1- Resolução de Sistemas Lineares.

1.1- Matrizes e Vetores.

1.2- Resolução de Sistemas Lineares de Equações Algébricas por Métodos Exatos (Diretos).

1.3- Resolução de Sistemas Lineares de Equações Algébricas por Métodos Iterativos.

1.4- Convergência dos Métodos Iterativos.

1.1- Matrizes e Vetores

Muitos problemas podem ser reduzidos a um sistema linear de *m* equações algébricas com *n* incógnitas.

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n &= b_2 \\
\cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots &\cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}
$$

$$
\begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n
\end{bmatrix}
\text{ ou } \quad \mathbf{Ax = b}
$$

1.1- Matrizes e Vetores

Processamento de Imagens: reconhecimento de padrões, aprendizagem de máquina.

$$
\begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}
\end{bmatrix}
$$

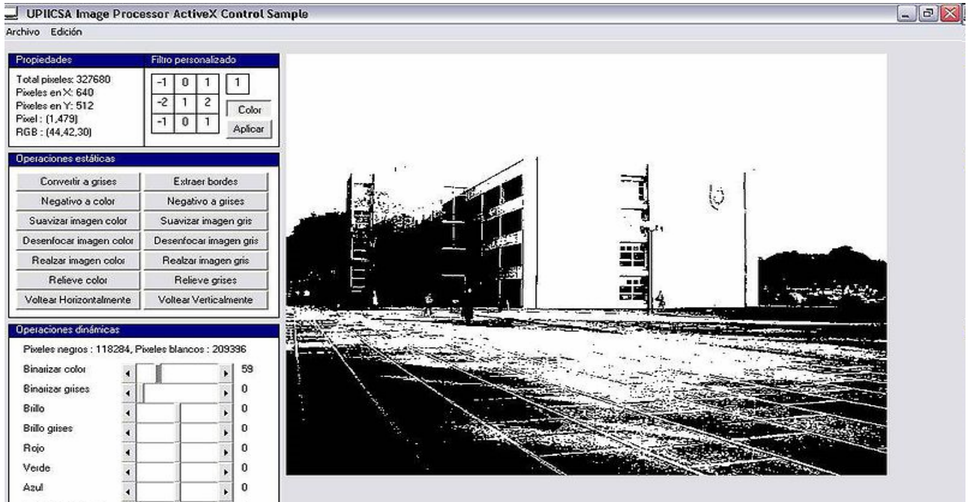

Imagem Binária

Pixel: menor parte de uma imagem

Matriz Numérica

Imagem gerada por Computação Gráfica

1.1.1- Definições Básicas

Uma matriz é um conjunto de números arranjados em forma retangular com *m* linhas e *n* colunas.

$$\mathbf{A}_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Matriz de ordem *mxn*, onde a_{ij} são os elementos.

$$\mathbf{A}_{n\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Se *m*=*n* a matriz é chamada quadrada de ordem *n*.

1.1.1- Definições Básicas

Se *m=1* a matriz é chamada vetor linha. Se *n=1* a matriz é chamada vetor coluna.

$$\mathbf{A}_{1\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix}$$

Matriz de ordem *1*x*n*, vetor linha.

$$\mathbf{A}_{m\times 1} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$$

Matriz de ordem *m*x*1*, vetor coluna.

Note que um escalar (número) pode ser representado como uma matriz de ordem *1*x*1*.

$$\mathbf{A}_{1\times 1} = \begin{bmatrix} a_{11} \end{bmatrix}$$

1.1.1- Definições Básicas

Uma matriz quadrada da forma

$$\mathbf{A}_{n\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

é chamada matriz diagonal. Se $a_{ij}=1$ temos a matriz identidade ou unidade:

$$\mathbf{A}_{n\times n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{E}_{n\times n} = \mathbf{I}_{n\times n}$$

Uma matriz com todos seus elementos zeros é chamada matriz zero e denotada por $\mathbf{0}_{m\times n}$.

1.1.1- Definições Básicas

Uma matriz quadrada é chamada matriz triangular superior (inferior) se os elementos abaixo (acima) da diagonal principal são zeros.

$$\mathbf{A}_{n\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Matriz Triangular Superior

$$\mathbf{A}_{n\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Matriz Triangular Inferior

1.1.2- Operações com Matrizes

Duas matrizes são dita ser iguais se tem a mesma ordem e seus elementos são todos iguais.

$$\mathbf{A}_{m\times n} = \mathbf{B}_{m\times n} \quad \text{se} \quad a_{ij} = b_{ij} \quad \forall i, j$$

Se define a soma entre duas matrizes da mesma ordem:

$$\mathbf{A}_{m\times n} + \mathbf{B}_{m\times n} = \mathbf{C}_{m\times n} \quad \text{tal que } c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

$$\mathbf{A}_{m\times n} + \mathbf{B}_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

Similarmente se define a diferença entre duas matrizes da mesma ordem.

1.1.2- Operações com Matrizes

Da definição de soma de matrizes seguem as propriedades:

$$\mathbf{A}_{m\times n}+(\mathbf{B}_{m\times n}+\mathbf{C}_{m\times n})=(\mathbf{A}_{m\times n}+\mathbf{B}_{m\times n})+\mathbf{C}_{m\times n}$$

$$\mathbf{A}_{m\times n}+\mathbf{B}_{m\times n}=\mathbf{B}_{m\times n}+\mathbf{A}_{m\times n}$$

$$\mathbf{A}_{m\times n}+\mathbf{0}_{m\times n}=\mathbf{A}_{m\times n}$$

Se define a multiplicação de uma matrizes por um escalar

$$\alpha\mathbf{A}_{m\times n}=\mathbf{A}_{m\times n}\alpha=\begin{bmatrix}\alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \cdots & \alpha a_{1n}\\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \cdots & \alpha a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \cdots & \alpha a_{mn}\end{bmatrix}$$

1.1.2- Operações com Matrizes

Da definição anterior seguem as propriedades:

$$1\mathbf{A}_{m\times n} = \mathbf{A}_{m\times n}$$

$$0\mathbf{A}_{m\times n} = \mathbf{0}_{m\times n}$$

$$\alpha(\beta\mathbf{A}_{m\times n}) = (\alpha\beta)\mathbf{A}_{m\times n}$$

$$(\alpha+\beta)\mathbf{A}_{m\times n} = \alpha\mathbf{A}_{m\times n} + \beta\mathbf{A}_{m\times n}$$

$$\alpha(\mathbf{A}_{m\times n} + \mathbf{B}_{m\times n}) = \alpha\mathbf{A}_{m\times n} + \alpha\mathbf{B}_{m\times n}$$

Se define a multiplicação entre duas matrizes como:

$$\mathbf{A}_{m\times q}\mathbf{B}_{q\times n} = \mathbf{C}_{m\times n} \text{ onde } (i = 1, 2, \ldots m;\ j = 1, 2, \ldots, n)$$

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{iq}b_{qj} = \sum_{l=1}^{q} a_{il}b_{lj}$$

1.1.2- Operações com Matrizes

Ou seja: $\mathbf{A}_{m\times q}\mathbf{B}_{q\times n} = \mathbf{C}_{m\times n}$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2q} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{q1} & b_{q2} & \cdots & b_{qn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix}$$

Desta definição seguem as propriedades:

$$\mathbf{A}_{m\times p}(\mathbf{B}_{p\times q}\mathbf{C}_{q\times n}) = (\mathbf{A}_{m\times p}\mathbf{B}_{p\times q})\mathbf{C}_{q\times n}$$

$$\alpha(\mathbf{A}_{m\times p}\mathbf{B}_{p\times n}) = (\alpha\mathbf{A}_{m\times p})\mathbf{B}_{p\times n}$$

$$(\mathbf{A}_{m\times p} + \mathbf{B}_{m\times p})\mathbf{C}_{p\times n} = \mathbf{A}_{m\times p}\mathbf{C}_{p\times n} + \mathbf{B}_{m\times p}\mathbf{C}_{p\times n} = \mathbf{D}_{m\times n}$$

$$\mathbf{C}_{q\times m}(\mathbf{A}_{m\times p} + \mathbf{B}_{m\times p}) = \mathbf{C}_{q\times m}\mathbf{A}_{m\times p} + \mathbf{C}_{q\times m}\mathbf{B}_{m\times p} = \widetilde{\mathbf{D}}_{q\times p}$$

1.1.2- Operações com Matrizes

Note que o produto de duas matrizes não é sempre comutativo:

$$\mathbf{A}_{m\times q}\mathbf{B}_{q\times n} = \mathbf{C}_{m\times n} \neq \mathbf{B}_{q\times n}\mathbf{A}_{n\times p} = \widetilde{\mathbf{C}}_{q\times p}$$

Quando $\mathbf{A}_{m\times n}\mathbf{B}_{n\times m} = \mathbf{B}_{n\times m}\mathbf{A}_{m\times n}$ se diz que as matrizes são comutativas (*m*=*n*). Por exemplo, a matriz identidade de ordem *n* é comutativa com toda matriz quadrada da mesma ordem e verifica: $\mathbf{A}_{n\times n}\mathbf{E}_{n\times n} = \mathbf{E}_{n\times n}\mathbf{A}_{n\times n} = \mathbf{A}_{n\times n}$. Note que a matriz identidade cumpre o rol da unidade no produto.

Exemplo:

$$\overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}}^{\mathbf{A}_{2\times 2}} \overbrace{\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}}^{\mathbf{B}_{2\times 2}} = \overbrace{\begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 16 & 17 \end{bmatrix}}^{\mathbf{C}_{2\times 2}} \neq \overbrace{\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}}^{\mathbf{B}_{2\times 2}} \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}}^{\mathbf{A}_{2\times 2}} = \overbrace{\begin{bmatrix} 13 & 20 \\ 7 & 10 \end{bmatrix}}^{\widetilde{\mathbf{C}}_{2\times 2}}$$

1.1.3- Matriz Transposta

Se define a matriz transposta como a troca das linhas pelas colunas de uma matriz:

$$\mathbf{A}_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{A}^{\mathbf{T}}_{n\times m} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Como caso particular a transposta de um vetor linha é um vetor coluna e vice-versa. Da definição seguem as propriedades:

$$(\mathbf{A}^{\mathbf{T}}_{m\times n})^{\mathbf{T}} = \mathbf{A}_{m\times n}$$

$$(\mathbf{A}_{m\times n} + \mathbf{B}_{m\times n})^{\mathbf{T}} = \mathbf{A}^{\mathbf{T}}_{m\times n} + \mathbf{B}^{\mathbf{T}}_{m\times n}$$

$$(\mathbf{A}_{m\times m}\mathbf{B}_{m\times m})^{\mathbf{T}} = \mathbf{B}^{\mathbf{T}}_{m\times m}\mathbf{A}^{\mathbf{T}}_{m\times m}$$

1.1.3- Matriz Transposta

Se diz que uma matriz é simétrica se ela é igual a sua transposta: $\mathbf{A}^{\mathbf{T}}_{m\times m} = \mathbf{A}_{m\times m}$ (tem que ser uma matriz quadrada)

$$\mathbf{A}_{m\times m} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix} = \mathbf{A}^{\mathbf{T}}_{n\times m} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix}$$

com $a_{ij} = a_{ji} \quad \forall i \neq j$. Note que o produto de uma matriz por sua transposta é sempre uma matriz simétrica porque:

$$\mathbf{B}_{m\times m} = \mathbf{A}_{m\times m}\mathbf{A}^{\mathbf{T}}_{m\times m} = (\mathbf{A}^{\mathbf{T}}_{m\times m})^{\mathbf{T}}\mathbf{A}^{\mathbf{T}}_{m\times m} = (\mathbf{A}_{m\times m}\mathbf{A}^{\mathbf{T}}_{m\times m})^{\mathbf{T}} = \mathbf{B}^{\mathbf{T}}_{m\times m}$$

onde foram usadas as propriedades

$$(\mathbf{A}^{\mathbf{T}}_{m\times n})^{\mathbf{T}} = \mathbf{A}_{m\times n} \qquad (\mathbf{A}_{m\times m}\mathbf{B}_{m\times m})^{\mathbf{T}} = \mathbf{B}^{\mathbf{T}}_{m\times m}\mathbf{A}^{\mathbf{T}}_{m\times m}$$

1.1.4- Matriz Inversa e Determinante

Uma matriz quadrada tem inversa se seu produto pela direita e pela esquerda com esta matriz produz a matriz identidade:

$$\mathbf{A}_{n\times n}\mathbf{A}_{n\times n}^{-1} = \mathbf{A}_{n\times n}^{-1}\mathbf{A}_{n\times n} = \mathbf{E}_{n\times n}$$

A toda matriz quadrada pode ser associado um número chamado de determinante da matriz e definido como:

$$\det \mathbf{A}_{n\times n} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)} (-1)^{\aleph} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \cdots a_{n\alpha_n}$$

onde a soma é realizada sobre todas as permutações de $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ dos elementos $1, 2, \cdots n$ e $\aleph$ é 0 se a permutação é par e 1 se é impar.

1.1.4- Matriz Inversa e Determinante

Exemplo:

$$\mathbf{A}_{3\times 3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \qquad \det \mathbf{A}_{3\times 3} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)} (-1)^{\aleph} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} a_{3\alpha_3} = (-1)^0 a_{11}a_{22}a_{33} + (-1)^1 a_{11}a_{23}a_{32} +$$

$$(-1)^0 a_{12}a_{22}a_{31} + (-1)^1 a_{12}a_{21}a_{32} + (-1)^0 a_{13}a_{21}a_{32} + (-1)^1 a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{32} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$\det \mathbf{E}_{n\times n} = 1$$

Para duas matrizes quadradas da mesma ordem se verifica:

$$\det(\mathbf{A}_{n\times n}\mathbf{B}_{n\times n}) = \det(\mathbf{B}_{n\times n}\mathbf{A}_{n\times n}) = \det \mathbf{A}_{n\times n} \det \mathbf{B}_{n\times n}$$

1.1.4- Matriz Inversa e Determinante

Uma matriz quadrada é dita ser singular se seu determinante é zero. Caso contrário é dita ser não singular.

Teorema: Toda matriz quadrada não singular possui uma inversa (única).

Algumas propriedades de uma matriz inversa:

1- $\det \mathbf{A}_{n\times n}^{-1} \det \mathbf{A}_{n\times n} = 1$ ou $\det \mathbf{A}_{n\times n}^{-1} = 1/\det \mathbf{A}_{n\times n}$

2- $(\mathbf{A}_{n\times n}\mathbf{B}_{n\times n})^{-1} = \mathbf{B}_{n\times n}^{-1}\mathbf{A}_{n\times n}^{-1}$

3- $(\mathbf{A}_{n\times n}^{-1})^{\mathbf{T}} = (\mathbf{A}_{n\times n}^{\mathbf{T}})^{-1}$

Note que as equações $\mathbf{A}_{n\times n}\mathbf{X}_{n\times n} = \mathbf{B}_{n\times n}$ e $\mathbf{Y}_{n\times n}\mathbf{A}_{n\times n} = \mathbf{B}_{n\times n}$ podem ser resolvidas através da inversa se $\det \mathbf{A}_{n\times n} \neq 0$

$$\mathbf{X}_{n\times n} = \mathbf{A}_{n\times n}^{-1}\mathbf{B}_{n\times n} \quad \text{e} \quad \mathbf{Y}_{n\times n} = \mathbf{B}_{n\times n}\mathbf{A}_{n\times n}^{-1}$$

1.1.5- Valor Absoluto e Norma de uma Matriz

A desigualdade $\mathbf{A}_{m\times n} \leq \mathbf{B}_{m\times n}$ entre matrizes da mesma ordem significa que $a_{ij} \leq b_{ij}$. Se define $\left|\mathbf{A}_{m\times n}\right|$ como a matriz cujos elementos são $\left|a_{ij}\right|$. Se $\mathbf{A}_{m\times n}$ e $\mathbf{B}_{m\times n}$ são matrizes para as quais faz sentido as operações de soma e produto, então:

$$\left|\mathbf{A}_{m\times n} + \mathbf{B}_{m\times n}\right| \leq \left|\mathbf{A}_{m\times n}\right| + \left|\mathbf{B}_{m\times n}\right|$$

$$\left|\mathbf{A}_{m\times n}\mathbf{B}_{m\times n}\right| \leq \left|\mathbf{A}_{m\times n}\right|\left|\mathbf{B}_{m\times n}\right|$$

$$\left|\alpha\mathbf{A}_{m\times n}\right| \leq \left|\alpha\right|\left|\mathbf{A}_{m\times n}\right|$$ com α sendo um escalar.

Observe que estas definições são construídas de forma a preservar os conhecimentos que se verificam para os números (escalares - Matriz de ordem 1).

1.1.5- Valor Absoluto e Norma de uma Matriz

Definimos como norma de uma matriz um número real $\left\|\mathbf{A}_{m\times n}\right\|$ que satisfaz as seguintes condições:

a) $\left\|\mathbf{A}_{m\times n}\right\| \geq 0$ com $\left\|\mathbf{A}_{m\times n}\right\| = 0$ se e somente se $\mathbf{A}_{m\times n} = \mathbf{0}_{m\times n}$

b) $\left\|\alpha\mathbf{A}_{m\times n}\right\| \leq |\alpha|\left\|\mathbf{A}_{m\times n}\right\|$

c) $\left\|\mathbf{A}_{m\times n} + \mathbf{B}_{m\times n}\right\| \leq \left\|\mathbf{A}_{m\times n}\right\| + \left\|\mathbf{B}_{m\times n}\right\|$

d) $\left\|\mathbf{A}_{m\times n}\mathbf{B}_{m\times n}\right\| \leq \left\|\mathbf{A}_{m\times n}\right\|\left\|\mathbf{B}_{m\times n}\right\|$

Note que usando c) segue:

$$\left\|\mathbf{B}_{m\times n}\right\| = \left\|\mathbf{A}_{m\times n} + (\mathbf{B}_{m\times n} - \mathbf{A}_{m\times n})\right\| \leq \left\|\mathbf{A}_{m\times n}\right\| + \left\|\mathbf{B}_{m\times n} - \mathbf{A}_{m\times n}\right\|$$

logo $\left\|\mathbf{A}_{m\times n} - \mathbf{B}_{m\times n}\right\| = \left\|\mathbf{B}_{m\times n} - \mathbf{A}_{m\times n}\right\| \geq \left\|\mathbf{B}_{m\times n}\right\| - \left\|\mathbf{A}_{m\times n}\right\|$

Similarmente $\left\|\mathbf{A}_{m\times n} - \mathbf{B}_{m\times n}\right\| \geq \left\|\mathbf{A}_{m\times n}\right\| - \left\|\mathbf{B}_{m\times n}\right\|$ logo

$$\left\|\mathbf{A}_{m\times n} - \mathbf{B}_{m\times n}\right\| \geq \left\|\mathbf{B}_{m\times n}\right\| - \left\|\mathbf{A}_{m\times n}\right\|$$

1.1.5- Valor Absoluto e Norma de uma Matriz

Entre todas as normas possíveis $\left\| \mathbf{A}_{p\times q} \right\|$ destacamos três:

1) $\left\| \mathbf{A}_{p\times q} \right\|_m = \max\limits_i \sum\limits_j \left| a_{ij} \right|$ (m-norma)

2) $\left\| \mathbf{A}_{p\times q} \right\|_l = \max\limits_j \sum\limits_i \left| a_{ij} \right|$ (l-norma)

3) $\left\| \mathbf{A}_{p\times q} \right\|_k = \sqrt{\sum\limits_{i,j} \left| a_{ij} \right|^2}$ (k-norma)

Exemplo: $\mathbf{A}_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

$\left\| \mathbf{A}_{2\times 2} \right\|_m = \max\limits_i \{3, 7\} = 7$ (m-norma)

$\left\| \mathbf{A}_{2\times 2} \right\|_l = \max\limits_j \{4, 6\} = 6$ (l-norma)

$\left\| \mathbf{A}_{2\times 2} \right\|_k = \sqrt{1+4+9+16} = \sqrt{30}$ (k-norma)

1.1.5- Valor Absoluto e Norma de uma Matriz

Outro exemplo, agora para a matriz identidade $\mathbf{E}_{n\times n}$:

$$\left\|\mathbf{E}_{n\times n}\right\|_m = 1 \text{ (m-norma)}$$

$$\left\|\mathbf{E}_{n\times n}\right\|_l = 1 \text{ (l-norma)}$$

$$\left\|\mathbf{E}_{n\times n}\right\|_k = \sqrt{n} \text{ (k-norma)}$$

1.1.6- Rank de uma Matriz

Seja uma matriz retangular de ordem *mxn*. Chamamos Menor de ordem *k* desta matriz ao determinante da matriz de ordem *k* formada pela escolha arbitrária de *k* linhas e *k* colunas, onde $k \leq \min(m, n)$

$$\mathbf{A}_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Menor de Ordem 2

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{m1} & a_{m2} \end{vmatrix}$$

Definição: O Rank de uma matriz é a ordem do maior Menor não nulo da matriz. Ou seja, a matriz $\mathbf{A}_{m\times n}$ tem Rank *r* se:

1- existe pelo menos um Menor de ordem *r* diferente de zero,

2- todos os Menores de ordem maior ou igual a *r+1* são zero.

1.1.6- Rank de uma Matriz

Em outras palavras, o Rank corresponde ao número de linhas e colunas linearmente independentes da matriz. O Rank da matriz zero é definido como zero. Note que o Rank da Matriz Identidade de ordem *n* é *n*.

$$\mathbf{A}_{4\times 4} = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -7 & 4 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \qquad \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \qquad \det \mathbf{A}_{4\times 4} = 0$$

Logo o Rank de $\mathbf{A}_{4\times 4}$ é 3.

1.1.7- Transformações Elementares de uma Matriz

1- Intercambio de duas linhas ou duas colunas.

2- Produto de todos os elementos de uma linha (coluna) pelo mesmo número diferente de zero.

3- Soma dos elementos de uma linha (coluna) pelos elementos de outra linha (coluna).

Duas matrizes são dita ser equivalentes se uma pode ser obtida a partir da outra através de um número finito de transformações elementares.

As matrizes equivalentes não são iguais, mas tem o mesmo Rank.

$$\mathbf{A}_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \widetilde{\mathbf{A}}_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} = 2\mathbf{A}_{3\times 3} \quad \text{Rank=3}$$

1.1.8- Independência Linear e Base

Um conjunto de vetores $\mathbf{x}^j, \quad \text{com}\, j = 1, \cdots, m$ é dito ser linearmente dependente se $\alpha_1 \mathbf{x}^1 + \alpha_2 \mathbf{x}^2 + \cdots + \alpha_m \mathbf{x}^m = 0$ para algum escalar $\alpha_j \neq 0$. Ou seja, se algum destes vetores é uma combinação linear dos outros. Caso contrario se diz que os vetores são linearmente independente.

Teorema: Um espaço de *n* dimensão tem no máximo *n* vetores linearmente independentes.

Definição: Qualquer conjunto de *n* vetores linearmente independente de um espaço de dimensão *n* é uma base deste espaço.

Teorema: Todo vetor de um espaço de dimensão *n* pode ser representado de forma única como combinação linear dos vetores de uma base.

1.1.9- Produto Escalar (Interno)

Sejam os vetores de números complexos $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$

e $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$. Se define o produto escalar como o número

$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i^*$ onde y_i^* é o complexo conjugado.

Propriedades do Produto Escalar:

1- Positivo definido $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i x_i^* = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \geq 0$ e $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$ se e somente se $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

2- Simetria Hermitiana $(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \mathbf{y})^*$.

3- $(\alpha \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \alpha (\mathbf{x}, \mathbf{y})$ onde α é um escalar.

Definição: Dois vetores são dito ser ortogonais se seu produto escalar é zero: $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$.

1.1.10- Alguns Propriedades de uma Matriz

Matriz Não Singular	**Matriz Singular**
Tem inversa	Não tem inversa
As colunas são independentes	As colunas são dependentes
As linhas são independentes	As linhas são dependentes
O determinante é não zero	O determinante é zero
Ax=0 tem uma única solução **x=0**	**Ax=0** tem infinitas soluções
Ax=b tem uma única solução $\mathbf{x=A^{-1}b}$	**Ax=b** não tem solução ou tem infinitas
A tem n pivôs (não zero)	**A** tem **r<n** pivôs
Rank = n ordem da matriz	**Rank<n**
Todos os autovalores são não zero	Zero é um dos autovalores da matriz
$\mathbf{A^TA}$ é simétrica e definida positiva	$\mathbf{A^TA}$ não é definida positiva

Frase do Dia

"Number rules the Universe."

The Pythagoreans

Comentário sobre os números racionais e irracionais.