \Delta y) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_j - \Delta y)}{(\Delta y)^2} \approx \frac{U_{i,j+1} - 2U_{ij} + U_{i,j-1}}{(\Delta y)^2}$$

Então a aproximação pelo **MDF** para a **EDP** anterior consiste em encontrar $U_{ij} \approx u(x_i, y_j)$ que satisfaz

$$-k \left[\underbrace{\frac{U_{i+1,j} - 2U_{ij} + U_{i-1,j}}{(\Delta x)^2}}_{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} + \underbrace{\frac{U_{i,j+1} - 2U_{ij} + U_{i,j-1}}{(\Delta y)^2}}_{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}} \right] = g(x_i, y_j) \begin{cases} \forall 0 < i < n \\ \forall 0 < j < m \end{cases} \quad (\text{EDP})$$

Por simplicidade consideramos $\Delta x = \Delta y \equiv h$ logo

4.4- Solução de Equações Diferenciais Parciais.

$$-\frac{k}{h^2} [U_{i-1,j} + U_{i,j-1} - 4U_{i,j} + U_{i+1,j} + U_{i,j+1}] = g(x_i, y_j) \begin{cases} \forall 0 < i < n \\ \forall 0 < j < n \end{cases} \quad (\text{EDP})$$

Este esquema de diferenças finitas pode ser representado geometricamente pelo **ESTENCIL de 5 pontos**. Note que para cada nó (ij) da malha temos uma incógnita U_{ij} e uma equação em diferenças (acima). Nas equações para os nós perto do contorno devem ser substituídas as condições de contorno, semelhante ao caso unidimensional.

Como a malha tem n partição por x e n partição por y o número total de incógnitas (graus de liberdade) do sistema linear equações será de $(n-1)^2$.

$$\mathbf{A}_{(n-1)^2 \times (n-1)^2} \mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (\text{Matriz Esparsa})$$

O Sistema para o Problema Unidimensional é de ordem $n-1$ e para o Problema Bidimensional é de ordem $(n-1)^2$. Logo, para o Problema Tridimensional a ordem do sistema será $(n-1)^3$.

4.4- Solução de Equações Diferenciais Parciais.

$$-\frac{k}{h^2} [U_{i-1,j} + U_{i,j-1} - 4U_{ij} + U_{i+1,j} + U_{i,j+1}] = g(x_i, y_j) \quad \begin{cases} \forall 0 < i < n \\ \forall 0 < j < n \end{cases} \quad \text{(EDP)}$$

$$-\frac{k}{h^2} [U_{0,1} + U_{1,0} - 4U_{1,1} + U_{2,1} + U_{1,2}] = g(x_1, y_1) \quad \{i = 1, j = 1\}$$

$$-\frac{k}{h^2} [U_{0,2} + U_{1,1} - 4U_{1,2} + U_{2,2} + U_{1,3}] = g(x_1, y_2) \quad \{i = 1, j = 2\}$$

.....

$$-\frac{k}{h^2} [U_{0,n-1} + U_{1,n-2} - 4U_{1,n-1} + U_{2,n-1} + U_{1,n}] = g(x_1, y_{n-1}) \quad \{i = 1, j = n - 1\}$$

$$-\frac{k}{h^2} [U_{1,1} + U_{2,0} - 4U_{2,1} + U_{3,1} + U_{2,2}] = g(x_2, y_1) \quad \{i = 2, j = 1\}$$

.....

$n - 1$ equações para $i = 3, \dots, n - 1$ equações para $i = n - 1$

$$-\frac{k}{h^2} [U_{n-2,n-1} + U_{n-1,n-2} - 4U_{n-1,n-1} + U_{n,n-1} + U_{n-1,n}] = g(x_{n-1}, y_{n-1}) \quad \{i = n - 1, j = n - 1\}$$

Note que a **matriz é esparsa**, ou seja, para **cada linha apenas 5**

4.4- Solução de Equações Diferenciais Parciais.

coeficientes são diferentes de zero. Note também que temos dois sub-índices para determinar a localização de um nó na malha. Ou seja, temos $(n-1)^2$ incógnitas:

$$\{U_{1,1}, U_{1,2}, \dots, U_{1,n-1}\}, \{U_{2,1}, U_{2,2}, \dots, U_{2,n-1}\}, \dots, \{U_{n-1,1}, U_{n-1,2}, \dots, U_{n-1,n-1}\}$$

2 sub-índices $i = 1, \dots, (n-1)$ e $j = 1, \dots, (n-1)$

$$\{U_1, U_2, \dots, U_{(n-1)}\}, \{U_{(n-1)+1}, U_{(n-1)+2}, \dots, U_{(n-1)+(n-1)}\}, \dots,$$

$$\{U_{(n-2)(n-1)+1}, U_{(n-2)(n-1)+2}, \dots, U_{(n-2)(n-1)+(n-1)}\} \quad 1 \text{ sub-índice } m = 1, \dots, (n-1)(n-1)$$

Isto quer dizer que apenas precisamos de 1 sub-índice para determinar a localização do nó na malha. Ou seja, que devemos construir uma função que faça uma ligação entre os dois sub-índices e a numeração global (1 sub-índice). Destacamos que esta função vai determinar a estrutura da matriz do sistema linear de equações algébricas.

Existem diferentes maneiras de construir a função de ligação. Uma forma muito simples é reordenar a numeração por linhas.

4.4- Solução de Equações Diferenciais Parciais.

Precisão e Estabilidade : Semelhante ao caso 1D $U_{ij} \approx u(x_i, y_j)$

Erro da Solução Aproximada?

1- Erro em cada ponto (x_i, y_j) $e(x_i, y_j) = U_{ij} - u(x_i, y_j)$

2- **Erro Global**: $\mathbf{E}_G = \mathbf{U} - \mathbf{u}$, com $\mathbf{U} = [U_1, \dots, U_{(n-1)^2}]^T$ e $\mathbf{u} = [u_1, \dots, u_{(n-1)^2}]^T$

$$\left. \begin{array}{l} -k \nabla \cdot \nabla u = g(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \\ u(\Gamma) = u_\Gamma, \end{array} \right\} (1) \text{ Aplicando o MDF} \Rightarrow \mathbf{A}_{(n-1)^2 \times (n-1)^2} \mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (2)$$

3- Note que em geral \mathbf{u} não satisfaz (2) e isto define o chamado **Erro Local**

$$\mathbf{E}_L = \mathbf{A}_{(n-1)^2 \times (n-1)^2} \mathbf{u} - \mathbf{F} \Rightarrow \mathbf{A}_{(n-1)^2 \times (n-1)^2} \mathbf{u} = \mathbf{F} + \mathbf{E}_L \quad (3)$$

A componente i do erro local (linha i) é

$$(\mathbf{E}_L)_i = \frac{-k}{h^2} [u_{i-1,j} + u_{i+1,j} - 4u_{ij} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1}] - g_{ij} \quad \forall 0 < i, j < n \quad (\text{EDP})$$

4.4- Solução de Equações Diferenciais Parciais.

Se a solução exata do problema é suave expandindo ela em **serie de Taylor** entorno do ponto (x_i, y_j) . Substituindo na equação anterior esta expansão e a EDP obtemos:

$$(\mathbf{E}_L)_i = -k \left[\frac{1}{12} h^2 \left(\frac{\partial^4 u(x_i, y_j)}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u(x_i, y_j)}{\partial y^4} \right) + O(h^4) \right] \quad \forall 0 < i, j < n \quad (\text{EDP})$$

Ou seja, o erro local é de ordem 2 $(\mathbf{E}_L)_i = C_i h^2$

Podemos estabelecer uma relação entre o **Erro Local** E_L e o **Erro Global** E_G . Para isto faça a diferença entre (2)-(3) e obtemos: $\mathbf{A}_{(n-1)^2 \times (n-1)^2} \underbrace{(\mathbf{U} - \mathbf{u})}_{E_G} = -E_L$ ou $\mathbf{A}_{(n-1)^2 \times (n-1)^2} E_G = -E_L$

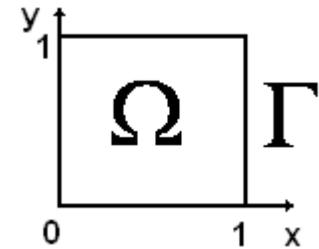
Note que este é o mesmo sistema de equações em diferenças obtido para \mathbf{U} exceto que em lugar de \mathbf{F} temos $-E_L$. Para alguma norma o **Erro Global é da mesma ordem que o Local**, indicando que nesta norma o **sistema pode ser estável**

$$\left\| (\mathbf{A}^h)^{-1} \right\| < C \text{ para } h \text{ suficientemente pequeno} \Rightarrow \left\| \mathbf{E}_G^h \right\| \leq C \left\| \mathbf{E}_L^h \right\| = C O(h^2)$$

4.4- Solução de Equações Diferenciais Parciais.

Exemplo 1: Problema puramente difusivo. Vamos aproximar o Laplaciano por formulas de diferenças finitas centradas de segunda ordem (Estencil de 5 pontos):

$$\underbrace{-k\nabla \cdot \nabla u}_{\text{Difusão}} = \underbrace{0}_{\text{Fonte Externa}} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega =]0,1[\times]0,1[\quad (\text{EDP}) \quad \text{ou} \quad \underbrace{-k\nabla^2 u}_{\text{Difusão}} = \underbrace{0}_{\text{Fonte Externa}}$$



$$\text{Caso 1} \begin{cases} u(x,0) = x \quad \forall x \in]0,1[\quad (\text{CC de Dirichlet}) \\ u(x,1) = x \quad \forall x \in]0,1[\quad (\text{CC de Dirichlet}) \\ u(0,y) = 0 \quad \forall y \in]0,1[\quad (\text{CC de Dirichlet}) \\ u(1,y) = 1 \quad \forall y \in]0,1[\quad (\text{CC de Dirichlet}) \end{cases}$$

Este problema tem como solução exata $u(x, y) = x$.

$$\text{O Erro Local } \mathbf{E}_L = \mathbf{A}_{(n-1)^2 \times (n-1)^2} \mathbf{u} - \mathbf{F} \Rightarrow \mathbf{A}_{(n-1)^2 \times (n-1)^2} \mathbf{u} = \mathbf{F} + \mathbf{E}_L \quad (3)$$

Com componente para cada linha i

$$(\mathbf{E}_L)_i = \frac{-k}{h^2} [u_{i-1,j} + u_{i+1,j} - 4u_{ij} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1}] - g_{ij} \quad \forall 0 < i, j < n \quad (\text{EDP})$$

4.4- Solução de Equações Diferenciais Parciais.

Expandindo em **Serie de Taylor** obtemos para cada linha i

$$(\mathbf{E}_L)_i = -k \left[\frac{1}{12} h^2 \left(\frac{\partial^4 u(x_i, y_j)}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u(x_i, y_j)}{\partial y^4} \right) + O(h^4) \right] \quad \forall 0 < i, j < n \quad (\text{EDP})$$

Já que $\frac{\partial^4 u(x_i, y_j)}{\partial x^4} = 0$ e $\frac{\partial^4 u(x_i, y_j)}{\partial y^4} = 0$ segue que

$$(\mathbf{E}_L)_i \approx -k \left[\frac{1}{12} h^2 \left(\frac{\partial^4 u(x_i, y_j)}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u(x_i, y_j)}{\partial y^4} \right) + O(h^4) \right] = 0 \quad \forall 0 < i, j < n$$

Erro Global: $\mathbf{E}_G = \mathbf{U} - \mathbf{u}$, onde $\mathbf{U} = [U_0, \dots, U_{(n-1)^2}]^T$ e $\mathbf{u} = [u_0, \dots, u_{(n-1)^2}]^T$

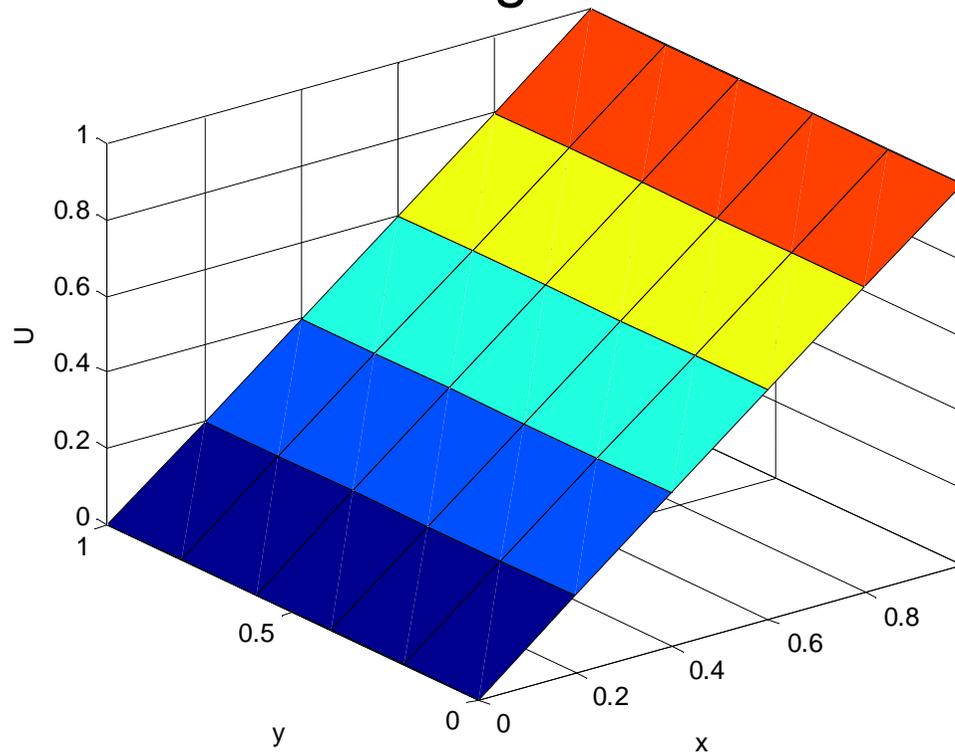
$$\mathbf{A}_{(n-1)^2 \times (n-1)^2} \mathbf{E}_G = -\mathbf{E}_L \Rightarrow \mathbf{A}_{(n-1)^2 \times (n-1)^2} \mathbf{E}_G = 0 \Rightarrow \mathbf{E}_G = 0$$

Ou seja, o **Erro Global** também é zero para este exemplo.

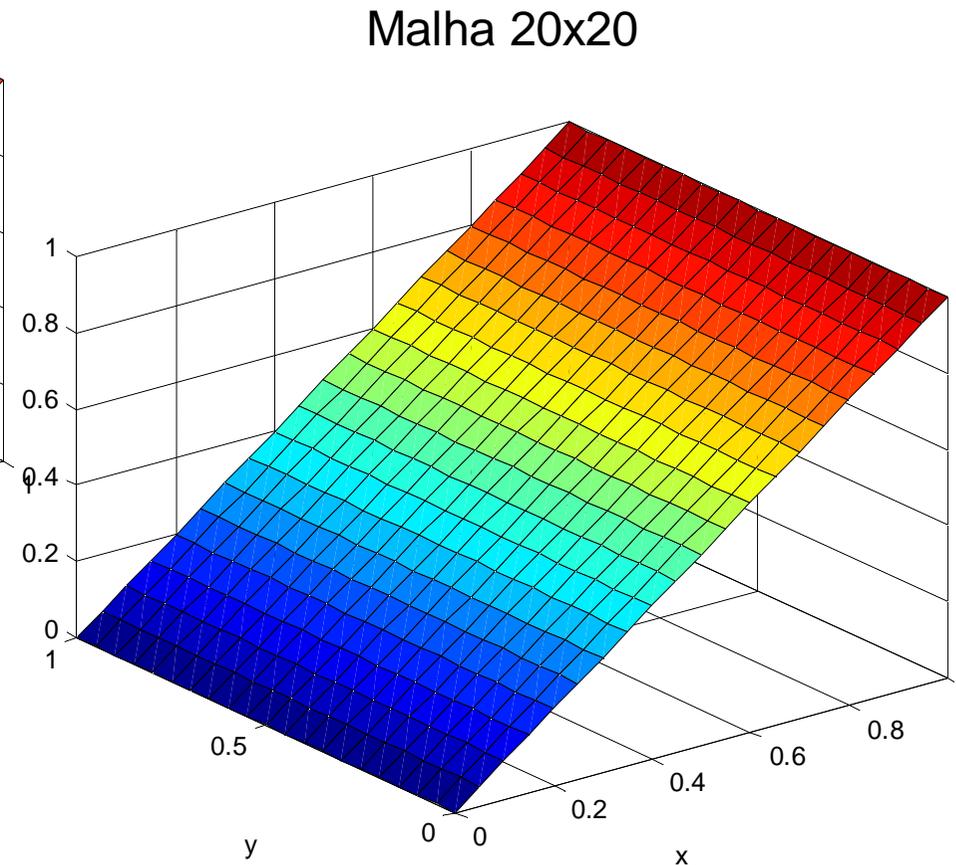
Isto pode ser observado nos resultados numéricos mostrados a seguir para duas malhas 5x5 e 20x20.

4.4- Solução de Equações Diferenciais Parciais.

Exemplo 1: Soluções numéricas para a malha 5x5 (esquerda) 20x20 (direita). Note que para este exemplo o **Erro Local** e **Global** é zero. Ou seja, a solução aproximada pelo MDF centradas de segunda ordem de precisão é o interpolante.



Malha 5x5

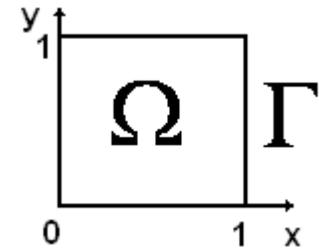


Malha 20x20

4.4- Solução de Equações Diferenciais Parciais.

Exemplo 1.1: Problema puramente difusivo. Vamos aproximar o Laplaciano por formulas de diferenças finitas centradas de segunda ordem (Estencil de 5 pontos):

$$\underbrace{-k\nabla \cdot \nabla u}_{\text{Difusão}} = \underbrace{0}_{\text{Fonte Externa}} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega =]0,1[\times]0,1[\quad (\text{EDP}) \quad \text{ou} \quad \underbrace{-k\nabla^2 u}_{\text{Difusão}} = \underbrace{0}_{\text{Fonte Externa}}$$



$$\text{Caso 1} \quad \begin{cases} u(x, 0) = 0 & \forall x \in]0,1[\quad (\text{CC de Dirichlet diferente do exemplo 1}) \\ u(x, 1) = 0 & \forall x \in]0,1[\quad (\text{CC de Dirichlet diferente do exemplo 1}) \\ u(0, y) = 0 & \forall y \in]0,1[\quad (\text{CC de Dirichlet}) \\ u(1, y) = 1 & \forall y \in]0,1[\quad (\text{CC de Dirichlet}) \end{cases}$$

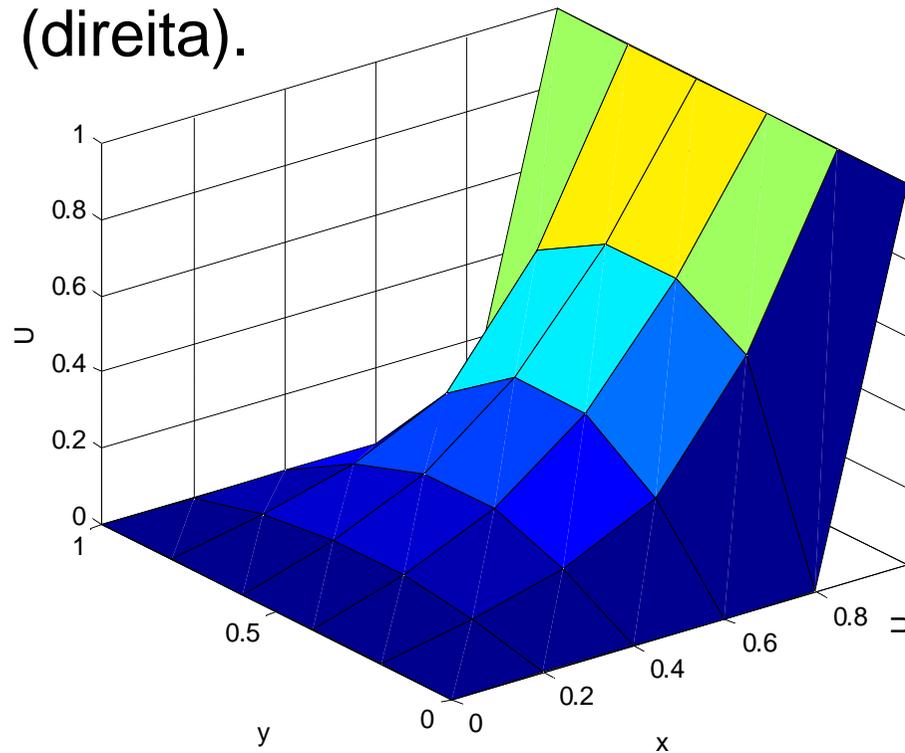
A diferença entre este exemplo e o exemplo 1 está em duas condições de contorno que são diferentes. Neste exemplo a solução exata é outra (desconhecida).

Novamente o **Erro Local** é

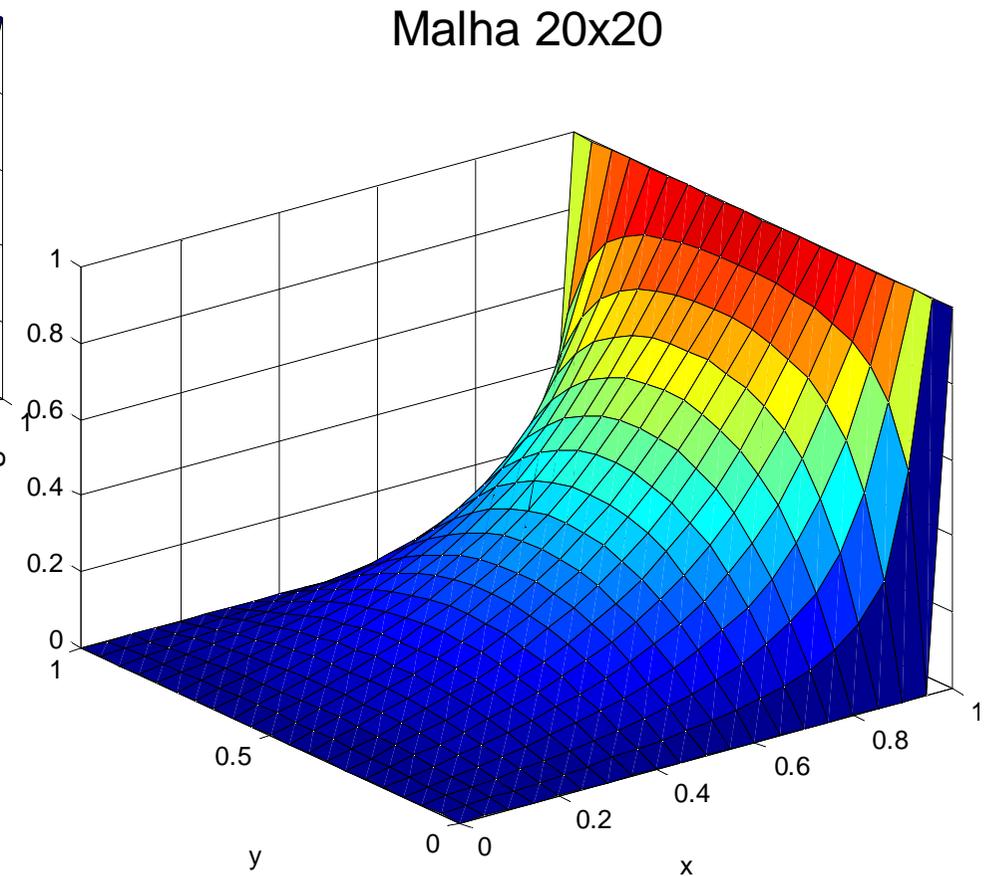
$$(\mathbf{E}_L)_i = -k \left[\frac{1}{12} h^2 \left(\frac{\partial^4 u(x_i, y_j)}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u(x_i, y_j)}{\partial y^4} \right) + O(h^4) \right] \quad \forall 0 < i, j < n \quad (\text{EDP})$$

4.4- Solução de Equações Diferenciais Parciais.

Como o **MDF centradas** é **Estável** e **Consistente** para este exemplo o **Erro Global** é da mesma ordem do **Erro Local**. Soluções numéricas para a malha 5x5 (esquerda) 20x20 (direita).



Malha 5x5

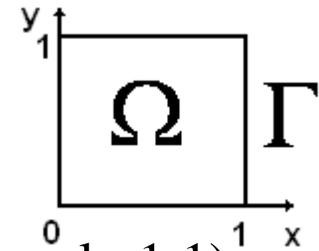


Malha 20x20

4.4- Solução de Equações Diferenciais Parciais.

Exemplo 1.2: Problema puramente difusivo. Vamos aproximar o Laplaciano por formulas de diferenças finitas centradas de segunda ordem (Estencil de 5 pontos):

$$\underbrace{-k\nabla \cdot \nabla u}_{\text{Difusão}} = \underbrace{0}_{\text{Fonte Externa}} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega =]0,1[\times]0,1[\quad (\text{EDP}) \quad \text{ou} \quad \underbrace{-k\nabla^2 u}_{\text{Difusão}} = \underbrace{0}_{\text{Fonte Externa}}$$



$$\text{Caso 1} \quad \left\{ \begin{array}{l} u(x, 0) = 1 \quad \forall x \in]0,1[\quad (\text{CC de Dirichlet diferente do exemplo 1.1}) \\ u(x, 1) = 0 \quad \forall x \in]0,1[\quad (\text{CC de Dirichlet}) \\ u(0, y) = 0 \quad \forall y \in]0,1[\quad (\text{CC de Dirichlet}) \\ u(1, y) = 1 \quad \forall y \in]0,1[\quad (\text{CC de Dirichlet}) \end{array} \right.$$

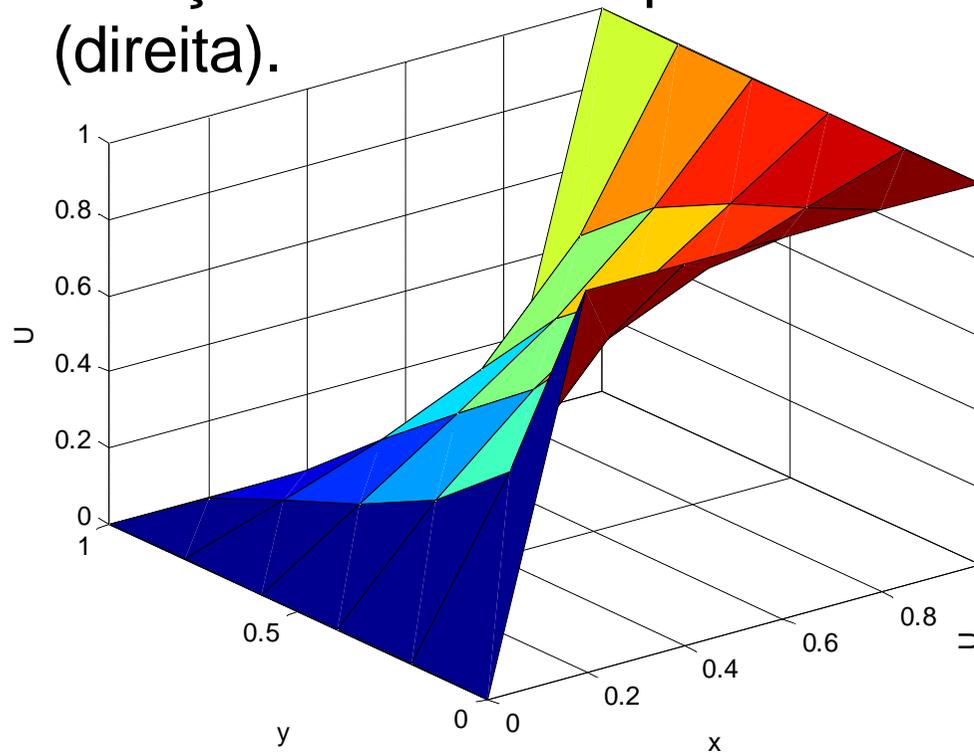
A diferença entre este exemplo e o exemplo 1.1 está em uma condição de contorno que é diferente. Neste exemplo a solução exata é outra (desconhecida).

Novamente o **Erro Local** é

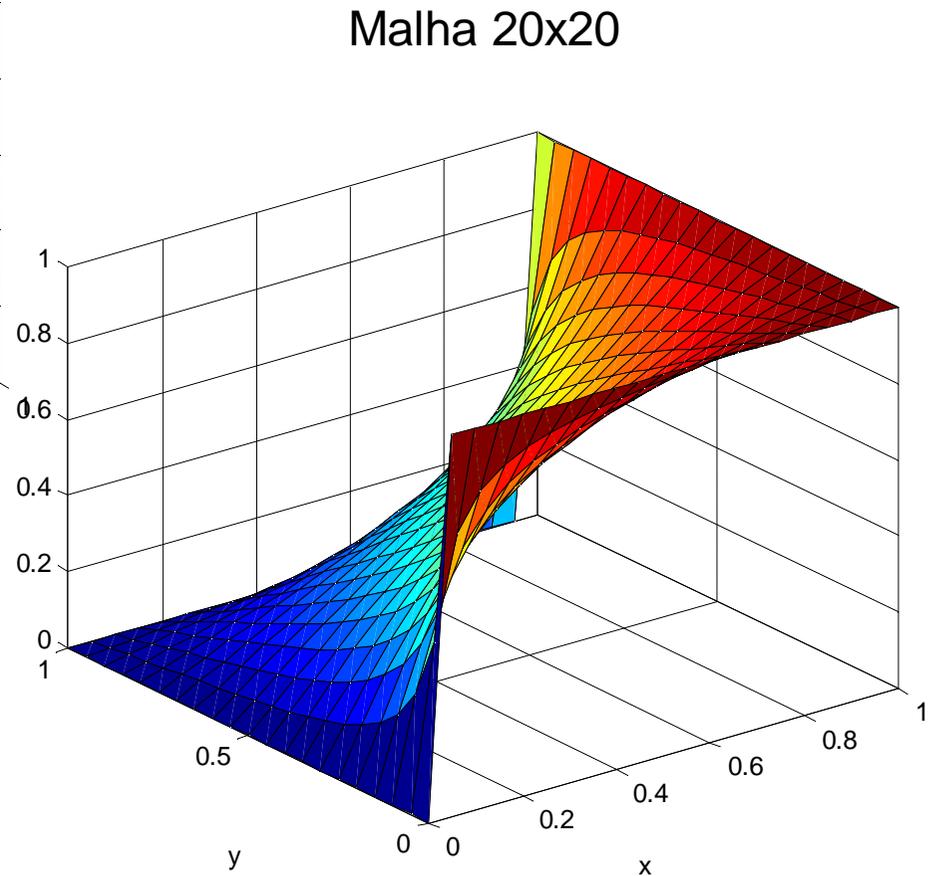
$$(\mathbf{E}_L)_i = -k \left[\frac{1}{12} h^2 \left(\frac{\partial^4 u(x_i, y_j)}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u(x_i, y_j)}{\partial y^4} \right) + O(h^4) \right] \quad \forall 0 < i, j < n \quad (\text{EDP})$$

4.4- Solução de Equações Diferenciais Parciais.

Como o **MDF centradas** é **Estável** e **Consistente** para este exemplo o **Erro Global** é da mesma ordem do **Erro Local**. Soluções numéricas para a malha 5x5 (esquerda) 20x20 (direita).



Malha 5x5



Malha 20x20

4.4- Solução de Equações Diferenciais Parciais.

Problema 2 . Equação Bidimensional da Difusão-Advecção Linear e Estacionaria : Considere um fenômeno modelado pela seguinte EDP:

$$\underbrace{\nabla \cdot (-k \nabla u)}_{\text{Difusão}} + \underbrace{\vec{\omega} \cdot \nabla u}_{\text{Advecção}} = \underbrace{g(\mathbf{x})}_{\text{Fonte Externa}} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (\text{EDP})$$

Se o material é homogêneo, então $k(\mathbf{x})$ não depende da posição e a EDP se transforma em:

$$\underbrace{-k \nabla^2 u}_{\text{Difusão}} + \underbrace{\vec{\omega} \cdot \nabla u}_{\text{Advecção}} = \underbrace{g(\mathbf{x})}_{\text{Fonte Externa}} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (\text{EDP})$$

O **Laplaciano** será aproximado por formulas de **diferenças finitas centradas** de segunda ordem de precisão:

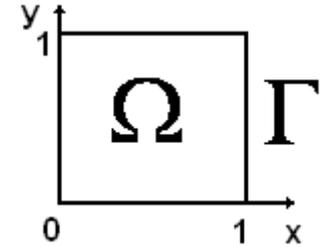
$$\frac{\partial^2 u(x_i, y_j)}{\partial x^2} \approx D^2(u(x_i, y_j)) = \frac{u(x_i + \Delta x, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i - \Delta x, y_j)}{(\Delta x)^2} \approx \frac{U_{i+1,j} - 2U_{ij} + U_{i-1,j}}{(\Delta x)^2}$$

$$\frac{\partial^2 u(x_i, y_j)}{\partial y^2} \approx D^2(u(x_i, y_j)) = \frac{u(x_i, y_j + \Delta y) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_j - \Delta y)}{(\Delta y)^2} \approx \frac{U_{i,j+1} - 2U_{ij} + U_{i,j-1}}{(\Delta y)^2}$$

4.4- Solução de Equações Diferenciais Parciais.

Exemplo 2: Considere o seguinte PVC:

$$\underbrace{-k\nabla^2 u}_{\text{Difusão}} + \underbrace{\vec{\omega} \cdot \nabla u}_{\text{Advecção}} = \underbrace{g(\mathbf{x})}_{\text{Fonte Externa}} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega =]0,1[\times]0,1[\quad (\text{EDP})$$



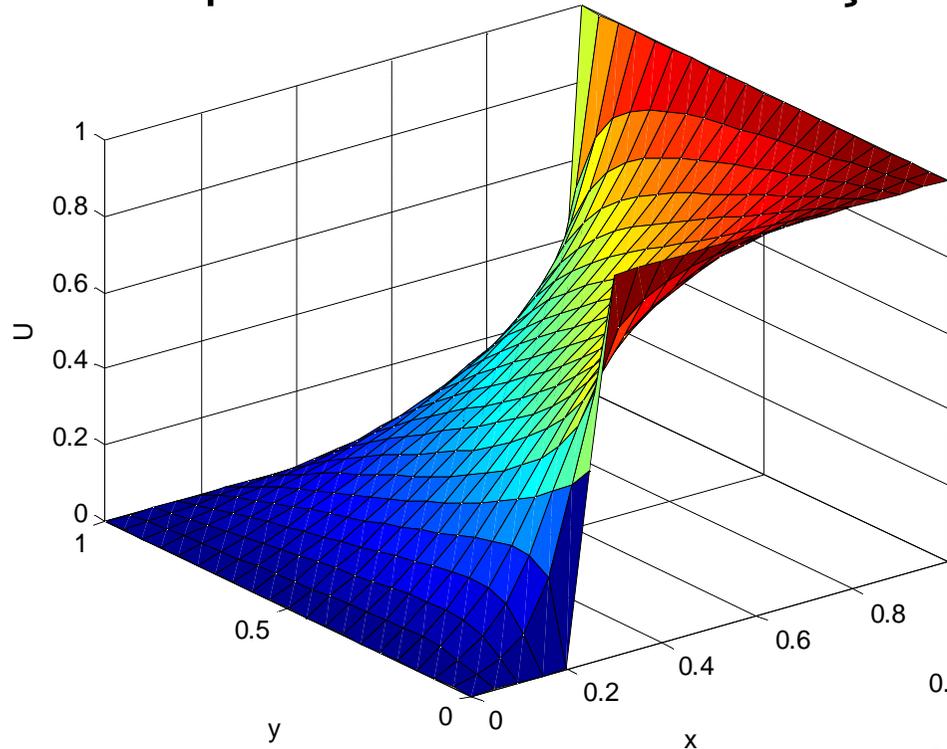
Caso 1

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x, 0) = 0 \quad \forall x \in]0, 0.2[\\ u(x, 0) = 10(x - 0.2) \quad \forall x \in [0.2, 0.3] \quad (\text{CC de Dirichlet}) \\ u(x, 0) = 1 \quad \forall x \in]0.3, 1[\\ u(x, 1) = 0 \quad \forall x \in]0, 1[\quad (\text{CC de Dirichlet}) \\ u(0, y) = 0 \quad \forall y \in]0, 1[\quad (\text{CC de Dirichlet}) \\ u(1, y) = 1 \quad \forall y \in]0, 1[\quad (\text{CC de Dirichlet}) \end{array} \right.$$

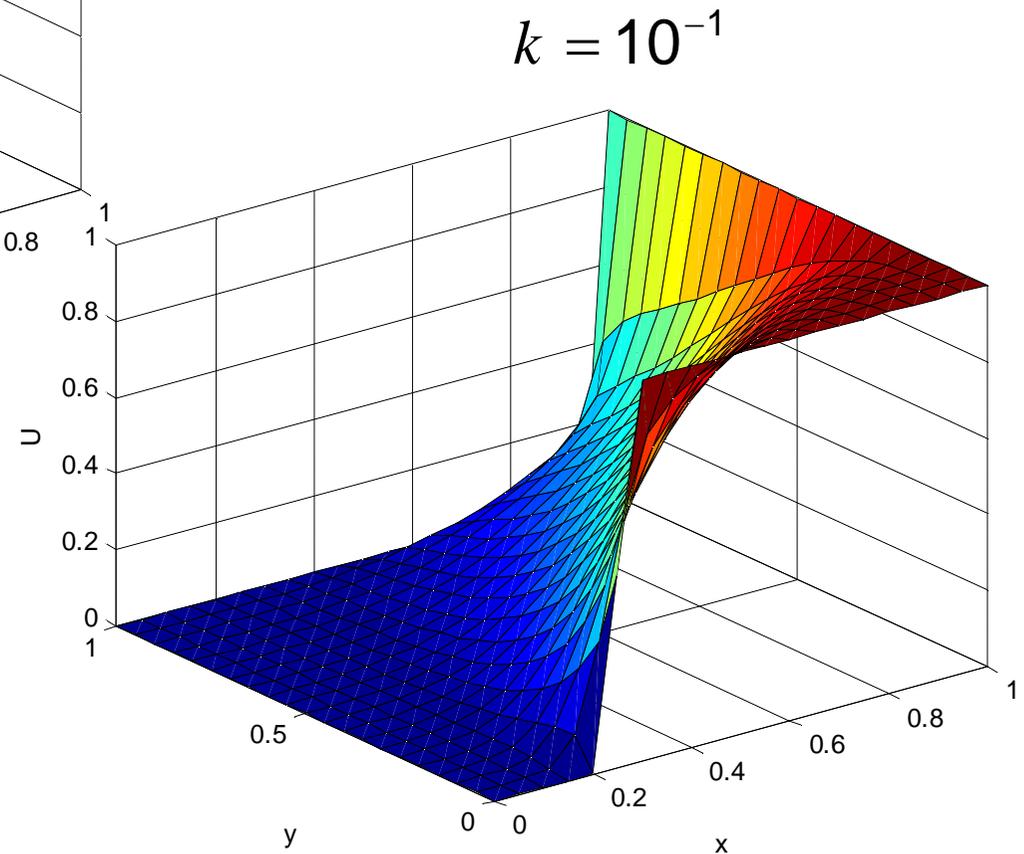
O vetor de **Advecção** usado é $\vec{\omega} = (1, 1)$ e quatro valores para o **Coeficiente Difusivo** foram usados $k = \{1, 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}\}$. Todas as soluções foram obtidas para uma mesma malha 20x20.

4.4- Solução de Equações Diferenciais Parciais.

Note que não existem oscilações espúrias.



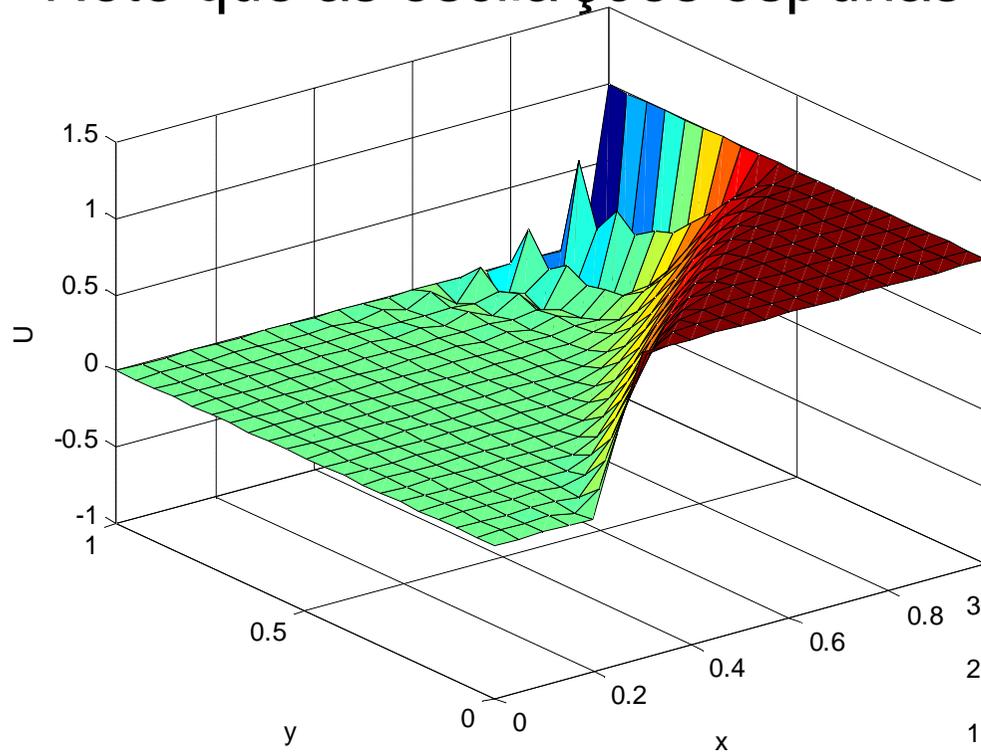
$k = 1$



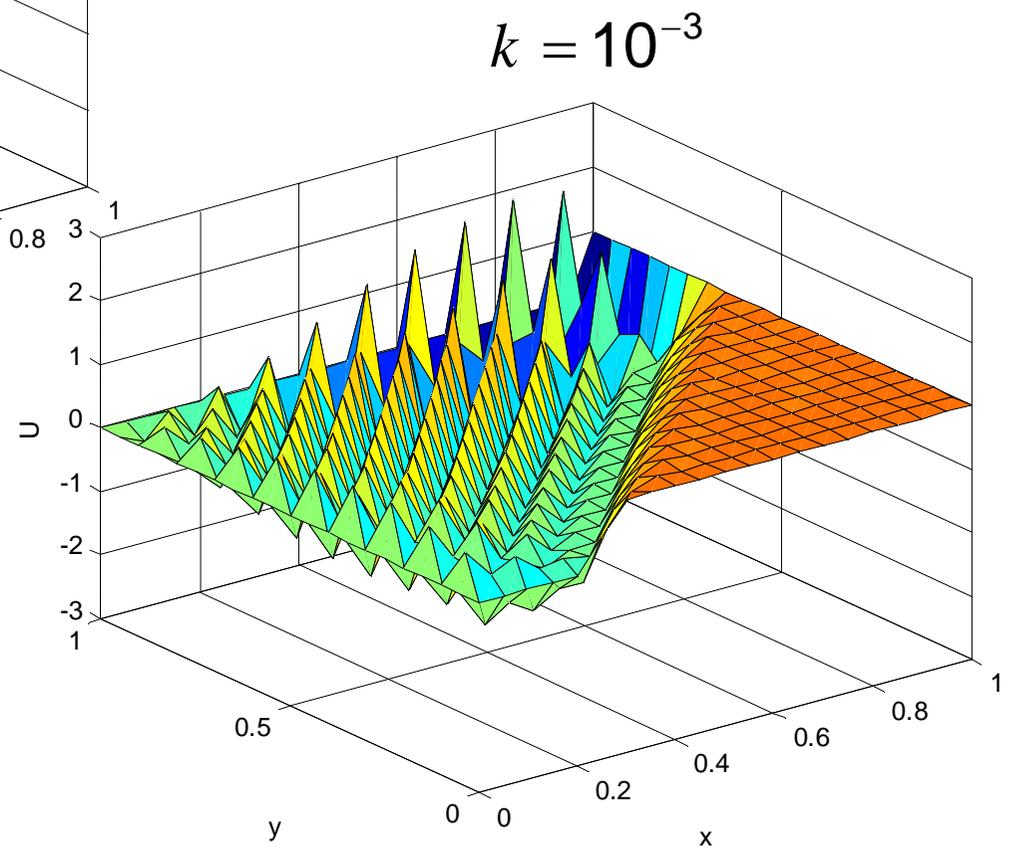
$k = 10^{-1}$

4.4- Solução de Equações Diferenciais Parciais.

Note que as oscilações espúrias aparecem para estes k



$$k = 10^{-2}$$

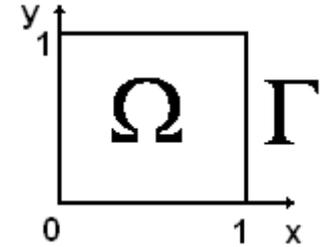


$$k = 10^{-3}$$

4.4- Solução de Equações Diferenciais Parciais.

Exemplo 2.1: Considere o seguinte PVC:

$$\underbrace{-k\nabla^2 u}_{\text{Difusão}} + \underbrace{\vec{\omega} \cdot \nabla u}_{\text{Advecção}} = \underbrace{g(\mathbf{x})}_{\text{Fonte Externa}} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega =]0,1[\times]0,1[\quad (\text{EDP})$$



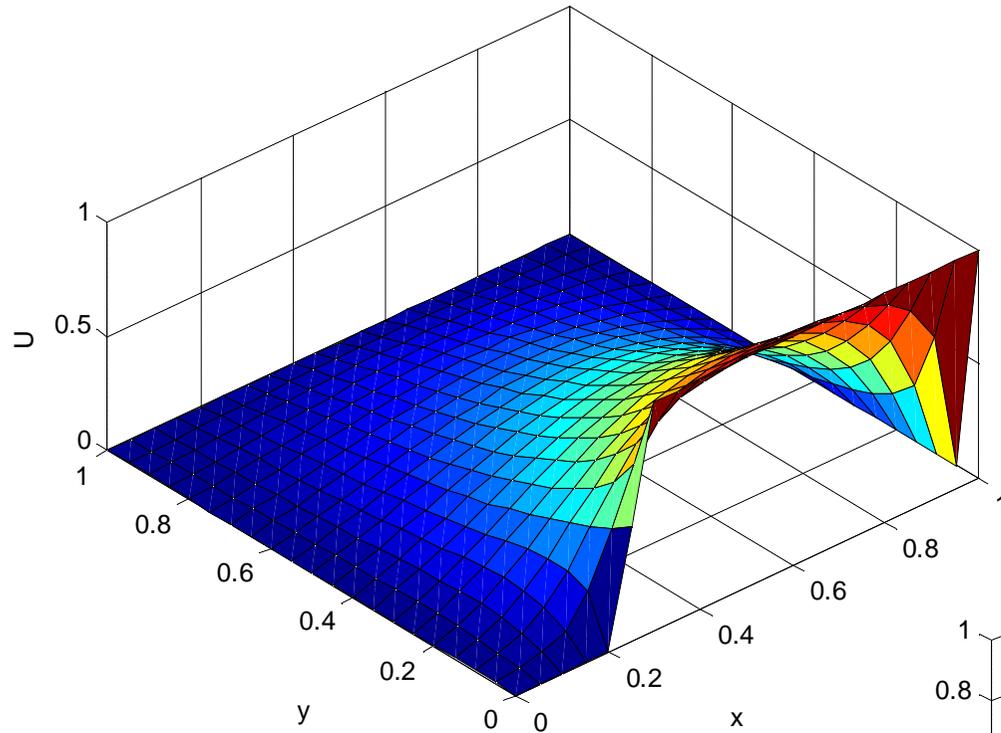
Caso 1

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x, 0) = 0 \quad \forall x \in]0, 0.2[\\ u(x, 0) = 10(x - 0.2) \quad \forall x \in [0.2, 0.3] \quad (\text{CC de Dirichlet}) \\ u(x, 0) = 1 \quad \forall x \in]0.3, 1[\\ u(x, 1) = 0 \quad \forall x \in]0, 1[\quad (\text{CC de Dirichlet}) \\ u(0, y) = 0 \quad \forall y \in]0, 1[\quad (\text{CC de Dirichlet}) \\ u(1, y) = 0 \quad \forall y \in]0, 1[\quad (\text{CC de Dirichlet}) \end{array} \right. \text{Diferente do exemplo 2}$$

O vetor de **Advecção** usado é $\vec{\omega} = (1, 1)$ e quatro valores para o **Coeficiente Difusivo** foram usados $k = \{1, 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}\}$. Todas as soluções foram obtidas para uma mesma malha 20x20.

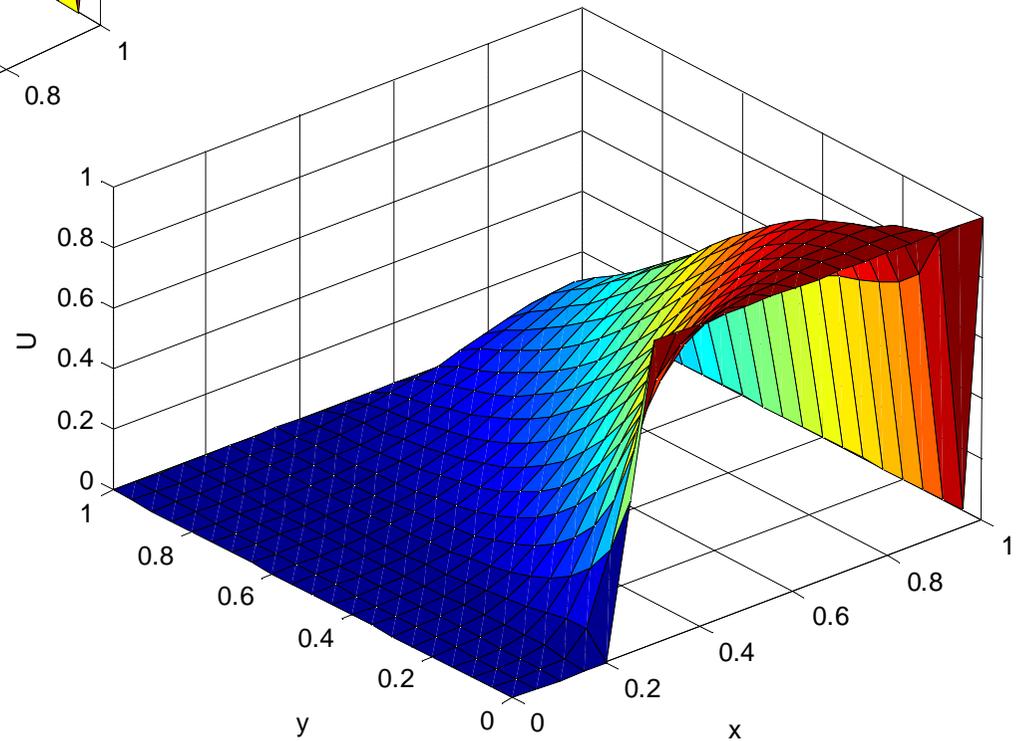
4.4- Solução de Equações Diferenciais Parciais.

Note que não existem oscilações espúrias.



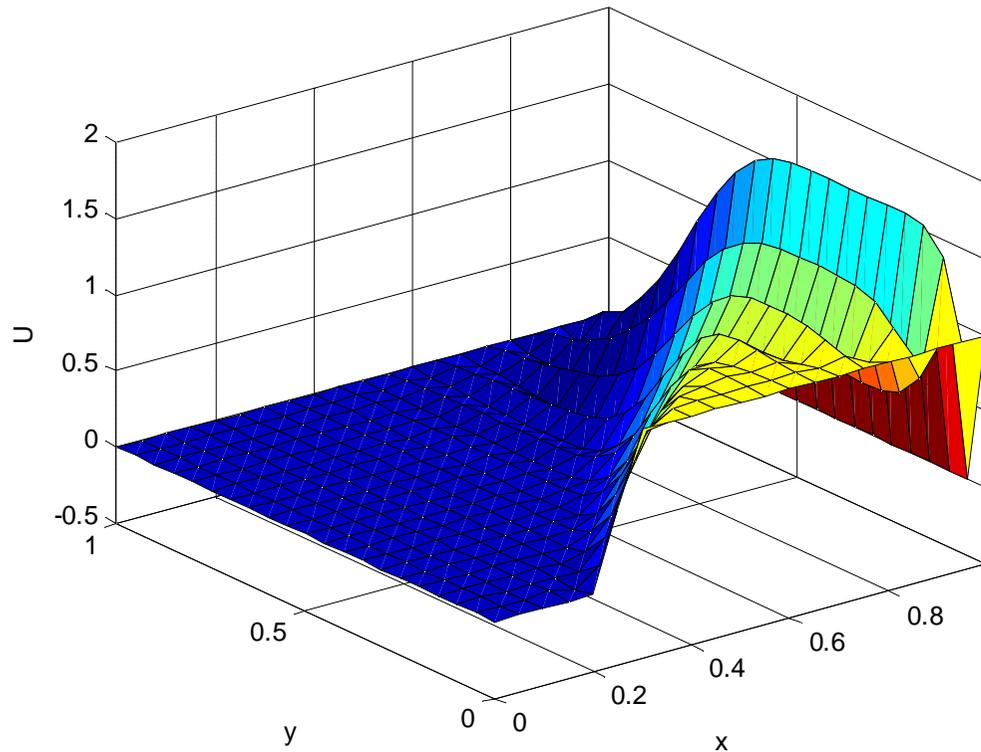
$$k = 1$$

$$k = 10^{-1}$$

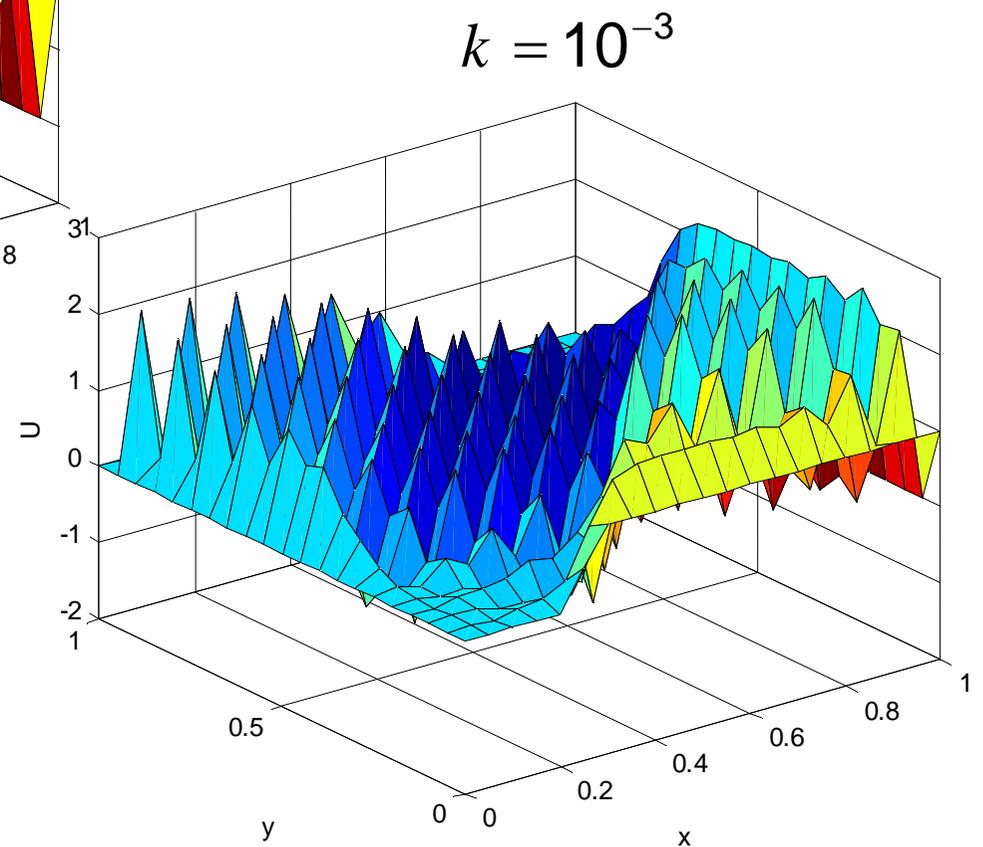


4.4- Solução de Equações Diferenciais Parciais.

Note que as oscilações espúrias aparecem para estes k



$$k = 10^{-2}$$



$$k = 10^{-3}$$

4.3.2- Problema de Valor de Contorno.

Problema 3 . Equação Bidimensional da Difusão-Advecção-Reação Linear e Estacionaria : A equação que descreve matematicamente o fenômeno de transporte de uma grandeza é:

$$\underbrace{-k\nabla^2 u}_{\text{Difusão}} + \underbrace{\vec{\omega} \cdot \nabla u}_{\text{Advecção}} + \underbrace{\sigma u}_{\text{Reação}} = \underbrace{g(\mathbf{x})}_{\text{Fonte Externa}} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (\text{EDP})$$

Quando $k \gg |\vec{\omega}|$ e $k \gg \sigma$ o **fenômeno difusivo é dominante**. Neste caso o **MDF** centrada de segunda ordem de precisão é **Estável e Consistente**.

Quando $|\vec{\omega}| \gg k$ e/ou $\sigma \gg k$ a **difusão não é dominante**. Neste caso teremos um **problema singularmente perturbado** e o **MDF** centrada de segunda ordem de precisão é **instável**. Para que o **Erro Global** recupere a convergência com segunda ordem de precisão é **necessário refinar a malha** ou aplicar outras técnicas de diferenças finitas.

Frases do Dia

Although to penetrate into the intimate mysteries of nature and thence to learn the true causes of phenomena is not allowed to us, nevertheless it can happen that a certain fictive hypothesis may suffice for explaining many phenomena. +

Leonhard Euler (A mesma das Aulas 9, 11, 12, 13)

the study of Euler's works will remain the best for different fields of mathematics and nothing else can replace it. +

Friedrich Gauss