5- Método de Elementos Finitos Aplicado às Equações Diferenciais Parciais.

5.1- Breve Introdução Histórica.

5.2- Solução de Equações Diferenciais Ordinárias: Problema de Valor de Contorno.

5.3- Solução de Equações Diferenciais Parciais: Problema de Valor de Contorno.

5.1- Breve Introdução Histórica.

- Galerkin (1871-1945) foi o primeiro a estudar soluções aproximada (soluções em espaços de dimensão finita) de problemas variacionais definidos em espaços de dimensão infinita. Este método é conhecido como Método de Galerkin.

- Argyris e Kelsey (1954) apresentaram o Método de Elementos Finitos em trabalhos relacionados a engenharia aeronáutica.

- Entre os anos 1960 e 1990 foram desenvolvidos os principais Métodos de Elementos Finitos conhecidos hoje. Inicialmente foram desenvolvidos MEF para problemas da mecânica dos sólidos e engenharia civil. Posteriormente, estes MEF foram aplicados à mecânica dos fluidos. Junto a todo este desenvolvimento foram se solidificando as bases matemáticas do MEF. Atualmente, o desenvolvimento de MEF é feito dentro da teoria do Análise Funcional aplicada a Problemas Variacionais (semelhante aos trabalhos iniciais de Galerkin).

5.2- Solução de Equações Diferenciais Ordinárias: Problema de Valor de Contorno.

Atualmente o MEF é usado numa vasta gama de aplicações. Aqui apresentaremos os fundamentos deste método para um Problema de Valor de Contorno em Uma Dimensão. Especificamente, para um problema determinado por uma EDO linear de segunda ordem com condições de contorno (Equação da difusão-advecção-reação unidimensional).

Chamaremos este Problema de Valor de Contorno (PVC) de Problema Modelo.

Tradicionalmente o PVC é descrito na Formulação Forte:

$$\underbrace{L(u)}_{\text{Operador Diferencial}} \equiv \underbrace{\frac{d}{dx}\left(-k\frac{du(x)}{dx}\right)}_{\text{Difusão}} + \underbrace{\omega\frac{du(x)}{dx}}_{\text{Advecção}} + \underbrace{\sigma u(x)}_{\text{Reação}} = \underbrace{g(x)}_{\text{Fonte Externa}} \quad \forall x \in \Omega =]a,b[\quad \text{EDO}$$

$$\left.\begin{matrix} u(a) = u_a, \\ u(b) = u_b. \end{matrix}\right\} \begin{cases} \text{Condição} \\ \text{de Dirichlet} \end{cases}$$

5.2- Solução de Equações Diferenciais Ordinárias: Problema de Valor de Contorno.

Ou seja, a Formulação Forte do PVC consiste em encontrar a função $u \in S_{\text{Forte}}$ tal que satisfaz:

$$\underbrace{L(u)}_{\text{Operador}} = \underbrace{g(x)}_{\text{Fonte Externa}} \quad \text{ou} \quad \underbrace{\frac{d}{dx}\left(-k\frac{du(x)}{dx}\right)}_{\text{Difusão}} + \underbrace{\omega\frac{du(x)}{dx}}_{\text{Advecção}} + \underbrace{\sigma u(x)}_{\text{Reação}} = \underbrace{g(x)}_{\text{Fonte Externa}} \quad \forall x \in]a,b[\ \text{EDO}$$

$$\left.\begin{aligned} u(a) &= u_a, \\ u(b) &= u_b. \end{aligned}\right\} \left\{\begin{aligned} &\text{Condição} \\ &\text{de Dirichlet} \end{aligned}\right.$$

onde $k(x), \omega(x), \sigma(x), g(x)$ são funções regulares conhecidas e u_a, u_b são dois números reais. O conjunto S_{Forte} é o espaço solução da formulação forte.

Definição (Bem Posto de Hadamard): Um problema é dito ser Bem Posto se:

- tem uma única solução,
- e a solução depende continuamente dos dados do problema.

Caso contrário se diz que é um problema Mal Posto.

5.2- Solução de Equações Diferenciais Ordinárias: Problema de Valor de Contorno.

Então, a solução clássica da Formulação Forte do PVC anterior é a função $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}) \equiv S_{\text{Forte}}$ que satisfaz a EDO $\forall x \in \Omega$ e as condições de contorno $\forall x \in \Gamma$.

Se assume que as funções $k(x), \omega(x), \sigma(x), g(x)$ são dados do problema e que $g(x) \in C(\Omega)$, $k(x) \in C^1(\Omega)$, $\omega(x) \in C^1(\Omega)$ e $\sigma(x) \in C(\Omega)$.

Aqui $\bar{\Omega}$ denota o fecho do conjunto Ω. Ou seja, $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$ é a união do conjunto Ω e seu contorno Γ. Para este Problema Modelo o fecho corresponde a $\bar{\Omega} =]a,b[\cup \{a,b\} = [a,b]$.

O símbolo $C^m(\Omega)$ denota o espaço das funções continuas com derivadas até ordem *m* continuas em Ω.

Note que a solução clássica da Formulação Forte deve ser uma função continua com derivada primeira e segunda continua no intervalo aberto $]a,b[$.

5.2- Solução de Equações Diferenciais Ordinárias: Problema de Valor de Contorno.

A Formulação Fraca correspondente à Formulação Forte do PVC anterior permite reduzir as restrições de regularidade exigidas para a solução do PVC.

Para obter a Formulação Fraca partindo da Formulação Forte do PVC devemos realizar os cinco passos a seguir:

Passo 1. Multiplicar a EDP por uma função "Teste" $v \in C_0^\infty(\Omega)$.

O símbolo $C_0^\infty(\Omega)$ denota o espaço das funções continuas com derivadas até ordem ∞ continuas em Ω e que se anulam no contorno Γ.

Passo 2. Integrar sobre o domínio Ω .

$$\int_\Omega \left[\frac{d}{dx}\left(-k\frac{du(x)}{dx} \right) + \omega \frac{du(x)}{dx} + \sigma u(x) \right] v d\Omega = \int_\Omega g(x) v \, d\Omega$$

$$\int_a^b \left[\frac{d}{dx}\left(-k\frac{du(x)}{dx} \right) + \omega \frac{du(x)}{dx} + \sigma u(x) \right] v dx = \int_a^b g(x) v dx \quad \text{Caso Unidimensional}$$

5.2- Solução de Equações Diferenciais Ordinárias: Problema de Valor de Contorno.

Passo 3. Use Integração por Partes (ou use a formula de Green ou teorema de Gauss) para reduzir a derivada de maior ordem da EDP.

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du \quad \text{(Integração por Partes)}$$

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v\,d\Omega = -\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i} d\Omega + \int_\Gamma u v n_i\,d\Gamma \quad \text{(Teorema de Gauss)}$$

$\vec{\mathbf{n}} = (n_1, n_2, \cdots, n_d)$ vetor unitário normal ao contorno Γ no sentido da saida de Γ.

$$\int_a^b \left[k \frac{du(x)}{dx} \frac{dv(x)}{dx} + \omega \frac{du(x)}{dx} v(x) + \sigma u(x) v(x) \right] dx - uv\Big|_a^b = \int_a^b g(x) v(x)\,dx$$

Passo 4. Como $v \in C_0^\infty(\Omega)$, v se anula nos extremos do intervalo $[a,b]$

e obtemos

$$\int_a^b \left[k \frac{du(x)}{dx} \frac{dv(x)}{dx} + \omega \frac{du(x)}{dx} v(x) + \sigma u(x) v(x) \right] dx = \int_a^b g(x) v(x)\,dx$$

5.2- Solução de Equações Diferenciais Ordinárias: Problema de Valor de Contorno.

Passo 5. Encontrar o maior espaço de funções para u, v e as outras funções que aparecem no Passo 4 tal que todas as integrais sejam finitas.

Se $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}) \equiv S_{\text{Forte}}$ (restrições de regularidade para a Formulação Forte do PVC) e $v \in C_0^\infty(\Omega)$, então todas as integrais serão finitas. Entretanto, todas as integrais serão finitas também se

$$u \in S = \left\{\phi \in H^1(\Omega) : \phi = u(\Gamma) \text{ em } \Gamma\right\} \text{ e } v \in V = \left\{\phi \in H^1(\Omega) : \phi = 0 \text{ em } \Gamma\right\}$$

Onde os seguintes espaços de funções são definidos:

$$L^2(\Omega) = \left\{\phi : (\phi, \phi) \equiv \int_\Omega \phi\phi d\Omega < \infty\right\} \text{(Espaço das funções quadrado integraveis)}$$

$$H^1(\Omega) = \left\{\phi \in L^2(\Omega) \text{ e } \frac{d\phi}{dx} \in L^2(\Omega)\right\} \text{ e } H_0^1(\Omega) = \left\{\phi \in H^1(\Omega) : \phi = 0 \text{ em } \Gamma\right\}$$

Com isto podemos enunciar a Formulação Fraca correspondente à Formulação Forte do PVC como segue:

5.2- Solução de Equações Diferenciais Ordinárias: Problema de Valor de Contorno.

Formulação Fraca (Variacional): Encontrar $u \in S$ que satisfaz

$$\int_a^b \left[k \frac{du(x)}{dx}\frac{dv(x)}{dx} + \omega \frac{du(x)}{dx} v(x) + \sigma u(x) v(x) \right] dx = \int_a^b g(x) v(x) dx \qquad \forall v \in V$$

Note que nesta formulação do problema a solução não precisa possuir derivada segunda. Apenas aparece a primeira derivada da solução. As exigidas para que exista solução da Formulação Fraca são menos restritivas que as da Formulação Forte.

Equivalência entre a Formulação Fraca e Forte:

1- A solução da Formulação Forte é também solução da Formulação Fraca.

2- Quando a solução da Formulação Fraca é suficientemente regular $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}) \equiv S_{\text{Forte}}$ também será solução da Formulação Forte.

Formulação Forte ↔ Formulação Fraca

ou

Equação Diferencial Parcial ↔ Equação Variacional

5.2- Solução de Equações Diferenciais Ordinárias: Problema de Valor de Contorno.

Podemos reescrever a Formulação Fraca numa forma mais compacta em termos de Formas Bi-Lineares e Lineares definidas como:

$$A(\circ,\circ) : V \times V \rightarrow R, \text{ onde } V = H_0^1(\Omega) \text{ e } A(u,v) = \int_a^b \left[k \frac{du}{dx}\frac{dv}{dx} + w\frac{du}{dx}v + \sigma uv \right] dx$$

$$F(v) = \int_a^b g(x) v dx \quad \text{(Forma Linear)}$$

Formulação Fraca (Variacional): Encontrar $u \in S$ que satisfaz

$$A(u,v) = F(v) \quad \forall v \in V$$

A solução deste problema variacional pertence a um Espaço de Dimensão Infinita. Ou seja, a dimensão tanto de S quanto de V é infinita. Em geral, soluções exatas são difíceis de serem encontradas.

Galerkin (1871-1945) foi o primeiro a estudar Soluções Aproximadas (numéricas) para este problema em Espaços de Dimensão Finita.

5.2- Solução de Equações Diferenciais Ordinárias: Problema de Valor de Contorno.

Método de Galerkin: O método de Galerkin é baseado em seqüência de subespaços de dimensão finita $\{V_n\}_{n=1}^{\infty} \subset V,\ V_n \subset V_{n+1}$, que converge para o espaço V no limite. Pode se provar que a seqüência de soluções aproximadas $\{u_n\}_{n=1}^{\infty},\ u_n \in S_n$ converge para a solução exata do problema $u \in S$.

O método aproximado de Galerkin é chamado de Formulação Discreta ou Problema discreto da formulação variacional.

Formulação Fraca Discreta (dimensão finita): Encontrar $u_n \in S_n$ que satisfaz $A(u_n, v) = F(v) \quad \forall v \in V_n$.

Como os espaços S_n, V_n são de dimensão finita (N_n) tem uma base finita. A solução aproximada pode ser escrita como combinação linear das funções bases $\{v_1, v_2, \cdots, v_{N_n}\}$ com coeficientes a determinar

$$u_n = \sum_{i=1}^{N_n} c_i v_i$$

1 – Base Global ⇔ Método de Galerkin Original

2 – Base Local ⇔ Método de Elementos Finitos de Galerkin

5.2- Solução de Equações Diferenciais Ordinárias: Problema de Valor de Contorno.

Substituindo a combinação linear na formulação discreta obtemos:

$$A\left(\sum_{j=1}^{N_n} c_j v_j , v\right) = F(v) \quad \forall v \in V_n$$

Fazendo uso da linearidade da Forma Bi-Linear segue

$$\sum_{j=1}^{N_n} c_j A(v_j , v) = F(v) \quad \forall v \in V_n$$

Esta equação é válida $\forall v \in V_n$, logo é válida para todos os elementos da base. Para cada elemento da base $v_i \in V_n$ obtemos uma equação

$$\sum_{j=1}^{N_n} c_j A(v_j , v_i) = F(v_i) \quad \forall i = 1, \cdots, N_n$$

Note que isto é um Sistema Linear de Equações Algébricas. Se denotamos por $a_{ij} = A(v_j , v_i)$ os elementos da matriz A , $f_i = F(v_i)$ os elementos do vetor F e $U_i = c_i$ os elementos do vetor incógnita U podemos escrever o sistema anterior na forma matricial

$$\mathrm{A}_{N_n \times N_n} \mathrm{U} = \mathrm{F}$$

5.2- Solução de Equações Diferenciais Ordinárias: Problema de Valor de Contorno.

Resumindo: Partimos da Formulação Forte do Problema e transformamos o PVC em um Problema Variacional (Formulação Fraca). A Formulação Variacional é definida em um Espaço de Dimensão Infinita. Aproximamos este Espaço de Dimensão Infinita por um Espaço de Dimensão Finita e com isto obtemos um Problema Variacional Discreto. Escolhendo uma Base para este Espaço de Dimensão Finita $v_i \in V_n$ transformamos o Problema Variacional Discreto num Sistema Linear de Equações Algébricas.

$\mathrm{A}_{N_n \times N_n} \mathrm{U} = \mathrm{F}$ Aqui se destacam dois casos para a escolha da base.

1 – Base Global (Método de Galerkin Original) a matriz A é densa (cheia).

2 – Base Local (Método de Elementos Finitos de Galerkin) a matriz A é esparsa. Usa menos memória e mais fácil de resolver numericamente.

Frase do Dia

“Although to penetrate into the intimate mysteries of nature and thence to learn the true causes of phenomena is not allowed to us, nevertheless it can happen that a certain fictive hypothesis may suffice for explaining many phenomena.”

Leonhard Euler (A mesma das Aula 9, 11, 12,13…)

“... the study of Euler’s works will remain the best for different fields of mathematics and nothing else can replace it.”

Friedrich Gauss