5- Método de Elementos Finitos Aplicado às Equações Diferenciais Parciais.

5.1- Breve Introdução Histórica.

5.2- Solução de Equações Diferenciais Ordinárias: Problema de Valor de Contorno.

5.3- Solução de Equações Diferenciais Parciais: Problema de Valor de Contorno.

5.2- Solução de Equações Diferenciais Ordinárias: Problema de Valor de Contorno.

Formulação Forte (PVC): Encontrar $u \in S_{\text{Forte}}$ tal que satisfaz

$$\underbrace{L(u)}_{\text{Operador}} = \underbrace{g(x)}_{\text{Fonte Externa}} \quad \text{ou} \quad \underbrace{\frac{d}{dx}\left(-k\frac{du(x)}{dx}\right)}_{\text{Difusão}} + \underbrace{\omega\frac{du(x)}{dx}}_{\text{Advecção}} + \underbrace{\sigma u(x)}_{\text{Reação}} = \underbrace{g(x)}_{\text{Fonte Externa}} \quad \forall x \in]a,b[\text{ EDO}$$

$$\left.\begin{array}{l} u(a) = u_a, \\ u(b) = u_b. \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} \text{Condição} \\ \text{de Dirichlet} \end{array}\right. \qquad u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}) \equiv S_{\text{Forte}}$$

Formulação Fraca (Variacional): Encontrar $u \in S$ que satisfaz $\forall v \in V$

$$\int_a^b \left[k\frac{du(x)}{dx}\frac{dv(x)}{dx} + \omega\frac{du(x)}{dx}v(x) + \sigma u(x)v(x) \right] dx = \int_a^b g(x)v(x)dx$$

$$u \in S = \{\phi \in H^1(\Omega) : \phi = u(\Gamma) \text{ em } \Gamma\} \text{ e } v \in V = \{\phi \in H^1(\Omega) : \phi = 0 \text{ em } \Gamma\}$$

Existe Equivalência entre a Formulação Fraca e Forte.

5.2- Solução de Equações Diferenciais Ordinárias: Problema de Valor de Contorno.

Formulação Fraca (Variacional): Encontrar $u \in S$ que satisfaz $\forall v \in V$

$$\int_a^b \left[k \frac{du(x)}{dx}\frac{dv(x)}{dx} + \omega \frac{du(x)}{dx} v(x) + \sigma u(x) v(x) \right] dx = \int_a^b g(x) v(x) dx$$

Definida em Espaços de Dimensão Infinita *S* e *V*.

Método de Galerkin: O método de Galerkin aproxima o Espaço de Dimensão Infinita por um Espaço de Dimensão Finita e com isto obtemos um Problema Variacional Discreto. Escolhendo uma Base para este Espaço de Dimensão Finita $v_i \in V_n \subset V$ transformamos o Problema Variacional Discreto num Sistema Linear de Equações Algébricas.

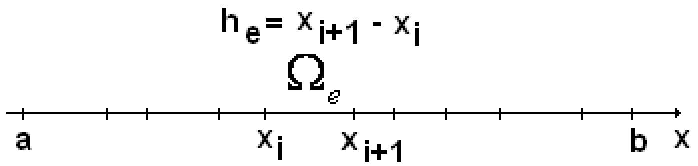
$\mathrm{A}_{N_n \times N_n} \mathrm{U} = \mathrm{F}$ Aqui se destacam dois casos para a escolha da Base.

1 – Base Global (Método de Galerkin Original) a matriz A é densa (cheia).

2 – Base Local (Método de Elementos Finitos de Galerkin) a matriz A é esparsa. Usa menos memória e facilita a obtenção da solução numerica.

5.2- Solução de Equações Diferenciais Ordinárias: Problema de Valor de Contorno.

Método de Elementos Finitos: Seja $M^h = \{\Omega_1, \ldots, \Omega_{ne}\}$ uma partição de Ω em ne elementos $\Omega_e =]x_i^e, x_{i+1}^e[$ da malha tal que $\Omega = \bigcup_{e=1}^{ne} \overline{\Omega}_e$ e $\Omega_e \cap \Omega_{e'} = 0 \text{ se } e \neq e'$ (elementos disjuntos). O diâmetro (parâmetro) da malha é definido como $h = \max_{1 \le e \le ne} \{h_e\}$, onde $h_e = x_{i+1}^e - x_i^e$ é o diâmetro de cada elemento finito.



O Método de Elementos Finitos de Galerkin é baseado na escolha de uma base local para o espaço $V_n \equiv V^h$. Ou seja, uma base para cada elemento da malha:

$$u_n(x) = \sum_{i=1}^{N_n} c_i v_i(x), \quad N_n \text{ é o número de nós da malha}$$

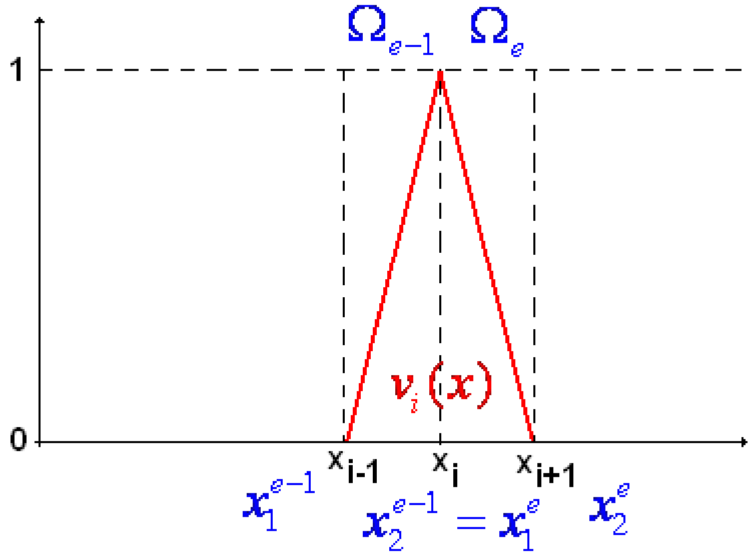
Na maioria das vezes para construir esta base são usados os polinômios $P^k(\Omega_e)$ de grau menor ou igual a *k*.

Iniciamos nossa apresentação para polinômios lineares por partes: *k=1*.

5.2- Solução de Equações Diferenciais Ordinárias: Problema de Valor de Contorno.

Quando *k=1* uma possível escolha da base local são os Polinômios de Lagrange:

$$v_i = \begin{cases} \dfrac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} & \text{se } x \in \overline{\Omega}_{e-1} = [x_{i-1}, x_i] \\ \dfrac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} & \text{se } x \in \overline{\Omega}_e = [x_i, x_{i+1}] \\ 0 & \text{se } x \notin \overline{\Omega}_{e-1} \text{ e } x \notin \overline{\Omega}_e \end{cases}$$



Note que $v_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ se } i = j \\ 0 \text{ se } i \neq j \end{cases}$

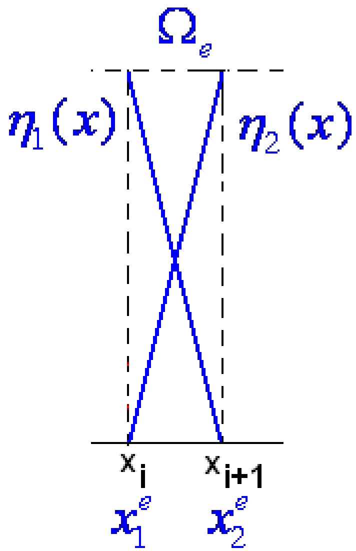
Estas funções base podem ser associadas a cada elemento finito Ω_e.

$$h_e = x_2^e - x_1^e = x_{i+1} - x_i$$

$$\eta_m^e(x_l^e) = \delta_{ml}$$

$$\eta_1^e(x) = \begin{cases} \dfrac{x_2^e - x}{x_2^e - x_1^e} & \text{se } x \in \overline{\Omega}_e = [x_1^e, x_2^e] \\ 0 & \text{se } x \notin \overline{\Omega}_e \end{cases}$$

$$\eta_2^e(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_1^e}{x_2^e - x_1^e} & \text{se } x \in \overline{\Omega}_e = [x_1^e, x_2^e] \\ 0 & \text{se } x \notin \overline{\Omega}_e \end{cases}$$



5.2- Solução de Equações Diferenciais Ordinárias: Problema de Valor de Contorno.

Assim, a função base $v_i(x)$ é a junção das funções base local nos elementos Ω_{e-1} e Ω_e.

$$v_i(x) = \begin{cases} \eta_2^{e-1}(x) & \text{se } x \in \overline{\Omega}_{e-1} = [x_{i-1}, x_i] \\ \eta_1^{e}(x) & \text{se } x \in \overline{\Omega}_{e} = [x_{i}, x_{i+1}] \\ 0 & \text{se } x \notin \overline{\Omega}_{e-1} \text{ e } x \notin \overline{\Omega}_{e} \end{cases}$$

Note que existe uma numeração global para os nós x_i e x_{i+1}. A esta numeração global corresponde uma numeração local em cada elemento x_1^e e x_2^e.

A solução do problema restrita ao elemento Ω_e pode ser escrita como:

$$u^e(x) = \sum_{l=1}^{2} c_l^e \eta_l^e(x) \quad \forall x \in \Omega_e$$

Note que $u^e(x_l^e) = \sum_{m=1}^{2} c_m^e \eta_m^e(x_l^e) = \sum_{m=1}^{2} c_m^e \delta_{ml} = c_l^e$

logo $u^e(x) = \sum_{l=1}^{2} u^e(x_l^e) \eta_l^e(x) = \sum_{l=1}^{2} u_l^e \eta_l^e(x)$

Os coeficientes da combinação linear coincidem com a valor da solução aproximada no nó.

5.2- Solução de Equações Diferenciais Ordinárias: Problema de Valor de Contorno.

Substituindo $u_n(x)$ na Formulação Variacional obtemos a Formulação variacional Discreta que resulta num Sistema Linear de Equações Algébricas $\mathbf{A}_{N_n \times N_n}\mathbf{U} = \mathbf{F}$, onde

$$\sum_{j=1}^{N_n} c_j \underbrace{\int_a^b \left[k \frac{dv_j(x)}{dx}\frac{dv_i(x)}{dx} + \omega \frac{dv_j(x)}{dx} v_i(x) + \sigma v_j(x) v_i(x) \right] dx}_{a_{ij} = A(v_j, v_i)} = \underbrace{\int_a^b g(x) v_i(x) dx}_{f_i}$$

Como as funções $v_i(x)$ se anulam fora da vizinhança do ponto x_i segue que muitos elementos da matriz $\mathbf{A}_{N_n \times N_n}$ serão zero.

$$a_{ij} = A(v_j, v_i) = \begin{cases} a_{ij} & \text{se } i-1 \le j \le i+1 \\ 0 & \text{se } j > i+1 \text{ ou } j < i-1 \end{cases}$$

$\boxed{\text{Matriz de Rigidez (stiffness matrix)}}$

Ou seja, a matriz $\mathbf{A}_{N_n \times N_n}$ é uma Matriz Esparsa do Tipo Banda com três diagonais diferentes de zero. Semelhante à matriz obtida por diferenças finitas centradas de segunda ordem.

5.2- Solução de Equações Diferenciais Ordinárias: Problema de Valor de Contorno.

Calcularemos agora a Matriz de Rigidez $\mathbf{A}_{N_n \times N_n}$ e o Vetor Força $\mathbf{F}$

$$v_i = \begin{cases} \dfrac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} & \text{se } x \in \overline{\Omega}_{e-1} = [x_{i-1}, x_i] \\ \dfrac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} & \text{se } x \in \overline{\Omega}_e = [x_i, x_{i+1}] \\ 0 & \text{se } x \notin \overline{\Omega}_{e-1} \text{ e } x \notin \overline{\Omega}_e \end{cases} \qquad e = i, \qquad \frac{dv_i}{dx} = \begin{cases} \dfrac{1}{x_i - x_{i-1}} = \dfrac{1}{h_{e-1}} & \text{se } x \in \overline{\Omega}_{i-1} \\ \dfrac{-1}{x_{i+1} - x_i} = -\dfrac{1}{h_e} & \text{se } x \in \overline{\Omega}_i \\ 0 \ \text{se } x \notin \overline{\Omega}_{i-1} \text{ e } x \notin \overline{\Omega}_i \end{cases}$$

Como as funções $v_i(x)$ e sua derivada se anulam fora da vizinhança do ponto x_i segue que $v_j v_i = 0$ e $\dfrac{dv_j}{dx}\dfrac{dv_i}{dx} = 0 \, |i - j| \geq 2$. Logo para cada i (linha) fixado apenas serão diferente de zero três colunas j $\quad a_{ii-1} = A(v_{i-1}, v_i), \quad a_{ii} = A(v_i, v_i), \quad a_{ii+1} = A(v_{i+1}, v_i)$

$$a_{ij} = A(v_j, v_i) = \int_a^b \left[k \frac{dv_j}{dx}\frac{dv_i}{dx} + w \frac{dv_j}{dx} v_i + \sigma v_j v_i \right] dx$$

5.2- Solução de Equações Diferenciais Ordinárias: Problema de Valor de Contorno.

Calcularemos agora os termos da diagonal principal $a_{ii} = A(v_i, v_i)$

$$\underbrace{\int_a^b \left[k \frac{dv_i}{dx}\frac{dv_i}{dx} + w \frac{dv_i}{dx} v_i + \sigma v_i v_i \right] dx}_{a_{ii} = A(v_i, v_i)} = \int_{\Omega_{e-1} \cup \Omega_e} \left[k \frac{dv_i}{dx}\frac{dv_i}{dx} + w \frac{dv_i}{dx} v_i + \sigma v_i v_i \right] dx$$

$$= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left[k \frac{dv_i}{dx}\frac{dv_i}{dx} + w \frac{dv_i}{dx} v_i + \sigma v_i v_i \right] dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[k \frac{dv_i}{dx}\frac{dv_i}{dx} + w \frac{dv_i}{dx} v_i + \sigma v_i v_i \right] dx$$

$$= k\left(\frac{1}{h_{e-1}} + \frac{1}{h_e} \right) + w \cdot \text{zero} + \sigma\left(\frac{h_{e-1}}{3} + \frac{h_e}{3} \right) = k\left(\frac{1}{h_{e-1}} + \frac{1}{h_e} \right) + \sigma\left(\frac{h_{e-1}}{3} + \frac{h_e}{3} \right)$$

Para o termo $a_{ii+1} = A(v_{i+1}, v_i)$ obtemos

$$a_{ii+1} = A(v_{i+1}, v_i) = \int_{\Omega_e} \left[k \frac{dv_{i+1}}{dx}\frac{dv_i}{dx} + w \frac{dv_{i+1}}{dx} v_i + \sigma v_{i+1} v_i \right] dx$$

$$= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[k \frac{dv_{i+1}}{dx}\frac{dv_i}{dx} + w \frac{dv_{i+1}}{dx} v_i + \sigma v_{i+1} v_i \right] dx = -k \frac{1}{h_e} + \frac{w}{2} + \sigma \frac{h_e}{6}$$

Similarmente fazemos para $a_{i-1i} = A(v_{i-1}, v_i)$.

5.2- Solução de Equações Diferenciais Ordinárias: Problema de Valor de Contorno.

Logo a Matriz de Rigidez será:

$$a_{ij} = A(v_j, v_i) = \begin{cases} -k\dfrac{1}{h_{e-1}} - \dfrac{w}{2} + \sigma\dfrac{h_{e-1}}{6} & \text{se} \quad j = i-1 \\ k\left(\dfrac{1}{h_{e-1}} + \dfrac{1}{h_e}\right) + w \cdot \text{zero} + \sigma\left(\dfrac{h_{e-1}}{3} + \dfrac{h_e}{3}\right) & \text{se} \quad j = i \\ -k\dfrac{1}{h_e} + \dfrac{w}{2} + \sigma\dfrac{h_e}{6} & \text{se} \quad j = i+1 \\ 0 \quad \text{caso contrário} \end{cases}$$

Note que a Matriz de Rigidez

$\mathbf{A}_{N_n \times N_n}$ é tridiagonal

$$\mathbf{A}_{N_n \times N_n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & & & & \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & & & \\ & a_{32} & a_{33} & a_{34} & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a_{N_n-1N_n-2} & a_{N_n-1N_n-1} & a_{N_n-1N_n} \\ & & & & a_{N_nN_n-1} & a_{N_nN_n} \end{bmatrix}$$

5.2- Solução de Equações Diferenciais Ordinárias: Problema de Valor de Contorno.

Similarmente podem ser calculadas as integrais relacionadas ao Vetor Força $\mathbf{F}$

$$\underbrace{\int_a^b g(x)v_i dx}_{f(v_i)} = \int_{\Omega_{e-1}\cup\Omega_e} g(x)v_i dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} g(x)v_i dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} g(x)v_i dx$$

Se $g(x)=1$ segue $f_i = f(v_i) = \int_{x_{i-1}}^{x_i} v_i dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} v_i dx = \frac{1}{2}\left(h_{e-1}+h_e\right)$. Resta agora resolver o Sistema Linear, onde cada componente do vetor $\mathbf{U}$ corresponde a Solução Aproximada pelo MEF no nó "*i*".

$$\mathbf{A}_{N_n\times N_n}\mathbf{U}=\mathbf{F} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & & & & & \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & & & & \\ & a_{32} & a_{33} & a_{34} & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & a_{N_n-1N_n-2} & a_{N_n-1N_n-1} & a_{N_n-1N_n} \\ & & & & a_{N_nN_n-1} & a_{N_nN_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ \vdots \\ U_{N_n-1} \\ U_{N_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \vdots \\ f_{N_n-1} \\ f_{N_n} \end{bmatrix}$$

5.2- Solução de Equações Diferenciais Ordinárias: Problema de Valor de Contorno.

A Matriz de Rigidez e o Vetor Força podem ser escrito em termos da solução restrita a cada elemento: $u^e(x) = \sum_{l=1}^{2} u^e(x_l^e)\eta_l^e(x) = \sum_{l=1}^{2} u_l^e \eta_l^e(x)$

Definimos a Matriz Local A^e e o Vetor Local F^e para cada elemento "*e*"

$$A^e(\eta_m^e, \eta_l^e) = \int_{\Omega_e} \left[k \frac{d\eta_m^e}{dx} \frac{d\eta_l^e}{dx} + w \frac{d\eta_m^e}{dx} \eta_l^e + \sigma \eta_m^e \eta_l^e \right] dx, \qquad F^e(\eta_l^e) = \int_{\Omega_e} g(x) \eta_l^e dx$$

Como $\int_a^b [\ ]dx = \sum_{e=1}^{ne} \int_{\Omega_e} [\ ]dx$, $\underbrace{\int_a^b \left[k \frac{dv_j}{dx} \frac{dv_i}{dx} + w \frac{dv_j}{dx} v_i + \sigma v_j v_i \right] dx}_{a_{ij} = A(v_j, v_i)}$ e $\underbrace{\int_a^b g(x) v_i dx}_{f(v_i)}$

que define o Sistema de Equações Algébricas $\mathbf{A}_{\mathbf{N_n \times N_n}} \mathbf{U} = \mathbf{F}$ segue que $\mathbf{A}_{N_n \times N_n} = \sum_{e=1}^{ne} \mathbf{A}_{2\times 2}^e$, onde $\mathbf{A}_{\mathbf{2\times 2}}^{\mathbf{e}} = \begin{bmatrix} a_{11}^e & a_{12}^e \\ a_{21}^e & a_{22}^e \end{bmatrix}$.

Ou seja, a Matriz Global $\mathbf{A}_{\mathbf{N_n \times N_n}}$ pode ser determinada a partir da soma da Matrizes de cada Elemento $\mathbf{A}_{\mathbf{2\times 2}}^{\mathbf{e}}$.

5.2- Solução de Equações Diferenciais Ordinárias: Problema de Valor de Contorno.

O cálculo da Matriz de Rigidez Global e o Vetor Força Global feito com a contribuição de cada elemento não apresenta vantagens quando tratamos problemas unidimensionais, mas para problemas bidimensionais ou tridimensionais este procedimento é mais simples e facilita a elaboração de um algoritmo computacional.

Note que os elementos da diagonal principal da Matriz Global são

$a_{ii} = A(v_i, v_i) = a_{22}^{e-1} + a_{11}^{e}$. Similarmente temos para a diagonal superior $a_{ii+1} = A(v_{i+1}, v_i) = a_{12}^{e}$. Ou seja, para os coeficientes da diagonal principal da Matriz Global contribuem os coeficientes da diagonal da Matriz Local de apenas dois elementos: *e* e *e-1*. Analogamente para o Vetor Força Global obtemos

$f_i = f(v_i) = f_2^{e-1} + f_1^{e}$, onde $f_1^{e} = \int_{\Omega_e} g(x)\eta_1^{e} dx$ e $f_2^{e} = \int_{\Omega_e} g(x)\eta_2^{e} dx$

$$F_{2\times1}^{\mathbf{e}} = \begin{bmatrix} f_1^{e} \\ f_2^{e} \end{bmatrix}.$$

Frase do Dia

Perguntaram ao Dalai Lama …

O que mais te surpreende na Humanidade?

“Os homens… Porque perdem a saúde para juntar dinheiro, depois perdem dinheiro para recuperar a saúde.

E por pensarem ansiosamente no futuro, esquecem do presente de tal forma que acabam por não viver nem o presente nem o futuro.

E vivem como se nunca fossem morrer...

...e morrem como se nunca tivessem vivido.