5- Método de Elementos Finitos Aplicado às Equações Diferenciais Parciais.

5.1- Breve Introdução Histórica.

5.2- Solução de Equações Diferenciais Ordinárias: Problema de Valor de Contorno.

5.3- Solução de Equações Diferenciais Parciais: Problema de Valor de Contorno.

5.3- Solução de Equações Diferenciais Parciais: Problema de Valor de Contorno.

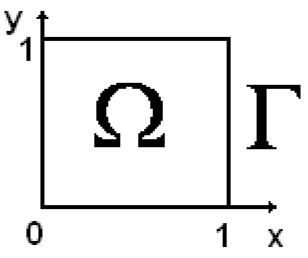
Apresentaremos o MEF para um Problema de Valor de Contorno em Duas Dimensões. Especificamente, para a Equação Bidimensional da Difusão-Advecção-Reação Linear e Estacionaria definida num domínio quadrado unitário com condições de contorno de Dirichlet. Chamaremos este Problema de Valor de Contorno (PVC) de Problema Modelo.

Tradicionalmente o PVC é descrito na Formulação Forte.

Formulação Forte (PVC): Encontrar $u \in S_{\text{Forte}}$ tal que satisfaz

$$\underbrace{\nabla \cdot (-k \nabla u)}_{\text{Difusão}} + \underbrace{\vec{\omega} \cdot \nabla u}_{\text{Advecção}} + \underbrace{\sigma u}_{\text{Reação}} = \underbrace{g(\mathbf{x})}_{\text{Fonte Externa}} \qquad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (\text{EDP})$$

$$u(\Gamma) = u_{\Gamma} \qquad \{\text{Condição de Dirichlet}$$



5.3- Solução de Equações Diferenciais Parciais: Problema de Valor de Contorno.

Para obter a Formulação Fraca partindo da Formulação Forte do PVC devemos realizar os cinco passos a seguir:

Passo 1. Multiplicar a EDP por uma função “Teste” $v \in C_0^\infty(\Omega)$.

O símbolo $C_0^\infty(\Omega)$ denota o espaço das funções continuas com derivadas até ordem ∞ continuas em Ω e que se anulam no contorno Γ.

$$\left[\nabla \cdot (-k\nabla u) + \vec{\omega} \cdot \nabla u + \sigma u\right] v = g(\mathbf{x}) v \qquad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (\mathrm{EDP})$$

Passo 2. Integrar sobre o domínio Ω .

$$\int_\Omega \left[\nabla \cdot (-k\nabla u) + \vec{\omega} \cdot \nabla u + \sigma u\right] v \, d\Omega = \int_\Omega g(\mathbf{x}) v \, d\Omega$$

5.3- Solução de Equações Diferenciais Parciais: Problema de Valor de Contorno.

Passo 3. Use Integração por Partes (ou use a formula de Green ou teorema de Gauss) para reduzir a derivada de maior ordem da EDP.

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du \quad \text{(Integração por Partes)}$$

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v\,d\Omega = -\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i} d\Omega + \int_\Gamma uvn_i\,d\Gamma \quad \text{(Teorema de Gauss)}$$

$\vec{\mathbf{n}} = (n_1, n_2, \cdots, n_d)$ vetor unitário normal ao contorno Γ no sentido da saida de Γ.

$$\int_\Omega \left[k(\nabla u \cdot \nabla v) + (\vec{\omega} \cdot \nabla u)v + \sigma uv\right] d\Omega - \int_\Gamma uvn_i\,d\Gamma = \int_\Omega g(\mathbf{x})v(\mathbf{x})\,d\Omega$$

Passo 4. Como $v \in C_0^\infty(\Omega)$, v se anula no contorno Γ obtemos

$$\int_\Omega \left[k(\nabla u \cdot \nabla v) + (\vec{\omega} \cdot \nabla u)v + \sigma uv\right] d\Omega = \int_\Omega g(\mathbf{x})v(\mathbf{x})\,d\Omega$$

5.3- Solução de Equações Diferenciais Parciais: Problema de Valor de Contorno.

Passo 5. Encontrar o maior espaço de funções para u, v e as outras funções que aparecem no Passo 4 tal que todas as integrais sejam finitas.

Se $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}) \equiv S_{\text{Forte}}$ (restrições de regularidade para a Formulação Forte do PVC) e $v \in C_0^\infty(\Omega)$, então todas as integrais serão finitas. Entretanto, todas as integrais serão finitas também se

$$u \in S = \left\{ \phi \in H^1(\Omega) : \phi = u(\Gamma) \text{ em } \Gamma \right\} \text{ e } v \in V = \left\{ \phi \in H^1(\Omega) : \phi = 0 \text{ em } \Gamma \right\}$$

Onde os seguintes espaços de funções são definidos:

$$L^2(\Omega) = \left\{ \phi : \ (\phi, \phi) \equiv \int_\Omega \phi\phi d\Omega < \infty \right\} \text{(Espaço das funções quadrado integraveis)}$$

$$H^1(\Omega) = \left\{ \phi \in L^2(\Omega) \text{ e } \frac{d\phi}{dx} \in L^2(\Omega) \right\} \text{ e } H_0^1(\Omega) = \left\{ \phi \in H^1(\Omega) : \ \phi = 0 \text{ em } \Gamma \right\}$$

Com isto podemos enunciar a Formulação Fraca correspondente à Formulação Forte do PVC como segue:

5.3- Solução de Equações Diferenciais Parciais: Problema de Valor de Contorno.

Formulação Fraca (Variacional): Encontrar $u \in S$ que satisfaz

$$\underbrace{\int_{\Omega} [k(\nabla u \cdot \nabla v) + (\vec{\omega} \cdot \nabla u)v + \sigma uv] \, d\Omega}_{A(u,v)} = \underbrace{\int_{\Omega} g(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}) \, d\Omega}_{F(v)} \qquad \forall v \in V$$

ou na forma compacta $A(u,v) = F(v) \qquad \forall v \in V$

Equivalência entre a Formulação Fraca e Forte:

1- A solução da Formulação Forte é também solução da Formulação Fraca.

2- Quando a solução da Formulação Fraca é suficientemente regular $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}) \equiv S_{\text{Forte}}$ também será solução da Formulação Forte.

Formulação Forte $\leftrightarrow$ Formulação Fraca

ou

Equação Diferencial Parcial $\leftrightarrow$ Equação Variacional

5.3- Solução de Equações Diferenciais Parciais: Problema de Valor de Contorno.

Método de Elementos Finitos: Seja $M^h = \{\Omega_1, \ldots, \Omega_{ne}\}$ uma partição de Ω em ne elementos da malha tal que $\Omega = \bigcup_{e=1}^{ne} \overline{\Omega}_e$ e $\Omega_e \cap \Omega_{e'} = 0 \text{ se } e \neq e'$ (elementos disjuntos). O diâmetro (parâmetro) da malha é definido como $h = \max_{1 \le e \le ne} \{h_e\}$, onde h_e é o diâmetro de cada elemento finito.

$$\underbrace{\int_\Omega [k(\nabla u \cdot \nabla v) + (\vec{\omega} \cdot \nabla u)v + \sigma uv] d\Omega}_{A(u,v)} = \underbrace{\int_\Omega g(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}) d\Omega}_{F(v)}$$

$$A(u,v) = \sum_{e=1}^{ne} \underbrace{\int_{\Omega_e} [k(\nabla u \cdot \nabla v) + (\vec{\omega} \cdot \nabla u)v + \sigma uv] d\Omega}_{A^e(u,v)} = \sum_{e=1}^{ne} A^e(u,v)$$

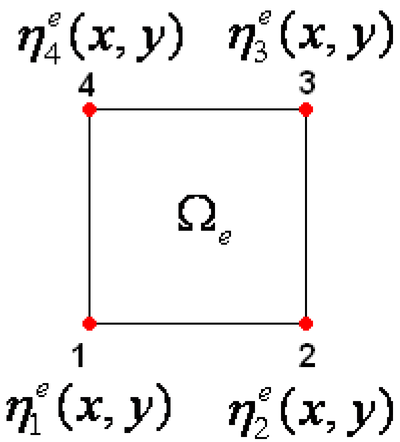
$$F(v) = \sum_{e=1}^{ne} \underbrace{\int_{\Omega_e} g(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}) d\Omega}_{F^e(v)} = \sum_{e=1}^{ne} F^e(v)$$

$$A(u,v) = F(v) \Leftrightarrow \sum_{e=1}^{ne} A^e(u,v) = \sum_{e=1}^{ne} F^e(v)$$

$\boxed{\text{Note que até aqui não tem nenhuma aproximação}}$

5.3- Solução de Equações Diferenciais Parciais: Problema de Valor de Contorno.

O Método de Elementos Finitos de Galerkin é baseado na escolha de uma base local para o espaço $V^h \subset V$. Ou seja, uma base para cada elemento da malha. Na maioria das vezes para construir esta base são usados os polinômios $P^k(\Omega_e)$. Construiremos a base para elementos quadriláteros usando polinômios lineares *k=1*. Existem outros elementos como os triangulares.



As funções “forma” $\eta_l^e(x,y)$ da base podem ser os polinômios de Lagrange:

$$\eta_1^e(x,y) = \frac{(x - x_2^e)(y - y_4^e)}{(x_1^e - x_2^e)(y_1^e - y_4^e)}$$

$$\eta_2^e(x,y) = \frac{(x - x_1^e)(y - y_3^e)}{(x_2^e - x_1^e)(y_2^e - y_3^e)}$$

$$\eta_3^e(x,y) = \frac{(x - x_1^e)(y - y_2^e)}{(x_2^e - x_1^e)(y_3^e - y_2^e)}$$

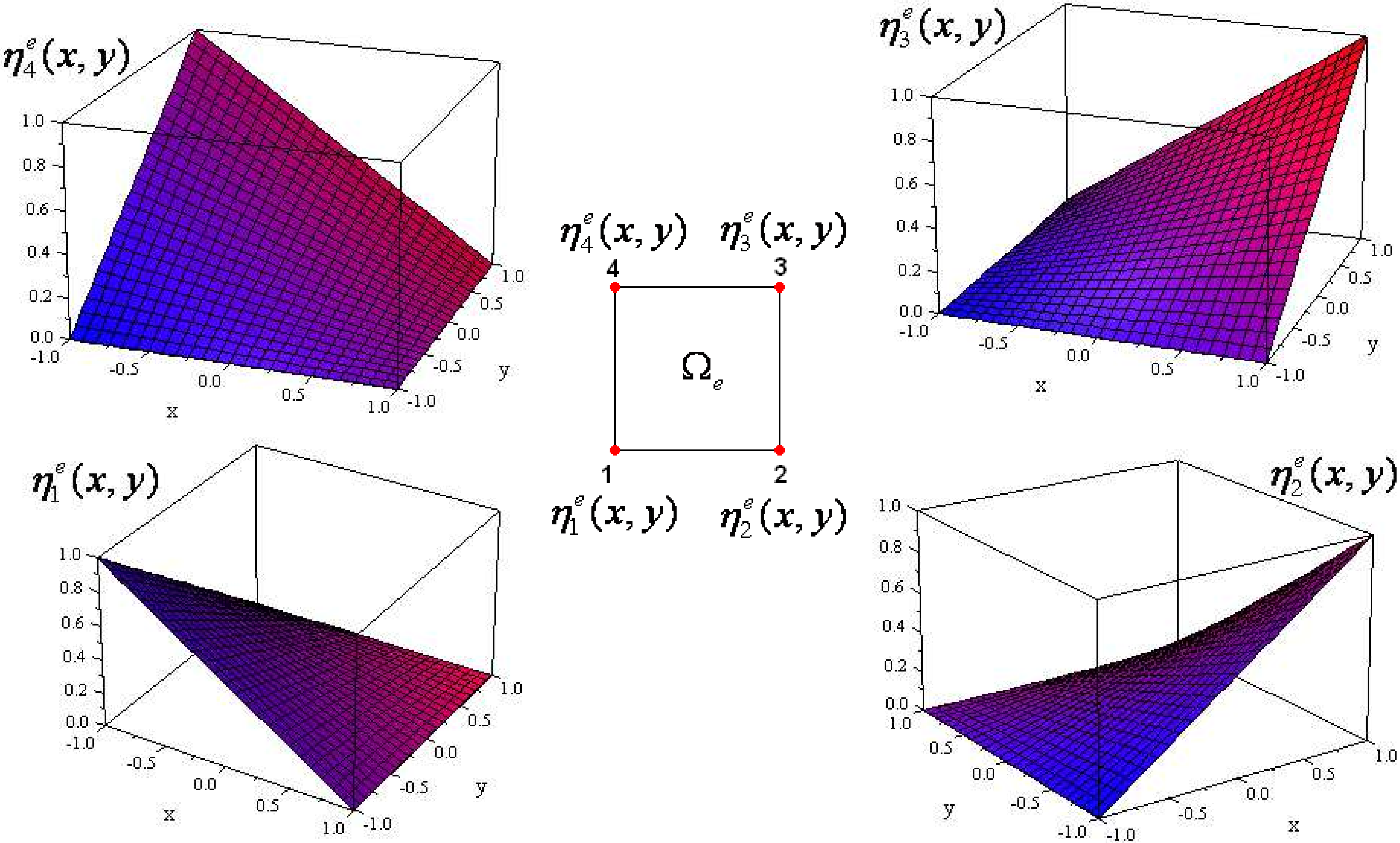
$$\eta_4^e(x,y) = \frac{(x - x_2^e)(y - y_1^e)}{(x_1^e - x_2^e)(y_4^e - y_1^e)}$$

A solução restrita ao elemento

$$u^e(x,y) = \sum_{i=1}^{4} u_i^e \eta_i^e(x,y) \quad \forall (x,y) \in \Omega_e$$

5.3- Solução de Equações Diferenciais Parciais: Problema de Valor de Contorno.

Note que as funções “forma” $\eta_l^e(x, y)$ da base verificam $\eta_l^e(x_m, y_m) = \delta_{lm}$



5.3- Solução de Equações Diferenciais Parciais: Problema de Valor de Contorno.

Substituindo para calcular a matriz de cada elemento e o termo independente segue:

$$A^e(u,v) = \int_{\Omega_e} \left[k(\nabla u \cdot \nabla v) + (\vec{\omega} \cdot \nabla u)v + \sigma uv \right] d\Omega \qquad F^e(v) = \int_{\Omega_e} g(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}) d\Omega$$

$$u^e(x,y) = \sum_{i=1}^{4} u_i^e \eta_i^e(x,y) \quad \forall (x,y) \in \Omega_e$$

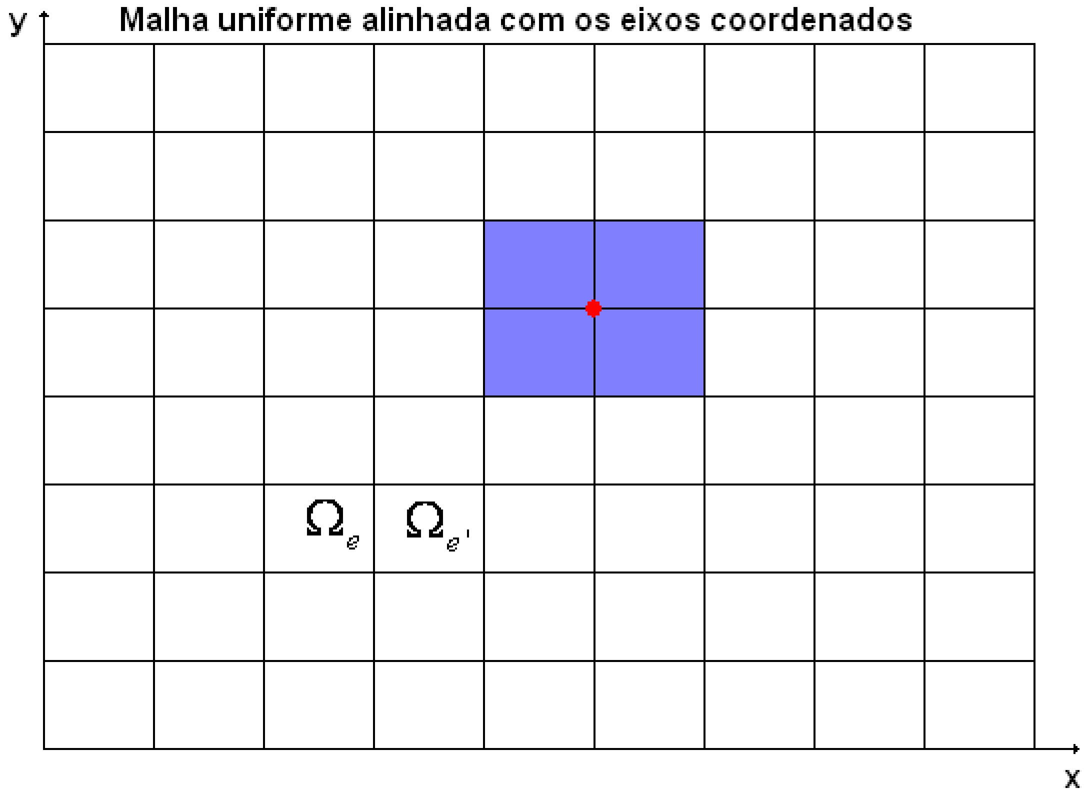
$$A^e(u^e, \eta_i^e) = \sum_{j=1}^{4} u_j^e \underbrace{\int_{\Omega_e} \left[k(\nabla \eta_j^e \cdot \nabla \eta_i^e) + (\vec{\omega} \cdot \nabla \eta_j^e)\eta_i^e + \sigma \eta_j^e \eta_i^e \right] d\Omega}_{a_{ij}^e}$$

$$F(\eta_i^e) = \underbrace{\int_{\Omega_e} g(x,y) \eta_i^e d\Omega}_{f_i^e}$$

Desta forma calculamos a contribuição de cada elemento e incorporamos na matriz e o vetor independente global.

5.3- Solução de Equações Diferenciais Parciais: Problema de Valor de Contorno.

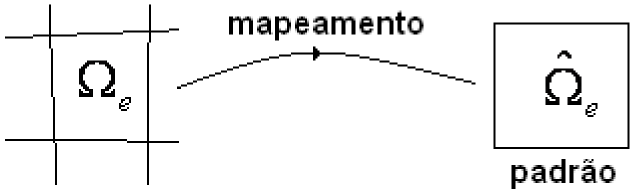
Para o caso de uma malha uniforme com todos os elementos iguais podemos fazer estes cálculos de forma analítica. Isto é possível porque a matriz para cada elemento e o vetor do termo independente serão “iguais” para todos os elementos. Apenas é necessário calcular um.

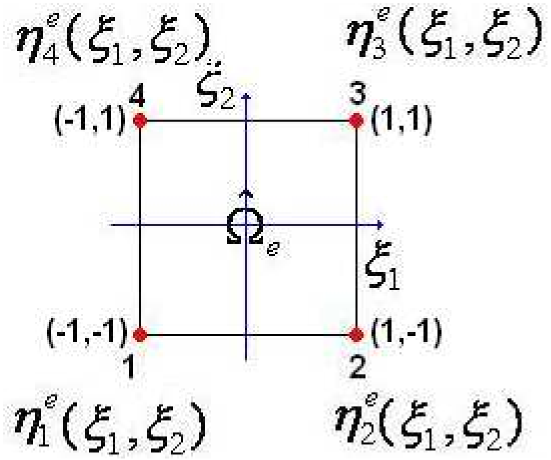


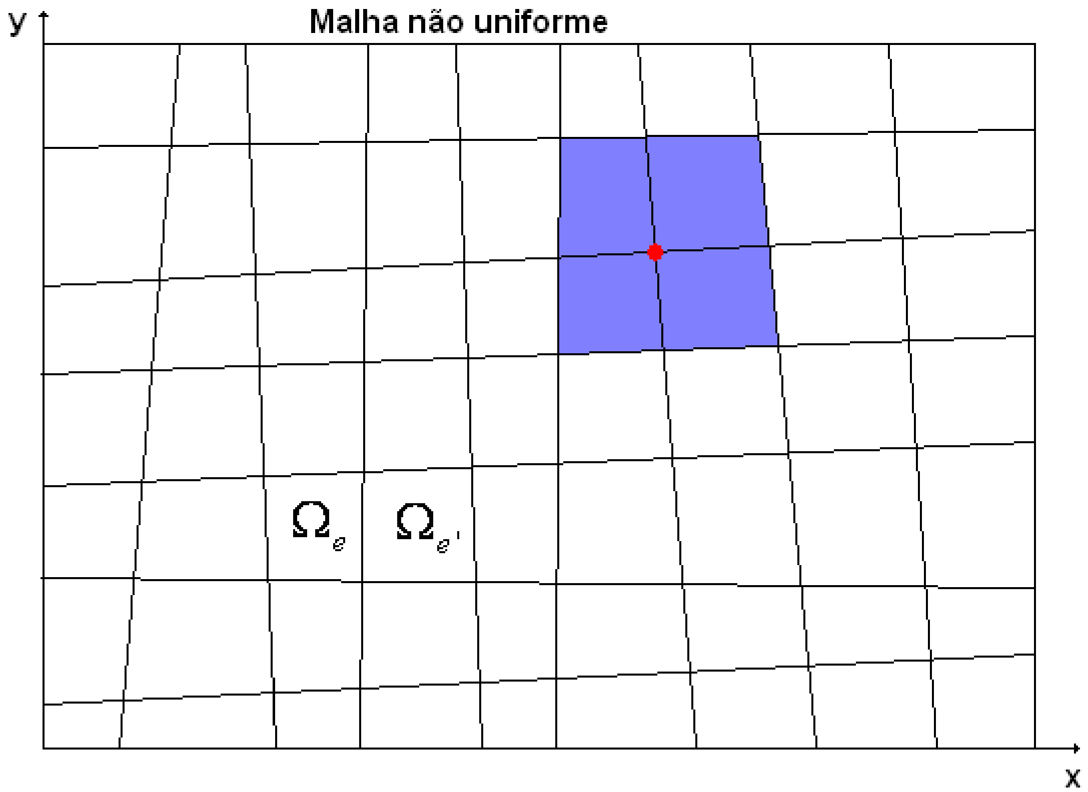
Mas se a malha não é deste tipo os cálculo analíticos são muito trabalhosos. Neste caso é necessário realizar uma transformação (mapeamento isoparamétrico) para que todos os elementos sejam transformados em um único elemento (elemento padrão).

5.3- Solução de Equações Diferenciais Parciais: Problema de Valor de Contorno.

As funções bases para o elemento padrão bilinear $\hat{\Omega}_e$ são $\eta_l^e(\xi_1, \xi_2)$:







$$\eta_1^e(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{4}(\xi_1 - 1)(\xi_2 - 1)$$

$$\eta_2^e(\xi_1, \xi_2) = -\frac{1}{4}(\xi_1 + 1)(\xi_2 - 1)$$

$$\eta_3^e(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{4}(\xi_1 + 1)(\xi_2 + 1)$$

$$\eta_4^e(\xi_1, \xi_2) = -\frac{1}{4}(\xi_1 - 1)(\xi_2 + 1)$$

5.3- Solução de Equações Diferenciais Parciais: Problema de Valor de Contorno.

Com esta mudança de variáveis temos $x(\xi_1,\xi_2)$ e $y(\xi_1,\xi_2)$:

$$\left.\begin{aligned} &\forall x \in \Omega_e \quad x(\xi_1,\xi_2)=\sum_{i=1}^{4} x_i^e \eta_i\,(\xi_1,\xi_2) \quad \forall(\xi_1,\xi_2)\in \hat{\Omega}_e \\ &\forall y \in \Omega_e \quad y(\xi_1,\xi_2)=\sum_{i=1}^{4} y_i^e \eta_i\,(\xi_1,\xi_2) \quad \forall(\xi_1,\xi_2)\in \hat{\Omega}_e \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\mathbf{T}:\hat{\Omega}_e \rightarrow \Omega_e \\ &\mathbf{T}^{-1}:\hat{\Omega}_e \rightarrow \Omega_e \end{aligned}$$

A matriz Jacobiana desta transformação e sua inversa são:

$$\mathbf{J}=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi_1} & \dfrac{\partial x}{\partial \xi_2} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \xi_1} & \dfrac{\partial y}{\partial \xi_2} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{J}^{-1}=\frac{1}{\det \mathbf{J}}\begin{bmatrix} \dfrac{\partial y}{\partial \xi_2} & -\dfrac{\partial x}{\partial \xi_2} \\ -\dfrac{\partial y}{\partial \xi_1} & \dfrac{\partial x}{\partial \xi_1} \end{bmatrix}, \quad \text{onde} \quad \mathbf{J}\mathbf{J}^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Um elemento padrão é chamado de isoparamétrico se as funções forma (base) podem ser usadas para representar tanto o mapeamento de $\hat{\Omega}_e$ em Ω_e quanto da função de interpolação

$$u^e(\xi_1,\xi_2)=\sum_{i=1}^{4} u_i^e \eta_i^e(\xi_1,\xi_2) \quad \forall(\xi_1,\xi_2)\in \hat{\Omega}_e \qquad\qquad u(\hat{\Omega}_e)\rightarrow u(\Omega_e)$$

5.3- Solução de Equações Diferenciais Parciais: Problema de Valor de Contorno.

Existem restrições para garantir a existência da transformação inversa $\mathbf{T}^{-1}:\hat{\Omega}_e \to \Omega_e$. Isto implica em restrições para malhas com elementos muito distorcido. Para garantir a existência da transformação inversa é necessário exigir para todos os elementos da malha que $\det \mathbf{J}(x_i^e, y_i^e) > 0 \ \ \forall i = 1,\cdots,4$. Ou seja, devem ser evitadas malhas com elementos deste tipo.

Lembrando que estamos querendo calcular para cada elemento e com a mudança de variáveis segue:

$$a(\eta_j^e,\eta_i^e) = \underbrace{\int_{\Omega_e} \left[k(\nabla \eta_j^e \cdot \nabla \eta_i^e) + (\vec{\omega}\cdot \nabla \eta_j^e)\eta_i^e + \sigma \eta_j^e \eta_i^e \right] d\Omega}_{a_{ij}^e} =$$

$$\int_{\hat{\Omega}_e} \left[k(\nabla \eta_j^e \cdot \nabla \eta_i^e) + (\vec{\omega}\cdot \nabla \eta_j^e)\eta_i^e + \sigma \eta_j^e \eta_i^e \right] \det \mathbf{J}\; d\xi_1 d\xi_2$$

$$f(\eta_i^e) = \underbrace{\int_{\Omega_e} g(x,y)\eta_i^e d\Omega}_{f_i^e} = \int_{\hat{\Omega}_e} g(\xi_1,\xi_2)\eta_i^e \det \mathbf{J}\; d\xi_1 d\xi_2$$

5.3- Solução de Equações Diferenciais Parciais: Problema de Valor de Contorno.

Devemos agora determinar as derivadas das funções base com respeito as novas coordenadas do elemento padrão.

$$\nabla \eta_j^e = \left(\frac{\partial \eta_j^e}{\partial x}, \frac{\partial \eta_j^e}{\partial y} \right) = \left(\frac{\partial \eta_j^e}{\partial \xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial x} + \frac{\partial \eta_j^e}{\partial \xi_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial x}, \frac{\partial \eta_j^e}{\partial \xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial y} + \frac{\partial \eta_j^e}{\partial \xi_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial y} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial \eta_j^e}{\partial \xi_1} & \frac{\partial \eta_j^e}{\partial \xi_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial x} & \frac{\partial \xi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial x} & \frac{\partial \xi_2}{\partial y} \end{bmatrix}$$

A matriz coincide com a matriz inversa da matriz Jacobiana:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial x} & \frac{\partial \xi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial x} & \frac{\partial \xi_2}{\partial y} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{J}} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \xi_2} & -\frac{\partial x}{\partial \xi_2} \\ -\frac{\partial y}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x}{\partial \xi_1} \end{bmatrix}$$

5.3- Solução de Equações Diferenciais Parciais: Problema de Valor de Contorno.

Agora estamos em condições de calcular:

$$a(\eta_j^e,\eta_i^e) = \int_{\hat{\Omega}_e} \left[k(\nabla\eta_j^e \cdot \nabla\eta_i^e) + (\vec{\omega}\cdot\nabla\eta_j^e)\eta_i^e + \sigma\eta_j^e\eta_i^e \right] \det \mathbf{J}\; d\xi_1 d\xi_2$$

$$= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \left[k(\nabla\eta_j^e \cdot \nabla\eta_i^e) + (\vec{\omega}\cdot\nabla\eta_j^e)\eta_i^e + \sigma\eta_j^e\eta_i^e \right] \det \mathbf{J}\; d\xi_1 d\xi_2$$

$$f(\eta_i^e) = \int_{\hat{\Omega}_e} g(\xi_1,\xi_2)\eta_i^e \det \mathbf{J}\; d\xi_1 d\xi_2 = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} g(\xi_1,\xi_2)\eta_i^e \det \mathbf{J}\; d\xi_1 d\xi_2$$

Como as funções integrando são polinômios estas integrais podem ser calculadas de forma exata usando quadratura de Gauss com um número de pontos de Gauss adequado para o grau dos polinômios usados.

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} g(\xi_1,\xi_2)\eta_i^e \det \mathbf{J}\; d\xi_1 d\xi_2 \approx \sum_{m=1}^{npg}\sum_{n=1}^{npg} w_m w_n g(\xi_1^m,\xi_2^n)\eta_i^e(\xi_1^m,\xi_2^n) \det \mathbf{J}(\xi_1^m,\xi_2^n)$$

5.3- Solução de Equações Diferenciais Parciais: Problema de Valor de Contorno.

Se a função integrando $g(\xi_1,\xi_2)\eta_i^e(\xi_1,\xi_2)$ é um polinômio de grau *N* e usamos *npg* pontos de Gauss na quadratura, então a quadratura de Gauss será exata se $N \leq 2\,npg - 1$. Finalmente, todas estes procedimentos para calcular a matriz do elemento e o vetor independente podem ser implementados em algoritmo computacional.

De posse das matrizes e vetores dos elementos é montada a matriz global e o vetor independente global.

Isto resulta num sistema de equações algébricas lineares $\mathbf{KU} = \mathbf{F}$ que pode ser resolvido por algum método já estudado.

Existem outros tipos de elementos padrões que podem ser encontrados na bibliografia. Entretanto o procedimento para chegar no sistema de equações algébrico linear é o mesmo ao apresentado nesta aula.

Frase do Dia

Perguntaram ao Dalai Lama …

O que mais te surpreende na Humanidade?

“Os homens… Porque perdem a saúde para juntar dinheiro, depois perdem dinheiro para recuperar a saúde.

E por pensarem ansiosamente no futuro, esquecem do presente de tal forma que acabam por não viver nem o presente nem o futuro.

E vivem como se nunca fossem morrer...

...e morrem como se nunca tivessem vivido.