

5- Método de Elementos Finitos Aplicado às Equações Diferenciais Parciais.

5.1- Breve Introdução Histórica.

5.2- Solução de Equações Diferenciais Ordinárias: Problema de Valor de Contorno.

5.3- Solução de Equações Diferenciais Parciais: Problema de Valor de Contorno.

5.3.1- Aproximações (Fontes de Erro).

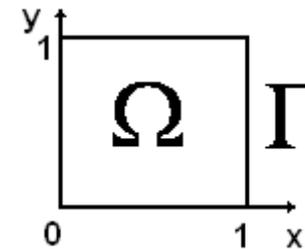
5.3.1- Aproximações (Fontes de Erro).

O MEF foi apresentado para um Problema de Valor de Contorno em Duas Dimensões. Especificamente, para a Equação Bidimensional da Difusão-Advecção-Reação Linear e Estacionária definida num domínio quadrado unitário com condições de contorno de Dirichlet.

Formulação Forte (PVC): Encontrar $u \in S_{\text{Forte}}$ tal que satisfaz

$$\underbrace{\nabla \cdot (-k \nabla u)}_{\text{Difusão}} + \underbrace{\vec{\omega} \cdot \nabla u}_{\text{Advecção}} + \underbrace{\sigma u}_{\text{Reação}} = \underbrace{g(\mathbf{x})}_{\text{Fonte Externa}} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (\text{EDP})$$

$$u(\Gamma) = u_{\Gamma} \quad \{\text{Condição de Dirichlet}$$



A **Formulação Fraca** correspondente a este problema é colocada a seguir:

5.3.1- Aproximações (Fontes de Erro).

Formulação Fraca: Encontrar $u \in S$ que satisfaz

$$\underbrace{\int_{\Omega} [k(\nabla u \cdot \nabla v) + (\vec{\omega} \cdot \nabla u)v + \sigma uv] d\Omega}_{A(u,v)} = \underbrace{\int_{\Omega} g(\mathbf{x})v(\mathbf{x})d\Omega}_{F(v)} \quad \forall v \in V$$

ou na forma compacta $A(u, v) = F(v) \quad \forall v \in V$, onde

$$S = \{\phi \in H^1(\Omega) : \phi = u(\Gamma) \text{ em } \Gamma\}, \quad V = \{\phi \in H^1(\Omega) : \phi = 0 \text{ em } \Gamma\} = H_0^1(\Omega)$$

$$H^1(\Omega) = \left\{ \phi \in L^2(\Omega) \text{ e } \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \right\}, \quad H_0^1(\Omega) = \{\phi \in H^1(\Omega) : \phi = 0 \text{ em } \Gamma\}$$

$$L^2(\Omega) = \left\{ \phi : (\phi, \phi) \equiv \int_{\Omega} \phi \phi d\Omega < \infty \right\} \quad \text{Espaço das funções quadrado integráveis}$$

Note que $u \in S$ e $v \in V$ devem satisfazer as condições de contorno exigidas para elas e possuir um grau de “regularidade” tal que sejam quadrado integráveis e com primeira derivada também quadrado integrável.

5.3.1- Aproximações (Fontes de Erro).

Método de Elementos Finitos: Seja $M^h = \{\Omega_1, \dots, \Omega_{ne}\}$ uma partição de Ω em ne elementos da malha tal que $\Gamma \cup \Omega = \overline{\Omega} = \bigcup_{e=1}^{ne} \overline{\Omega}_e$ e $\Omega_e \cap \Omega_{e'} = 0$ se $e \neq e'$ (elementos disjuntos). O diâmetro (parâmetro) da malha é definido como $h = \max_{1 \leq e \leq ne} \{h_e\}$, onde h_e é o diâmetro de cada elemento finito.

$$A(\mathbf{v}^h, \mathbf{u}^h) \equiv \underbrace{\sum_{e=1}^{ne} \int_{\Omega_e} [k \nabla u \cdot \nabla v + (\vec{\omega} \cdot \nabla u^h) v^h + \sigma u v] d\Omega}_{A^e(\mathbf{v}^h, \mathbf{u}^h)} = \underbrace{\sum_{e=1}^{ne} \int_{\Omega_e} g v^h d\Omega}_{F^e(\mathbf{v}^h)} \equiv F(\mathbf{v}^h)$$

Ou na forma compacta $A(\mathbf{v}^h, \mathbf{u}^h) = F(\mathbf{v}^h) \Leftrightarrow \sum_{e=1}^{ne} A^e(\mathbf{v}^h, \mathbf{u}^h) = \sum_{e=1}^{ne} F^e(\mathbf{v}^h)$

Devemos escolher uma **base** para cada elemento da malha.

Geralmente são usados **polinômios** $P^k(\Omega_e)$ para **construir a base**.

Devemos também realizar uma transformação de variáveis para

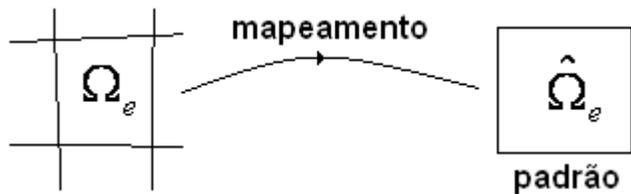
mapear todos os elementos através do **elemento padrão**

(**mapeamento isoparamétrico**). Isto transforma as integrais para

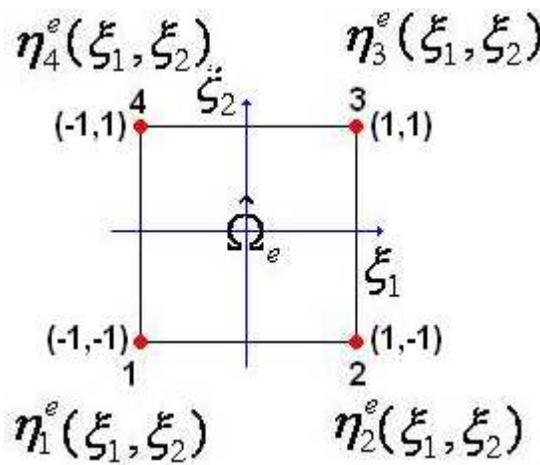
cada elemento nas seguintes integrais:

5.3.1- Aproximações (Fontes de Erro).

Nas integrais correspondente a cada elemento da malha Ω_e usamos uma substituição de variáveis que permite mapear todos os elementos da malha através de um único elemento $\hat{\Omega}_e$ (padrão). Ou seja, trocamos as variáveis (x, y) por (ξ_1, ξ_2) na forma:



$$\left. \begin{aligned} x(\xi_1, \xi_2) &= \sum_{i=1}^4 x_i^e \eta_i(\xi_1, \xi_2) \\ y(\xi_1, \xi_2) &= \sum_{i=1}^4 y_i^e \eta_i(\xi_1, \xi_2) \end{aligned} \right\}$$



$$\begin{aligned} \eta_1^e(\xi_1, \xi_2) &= \frac{1}{4}(\xi_1 - 1)(\xi_2 - 1) \\ \eta_2^e(\xi_1, \xi_2) &= -\frac{1}{4}(\xi_1 + 1)(\xi_2 - 1) \\ \eta_3^e(\xi_1, \xi_2) &= \frac{1}{4}(\xi_1 + 1)(\xi_2 + 1) \\ \eta_4^e(\xi_1, \xi_2) &= -\frac{1}{4}(\xi_1 - 1)(\xi_2 + 1) \end{aligned}$$

Então, as integrais para cada elemento se transformam em:

$$\int_{\Omega_e} f(x, y) d\Omega = \int_{\hat{\Omega}_e} f(x(\xi_1, \xi_2), y(\xi_1, \xi_2)) \det \mathbf{J} d\xi_1 d\xi_2$$

5.3- Solução de Equações Diferenciais Parciais: Problema de Valor de Contorno.

Com esta mudança de variáveis temos $x(\xi_1, \xi_2)$ e $y(\xi_1, \xi_2)$:

$$\left. \begin{aligned} \forall x \in \Omega_e \quad x(\xi_1, \xi_2) &= \sum_{i=1}^4 x_i^e \eta_i(\xi_1, \xi_2) \quad \forall (\xi_1, \xi_2) \in \hat{\Omega}_e \\ \forall y \in \Omega_e \quad y(\xi_1, \xi_2) &= \sum_{i=1}^4 y_i^e \eta_i(\xi_1, \xi_2) \quad \forall (\xi_1, \xi_2) \in \hat{\Omega}_e \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \mathbf{T} : \hat{\Omega}_e &\rightarrow \Omega_e \\ \mathbf{T}^{-1} : \hat{\Omega}_e &\rightarrow \Omega_e \end{aligned}$$

A matriz Jacobiana desta transformação e sua inversa são:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi_1} & \frac{\partial y}{\partial \xi_2} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{J}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{J}} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \xi_2} & -\frac{\partial x}{\partial \xi_2} \\ -\frac{\partial y}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x}{\partial \xi_1} \end{bmatrix}, \quad \text{onde} \quad \mathbf{J}\mathbf{J}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Um elemento padrão é chamado de **isoparamétrico** se as funções forma (**base**) podem ser usadas para representar tanto o mapeamento de $\hat{\Omega}_e$ em Ω_e quanto da função de interpolação

$$u^e(\xi_1, \xi_2) = \sum_{i=1}^4 u_i^e \eta_i^e(\xi_1, \xi_2) \quad \forall (\xi_1, \xi_2) \in \hat{\Omega}_e \quad u(\hat{\Omega}_e) \rightarrow u(\Omega_e)$$

5.3- Solução de Equações Diferenciais Parciais: Problema de Valor de Contorno.

As integrais no elemento padrão são calculadas usando
Quadratura de Gauss

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_e} f(x, y) d\Omega &= \int_{\hat{\Omega}_e} f(x(\xi_1, \xi_2), y(\xi_1, \xi_2)) \det \mathbf{J} d\xi_1 d\xi_2 \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x(\xi_1, \xi_2), y(\xi_1, \xi_2)) \det \mathbf{J} d\xi_1 d\xi_2 \\ &\approx \sum_{m=1}^{npg} \sum_{n=1}^{npg} w_m w_n f(x(\xi_1^m, \xi_2^n), y(\xi_1^m, \xi_2^n)) \det \mathbf{J}(\xi_1^m, \xi_2^n)\end{aligned}$$

Como a base escolhida são polinômios, então as funções integrando são **polinômios de grau N** . Estas integrais podem ser calculadas de forma exata usando **Quadratura de Gauss** com um **número de pontos de Gauss** adequado para o **grau dos polinômios** usados: $N \leq 2 npg - 1$. Finalmente chegamos ao **Sistema Linear de Equações Algébricas**: $\mathbf{KU} = \mathbf{F}$. Em toda esta metodologia destacamos três **fontes de erro**: **Interpolação**, **Quadratura** e **Domínio**.

5.3.1- Aproximações (Fontes de Erro).

MELHOR APROXIMAÇÃO E ESTIMATIVA DE ERRO.

Suponha o PVC Elíptico exato escrito na forma variacional.

Encontrar $u \in S = \{ \phi \in H^1(\Omega) : \phi = u(\Gamma) \text{ em } \Gamma \}$ tal que

$$\underbrace{\int_{\Omega} [k \nabla u \cdot \nabla v + \sigma uv] d\Omega}_{A(v,u)} = \underbrace{\int_{\Omega} g v d\Omega}_{(g,v)} \quad \forall v \in V = \{ \phi \in H^1(\Omega) : \phi = 0 \text{ em } \Gamma \}$$

A Aproximação por Elementos Finitos consiste em encontrar

$u^h \in S^h \subset S$ tal que $\forall v^h \in V^h \subset V$ satisfaz $A(v^h, u^h) = (g, v^h)$.

Assumimos que $A(\circ, \circ)$ e $\|\circ\|_1$ são **normas equivalentes** em V , ou seja, $c_1 \|v\|_1 \leq [A(v, v)]^{1/2} \leq c_2 \|v\|_1 \quad \forall v \in V$

Aqui c_1 e c_2 são duas constantes que não dependem de v e

$$\|v\|_1 = \left[\int_{\Omega} [v v + \nabla v \cdot \nabla v] d\Omega \right]^{1/2}$$

5.3.1- Aproximações (Fontes de Erro).

Teorema: Seja $e = u^h - u$ o erro da aproximação por elementos finitos, então i) $A(v^h, e) = 0 \quad \forall v^h \in V^h$,

$$ii) A(e, e) \leq A(U^h - u, U^h - u) \quad \forall U^h \in S^h.$$

A sentença i) significa que o erro é ortogonal ao subespaço $V^h \subset V$ ou que u^h é a projeção de u em S^h com respeito a $A(\circ, \circ)$.

A sentença ii) significa que não existe nenhum elemento de S^h que aproxima melhor a solução exata u com respeito a norma $A(\circ, \circ)$ que a solução do método de elemento finito de Galerkin u^h (propriedade de melhor aproximação).

Prova do Teorema:

i) Partindo de $A(v, u) = (g, v)$ e como $V^h \subset V$ segue que

$$A(v^h, u) = (g, v^h) \quad \forall v^h \in V^h. \text{ Subtraindo de } A(v^h, u^h) = (g, v^h) \text{ e usando a bi-linearidade de } A(\circ, \circ) \text{ obtemos}$$
$$0 = A(v^h, u^h) - A(v^h, u) = A(v^h, e).$$

5.3.1- Aproximações (Fontes de Erro).

ii) Seja $v^h \in V^h$. Como $A(\cdot, \cdot)$ é simétrica e bi-linear se verifica:

$$A(e + v^h, e + v^h) = A(e, e) + \underbrace{2A(v^h, e)}_{=0 \text{ por } i} + A(v^h, v^h).$$

Como $A(v^h, v^h) \geq 0$ segue que $A(e, e) \leq A(e + v^h, e + v^h)$.

Qualquer elemento $U^h \in S^h$ pode ser escrito como $U^h = u^h + v^h$ para algum $v^h \in V^h$. Como $e + v^h = u^h - u + v^h = U^h - u$ segue que

$$A(e, e) \leq A(e + v^h, e + v^h) = A(U^h - u, U^h - u). \blacksquare$$

ESTIMATIVA DE ERRO

O espaço de funções do método de elemento finitos verifica a seguinte propriedade de aproximação. Seja $u \in H^r$, então existe uma função $u^{h,I} \in S^h$ (chamada de interpolante) tal que

$\|u - u^{h,I}\|_m \leq ch^\alpha \|u\|_r$, onde c é uma constante que não depende do parâmetro da malha h e de u , $\alpha = \min\{k + 1 - m, r - m\}$, k é o grau do polinômio das funções bases.

5.3.1- Aproximações (Fontes de Erro).

Teorema: A propriedade de Aproximação $\|u - u^{h,I}\|_m \leq ch^\alpha \|u\|_r$ e a propriedade de Melhor Aproximação da solução do método de elemento finito de Galerkin para o Problema de Valor de Contorno Elíptico de segunda ordem implicam na seguinte estimativa de erro:

$$\|e\|_m \leq Ch^\alpha \|u\|_r, \text{ onde } C \text{ é uma constante que não depende de } u \text{ e } h.$$

Prova: Como $A(\cdot, \cdot)$ e $\|\cdot\|_1$ são normas equivalentes segue

$c_1 \|e\|_m \leq [A(e, e)]^{1/2} \leq c_2 \|e\|_m \Rightarrow \|e\|_m \leq \frac{1}{c_1} [A(e, e)]^{1/2}$ e pela propriedade de melhor aproximação $ii) A(e, e) \leq A(U^h - u, U^h - u) \quad \forall U^h \in S^h$ segue

$$\frac{1}{c_1} [A(e, e)]^{1/2} \leq \frac{1}{c_1} [A(u - U^h, u - U^h)]^{1/2} \leq \frac{c_2}{c_1} \|e\|_m = \frac{c_2}{c_1} \|u - U^h\|_m \Rightarrow$$

$$\|e\|_m \leq \frac{c_2}{c_1} ch^\alpha \|u\|_r = Ch^\alpha \|u\|_r \text{ se escolhermos } U^h = u^{h,I} \text{ (interpolante). } \blacksquare$$

A escolha de U^h é arbitrária. Logo, $U^h = u^{h,I}$ é uma escolha possível.

5.3.1- Aproximações (Fontes de Erro).

Quando $k+1$ e r são maiores que m (ordem da maior derivada que aparece em $A(\circ, \circ)$) obtemos a chamada convergência ótima na norma H^m .

Se u é suave tal que $u \in H^{k+1}$, então o erro do método de elemento finito de Galerkin satisfaz:

$$\|e\|_m \leq Ch^{k+1-m} \|u\|_{k+1}$$

que para o caso de $m=0$, $m=1$ e $k=1$ polinômios bi-lineares verifica

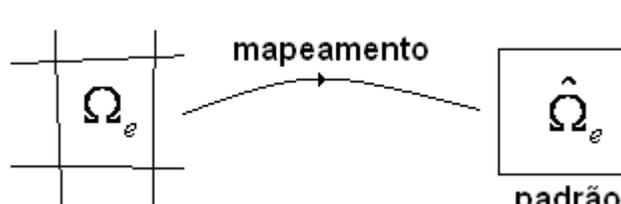
$$\left. \begin{array}{l} \|e\|_0 = \|e\|_{H^0} = \|e\|_{L^2} \leq Ch^{k+1} \|u\|_{k+1} \\ \|e\|_1 = \|e\|_{H^1} \leq Ch^k \|u\|_{k+1} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \|e\|_{L^2} \leq Ch^2 \|u\|_{H^2} \\ \|e\|_{H^1} \leq Ch \|u\|_{H^2} \end{cases}$$

Estas estimativas de erro correspondem ao erro devido a aproximação de Galerkin (funções de interpolação). Se assume que todas as integrais do método de Galerkin são calculadas de forma exata. Se as integrais não são exatas, então surge outro erro.

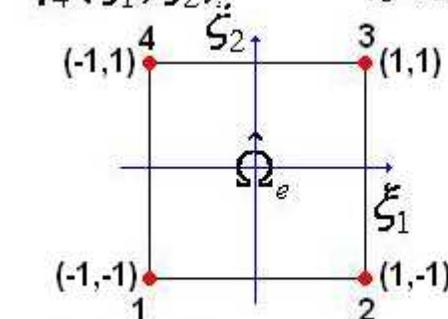
5.3.1- Aproximações (Fontes de Erro).

ERRO NA INTEGRAÇÃO NUMÉRICA: QUADRATURA GAUSSIANA

Para o cálculo das integrais correspondente a cada elemento da malha Ω_e usamos uma substituição de variáveis que permite mapear todos os elementos da malha através de um único elemento $\hat{\Omega}_e$ (padrão). Ou seja, trocamos as variáveis (x, y) por (ξ_1, ξ_2) na forma:



$$\left. \begin{aligned}
 x(\xi_1, \xi_2) &= \sum_{i=1}^4 x_i^e \eta_i(\xi_1, \xi_2) \\
 y(\xi_1, \xi_2) &= \sum_{i=1}^4 y_i^e \eta_i(\xi_1, \xi_2)
 \end{aligned} \right\}$$



$\begin{aligned}
 \eta_1^e(\xi_1, \xi_2) &= \frac{1}{4}(\xi_1 - 1)(\xi_2 - 1) \\
 \eta_2^e(\xi_1, \xi_2) &= -\frac{1}{4}(\xi_1 + 1)(\xi_2 - 1) \\
 \eta_3^e(\xi_1, \xi_2) &= \frac{1}{4}(\xi_1 + 1)(\xi_2 + 1) \\
 \eta_4^e(\xi_1, \xi_2) &= -\frac{1}{4}(\xi_1 - 1)(\xi_2 + 1)
 \end{aligned}$

Então, as integrais para cada elemento se transformam em:

$$\int_{\Omega_e} f(x, y) d\Omega = \int_{\hat{\Omega}_e} f(x(\xi_1, \xi_2), y(\xi_1, \xi_2)) \det \mathbf{J} d\xi_1 d\xi_2$$

5.3.1- Aproximações (Fontes de Erro).

Estas integrais para cada elemento padrão $\hat{\Omega}_e$ podem ser calculadas numericamente usando a quadratura de Gauss.

$$\int_{\hat{\Omega}_e} f(x(\xi_1, \xi_2), y(\xi_1, \xi_2)) \det \mathbf{J} d\xi_1 d\xi_2 = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x(\xi_1, \xi_2), y(\xi_1, \xi_2)) \det \mathbf{J} d\xi_1 d\xi_2$$

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x(\xi_1, \xi_2), y(\xi_1, \xi_2)) \det \mathbf{J} d\xi_1 d\xi_2 \approx$$

npg é o número de pontos de Gauss, *w* são os pesos da quadratura em cada ponto!

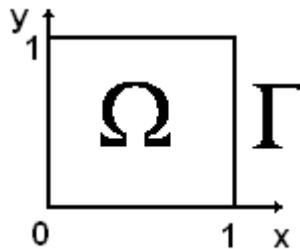
$$\approx \sum_{m=1}^{npg} \sum_{n=1}^{npg} w_m w_n f(\xi_1^m, \xi_2^n) \det \mathbf{J}(\xi_1^m, \xi_2^n)$$

Quando a função integrando é um polinômio de grau N ($p^N(\xi_1, \xi_2)$) tal que $N \leq 2npg - 1$, a quadratura de Gauss é exata. Entretanto quando a função integrando é um polinômio que não verifica esta condição ou é uma função que não é um polinômio a quadratura de Gauss não é exata. Neste último caso estamos introduzindo um erro devido ao cálculos das integrais. Este erro se acrescenta ao erro devido a aproximação por interpolação e ao da partição da malha.

5.3.1- Aproximações (Fontes de Erro).

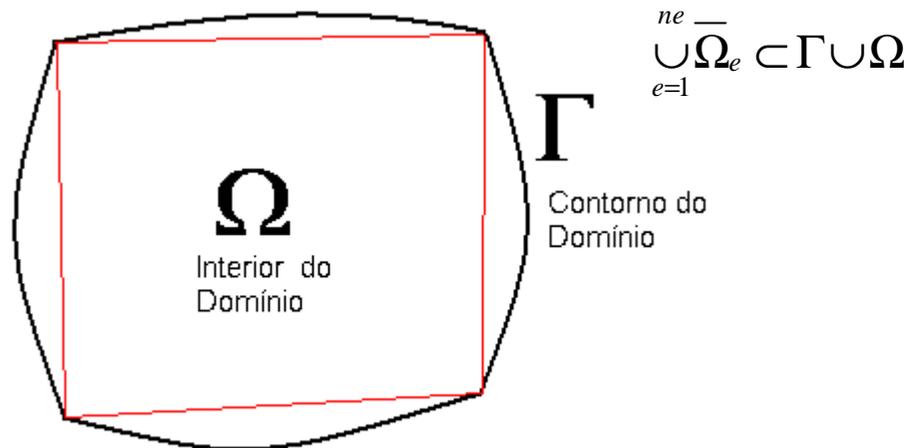
ERRO DEVIDO À PARTIÇÃO DA MALHA

O MEF foi apresentado para um problema onde o Domínio de definição era um Quadrilátero. A partição deste domínio em elementos finitos (Malha $M^h = \{\Omega_1, \dots, \Omega_{ne}\}$) pode ser feita de forma tal que



$$\Gamma \cup \Omega = \bar{\Omega} = \bigcup_{e=1}^{ne} \bar{\Omega}_e \quad \text{e} \quad \Omega_e \cap \Omega_{e'} = \emptyset \text{ se } e \neq e'$$

Entretanto, se o Domínio não é um polígono, então $\Gamma \cup \Omega \neq \bigcup_{e=1}^{ne} \bar{\Omega}_e$



Este problema pode ser contornado construindo elementos curvos para o contorno tais que o contorno seja mapeado de forma exata. Estes elementos já existem!

Frase do Dia

"Só sei que nada sei"!

“Mas eis a hora de partir: eu para morte, vós para a vida. Quem de nós segue o melhor rumo ninguém o sabe, exceto os deuses”.

Sócrates