1- Resolução de Sistemas Lineares.

1.1- Matrizes e Vetores.

1.2- Resolução de Sistemas Lineares de Equações Algébricas por Métodos Exatos (Diretos).

1.3- Resolução de Sistemas Lineares de Equações Algébricas por Métodos Iterativos.

1.4- Convergência dos Métodos Iterativos.

1.2- Sistemas Lineares de Equações Algébricas

Solução de um sistema linear de *m* equações algébricas com *n* incógnitas via métodos exatos (diretos).

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n &= b_2 \\
\cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}
$$

$$
\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}
\text{ ou } \quad \mathbf{Ax = b}
$$

1.2.1- Quando existe solução?

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

Se $n > m$ (mais incógnitas que equações) o sistema tem mais de uma solução. Se $n = m$ (matriz quadrada) segue.

Lema: Se $\mathbf{x}^1$ é solução do sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, então qualquer outra solução deste sistema tem a forma $\mathbf{x}^2 = \mathbf{x}^1 + \mathbf{y}$, onde $\mathbf{y}$ é solução do sistema homogêneo $\mathbf{Ay} = \mathbf{0}$.

Ou seja, se $\mathbf{Ax}^1 = \mathbf{b}$ e $\mathbf{Ax}^2 = \mathbf{b}$ segue que: $\mathbf{y} = \mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1$

$$\mathbf{Ay} = \mathbf{A}(\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1) = \mathbf{Ax}^2 - \mathbf{Ax}^1 = \mathbf{b} - \mathbf{b} = \mathbf{0}$$

1.2.1- Quando existe solução?

O Lema anterior implica no seguinte teorema.

Teorema: O sistema linear $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ tem uma única solução (se existir) se e somente se o correspondente sistema homogêneo $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ tem somente a solução $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Pode ser mostrado que $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ tem somente a solução $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ se $\det \mathbf{A} \neq \mathbf{0}$.

Nesta disciplina estamos interessados em resolver sistema de equações lineares representados por uma matriz quadrada com determinante diferente de zero (não singular).

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n &= b_2 \\
\cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots &\cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots a_{nn}x_n &= b_n
\end{aligned}
\qquad
\begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}
$$

1.2.1- Tipos de Métodos para resolver $\mathbf{Ax = b}$

Métodos Diretos: Produzem a solução exata do sistema após um número finito de operações aritméticas (algoritmo finito) e livre de erro. Na prática, devido a Aritmética com Precisão Finita do computador estes métodos não produzem a solução exata. Quando a ordem da matriz é muito grande o erro devido a precisão finita do computador pode tornar a solução destes métodos sem utilidade prática. Alguns métodos: Regra de Cramer, Eliminação de Gauss, Eliminação pelo Elemento Principal.

Métodos Iterativos: Produzem a solução exata do sistema após um número infinito de operações aritméticas (algoritmo infinito). Como isto é impossível de ser feito, o algoritmo infinito é transformado em finito e conseqüentemente a solução é sempre aproximada. Alguns métodos: Método da Iteração, Método de Seidel, Método do Relaxamento.

1.2.2- Regra de Cramer (Inversão de matriz)

Seja $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Se $\det \mathbf{A} \neq \mathbf{0}$ (matriz não singular), então o sistema tem uma única solução. A matriz $\mathbf{A}$ possui inversa $\mathbf{A}^{-1}$.

Logo $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{Ax} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$ e $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$.

Usando este resultado podemos obter as formulas de Cramer. Entretanto, este resultado tem pouca utilidade prática para matrizes de ordem superior a 4. Resolver um sistema linear de *n* incógnitas pela Regra de Cramer requer calcular *n+1* determinantes de ordem *n*. Calcular determinantes para *n* grande pode ser muito trabalhoso (demorado).

Isto motivou o desenvolvimento de outros métodos para resolver sistemas lineares.

1.2.3- Método de Gauss

Método mais usado que consiste em eliminação sucessiva das incógnitas.

Seja $\mathbf{U}_{n\times n}\mathbf{x}=\mathbf{b}$ com $\mathbf{U}_{n\times n}$ uma matriz triangular superior.

$$\begin{matrix} u_{11}x_1+u_{12}x_2+\cdots+u_{1n-1}x_{n-1}+u_{1n}x_n=b_1 \\ 0x_1+u_{22}x_2+\cdots+u_{2n-1}x_{n-1}+u_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0x_1+0x_2+\cdots+u_{n-1n-1}x_{n-1}+u_{n-1n}x_n=b_{n-1} \\ 0x_1+0x_2+\cdots+0x_{n-1}+u_{nn}x_n=b_n \end{matrix} \qquad \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n-1} & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n-1} & u_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{n-1n-1} & u_{n-1n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & u_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix}$$

Se $u_{kk}\neq 0\ \forall k$ a solução do sistema pode ser obtida fazendo sucessivas substituição no sentido $x_n \to x_{n-1} \to \cdots \to x_1$

$$x_k=\frac{b_k-\sum_{j=k+1}^{n}u_{kj}x_j}{u_{kk}}$$

Back-substitution

Teorema: Uma matriz triangular superior tem inversa se e somente se todos os elementos da diagonal são diferente de zero.

1.2.3- Método de Gauss

Seja $\mathbf{A}_{n\times n}\mathbf{x}=\mathbf{b}$ com $\mathbf{A}_{n\times n}$ uma matriz não triangular.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-11} & a_{n-12} & \cdots & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix}$$

Se $a_{11}\neq 0$ multiplique a linha 1 por $1/a_{11}$ e elimine x_1 da linha *j* multiplicando a nova linha 1 por a_{j1} e subtraindo da linha *j>1*.

A matriz obtida é equivalente à inicial e ambos sistema possuem a mesma solução.

$$\begin{bmatrix} 1 & u_{12}^1 & \cdots & u_{1n-1}^1 & u_{1n}^1 \\ 0 & a_{22}^1 & \cdots & a_{2n-1}^1 & a_{2n}^1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{n-12}^1 & \cdots & a_{n-1n-1}^1 & a_{n-1n}^1 \\ 0 & a_{n2}^1 & \cdots & a_{nn-1}^1 & a_{nn}^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^1 \\ b_2^1 \\ \vdots \\ b_{n-1}^1 \\ b_n^1 \end{bmatrix}$$

$$(1)\begin{cases} u_{1j}^1 = \dfrac{a_{1j}}{a_{11}} & \forall j \geq 2, n \\ a_{ij}^1 = a_{ij} - a_{i1}u_{1j}^1 & \forall i, j \geq 2, n \end{cases}$$

$$(2)\begin{cases} b_1^1 = u_{1n+1}^1 \text{ com } a_{1n+1} = b_1 \\ b_i^1 = b_i - a_{i1}u_{1n+1}^1 & \forall i \geq 2, n \end{cases}$$

Note que (2)=(1) se em (2) $a_{in+1} = b_i$, ou seja, se usamos a matriz ampliada em lugar da matriz original *j>1,n+1*.

1.2.3- Método de Gauss

$$\begin{bmatrix} 1 & u_{12}^{1} & \cdots & u_{1n-1}^{1} & u_{1n}^{1} \\ 0 & a_{22}^{1} & \cdots & a_{2n-1}^{1} & a_{2n}^{1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{n-12}^{1} & \cdots & a_{n-1n-1}^{1} & a_{n-1n}^{1} \\ 0 & a_{n2}^{1} & \cdots & a_{nn-1}^{1} & a_{nn}^{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1n+1}^{1} \\ a_{2n+1}^{1} \\ \vdots \\ a_{n-1n+1}^{1} \\ a_{nn+1}^{1} \end{bmatrix}$$

Se $a_{22}^{1} \neq 0$ multiplique a linha 2 por $1/a_{22}^{1}$ e elimine x_2 da linha *j* multiplicando a nova linha 2 por a_{j2}^{1} e subtraindo de linha *j>2*.

$$\begin{bmatrix} 1 & u_{12}^{1} & \cdots & u_{1n-1}^{1} & u_{1n}^{1} \\ 0 & 1 & \cdots & u_{2n-1}^{2} & u_{2n}^{2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1n-1}^{2} & a_{n-1n}^{2} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn-1}^{2} & a_{nn}^{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1n+1}^{1} \\ a_{2n+1}^{2} \\ \vdots \\ a_{n-1n+1}^{2} \\ a_{nn+1}^{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} u_{2j}^{2} = \dfrac{a_{2j}^{1}}{a_{22}^{1}} & \forall j \geq 3, n+1 \\ a_{ij}^{2} = a_{ij}^{1} - a_{i2}^{1} u_{2j}^{2} & \forall i, j \geq 3, n+1 \end{cases}$$

Se $a_{ii}^{i-1} \neq 0 \quad i > 3$ podemos repetir este algoritmo sucessivamente até *i=n-1* e obtemos:

1.2.3- Método de Gauss

$$\begin{bmatrix} 1 & u_{12}^1 & \cdots & u_{1n-1}^1 & u_{1n}^1 \\ 0 & 1 & \cdots & u_{2n-1}^2 & u_{2n}^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & u_{n-1n}^{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn}^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1n+1}^1 \\ a_{2n+1}^2 \\ \vdots \\ a_{n-1n+1}^{n-1} \\ a_{nn+1}^{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} u_{n-1j}^{n-1} = \dfrac{a_{n-1j}^{n-2}}{a_{n-1n-1}^{n-2}} & \forall j \geq n, n+1 \\ a_{nj}^{n-1} = a_{nj}^{n-2} - a_{nn-1}^{n-2} u_{n-1j}^{n-1} & \forall j \geq n, n+1 \end{cases}$$

Se $a_{nn}^{n-1} \neq 0$ multiplique a linha n por $1/a_{nn}^{n-1}$ e $x_n = \dfrac{a_{nn+1}^{n-1}}{a_{nn}^{n-1}} = a_{nn+1}^n$

Logo, a eliminação de Gauss resulta numa matriz triangular superior com elementos da diagonal 1. Este sistema pode ser resolvido realizando o processo de *Back-Substitution*.

$$\begin{bmatrix} 1 & u_{12}^1 & \cdots & u_{1n-1}^1 & u_{1n}^1 \\ 0 & 1 & \cdots & u_{2n-1}^2 & u_{2n}^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & u_{n-1n}^{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1n+1}^1 \\ a_{2n+1}^2 \\ \vdots \\ a_{n-1n+1}^{n-1} \\ a_{nn+1}^{n} \end{bmatrix}$$

$$x_n = \frac{a_{nn+1}^{n-1}}{a_{nn}^{n-1}} = a_{nn+1}^n \quad \text{e} \quad x_k = a_{kn+1}^k - \sum_{j=k+1}^{n} u_{kj}^k x_j \qquad n > j \geq 1$$

1.2.3- Método de Gauss

Note que a matriz triangular superior obtida com a eliminação de Gauss tem todos os elementos da diagonal diferente de zero. Logo, pode ser realizado o processo de *Back-Substitution*. Entretanto, a condição necessária e suficiente para obter esta matriz triangular foi:

$$\begin{bmatrix} 1 & u_{12}^{1} & \cdots & u_{1n-1}^{1} & u_{1n}^{1} \\ 0 & 1 & \cdots & u_{2n-1}^{2} & u_{2n}^{2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & u_{n-1n}^{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$a_{11} \neq 0$$

$$a_{22}^{1} \neq 0 \Leftrightarrow a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0$$

$$a_{33}^{2} \neq 0 \Leftrightarrow a_{22}^{1}a_{33}^{1} - a_{32}^{1}a_{23}^{1} \neq 0$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$a_{nn}^{n-1} \neq 0 \Leftrightarrow a_{n-1n-1}^{n-2}a_{nn}^{n-2} - a_{nn-1}^{n-2}a_{n-1n}^{n-2} \neq 0$$

Se algum destes coeficientes é zero $a_{kk}^{k-1} = 0$ o processo pode ser feito trocando este coeficiente por algum $a_{kj}^{k-1} \neq 0$. Isto se chama pivotar e é essencial para reduzir erros de round-off.

1.2.3- Método de Gauss

Podemos estimar o número de operações aritméticas N necessárias para obter a solução de um sistema de ordem *n* pelo Método de Gauss (sem considerar pivoteamento).

Forward-Substitution

(multiplicação e divisão)

$$\begin{cases} u_{kj}^{k} = \dfrac{a_{kj}^{k-1}}{a_{kk}^{k-1}} & \forall j \geq k+1, n+1 \\ a_{ij}^{k} = a_{ij}^{k-1} - a_{ik}^{k-1} u_{kj}^{k} & \forall i, j \geq k+1, n+1 \end{cases}$$

$$\underbrace{\overbrace{n(n+1)}^{=n \text{ div.} + n*n \text{ mult.}}}_{Passo\,1} + \underbrace{(n-1)n}_{Passo\,2} + \cdots + \underbrace{(n-(k-1))(n-k)}_{Passo\,k} + 1 \cdot 2 = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

Back-Substitution

(multiplicação e divisão)

$$\begin{cases} x_n = \dfrac{a_{nn+1}^{n-1}}{a_{nn}^{n-1}} = a_{nn+1}^{n} \\ x_k = a_{kn+1}^{k} - \displaystyle\sum_{j=k+1}^{n} u_{kj}^{k} x_j & n > j \geq 1 \end{cases}$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2}$$

Considerando o mesmo número de soma e subtração em cada processo segue: $N = 2\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3} + 2\dfrac{n(n-1)}{2} < n^3 \quad \forall n > 7$

1.2.3- Método de Gauss

Ou seja, o número de operações aritméticas N necessárias para obter a solução de um sistema de ordem *n* pelo Método de Gauss (sem considerar pivoteamento) é proporcional ao cubo do número de incógnitas.

$$N = 2\frac{n(n+1)(n+2)}{3} + 2\frac{n(n-1)}{2} < n^3 \quad \forall n > 7$$

Consequentemente, para resolver um sistema com 10000 incógnitas num computador capaz de realizar 10^6 operações por segundo serão necessário no mínimo $T=(10^4)^3/10^6=10^6$s.

Este esforço computacional pode ser otimizado para casos particulares de matrizes simétricas e esparsas.

Matriz Esparsa: são aquelas com muitos elementos zeros (método de diferença finita e método de elemento finito).

Matriz Densa: são aquelas com poucos elementos zeros.

1.2.3- Método do Elemento Principal (Estratégia do Pivô)

Considere a matriz ampliada e escolha o elemento não zero com maior valor absoluto a_{pq} (elemento principal) que não pertença ao termo independente. Calcule o fator $u_i = -\dfrac{a_{iq}}{a_{pq}} \quad \forall i \neq p$

Adicione a cada linha, diferente da linha *p,* a linha *p* multiplicada pelo fator u_i . Isto produz uma nova matriz com a coluna *q* formada por zeros e mantendo a linha *p* inalterada.

$$\mathbf{U} = \left[\begin{array}{cccccccc|c}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1q} & \cdots & a_{1n} & a_{1n+1} = b_1 \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2q} & \cdots & a_{2n} & a_{2n+1} = b_2 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{iq} & \cdots & a_{in} & a_{in+1} = b_i \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pj} & \cdots & \boxed{a_{pq}} & \cdots & a_{pn} & a_{pn+1} = b_p \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nq} & \cdots & a_{nn} & a_{nn+1} = b_n
\end{array}\right]$$

1.2.3- Método do Elemento Principal (Estratégia do Pivô)

Descartando a coluna *q* e a linha *p* obtemos uma nova matriz de ordem *(n-1)x(n-1)*. Repetimos o procedimento para $\mathbf{U}^1$ obtemos $\mathbf{U}^2$, e assim sucessivamente até $\mathbf{U}^{n-1}$, onde chegamos a uma matriz linha com dois elementos.

$$
\mathbf{U}^1 = \left[\begin{array}{cccccccc|c}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & & \cdots & a_{1n} & a_{1n+1} = b_1 \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & & \cdots & a_{2n} & a_{2n+1} = b_2 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & & \cdots & a_{in} & a_{in+1} = b_i \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots \\
\text{descartar} & \text{esta} & \text{linha} & \text{p} & & \boxed{a_{pq}} & & & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & & \cdots & a_{nn} & a_{nn+1} = b_n
\end{array}\right]
$$

$$\mathbf{U}^1 \to \cdots \to \mathbf{U}^{n-1}$$

1.2.3- Método do Elemento Principal (Estratégia do Pivô)

Para determinar as incógnitas x_i combine num sistema todas as linhas descartadas em ordem inversa $\mathbf{U}^{n-1} \to \cdots \to \mathbf{U}^{1}$. A primeira vista não parece ser uma matriz triangular, mas basta reordenar o número das incógnitas para obter um sistema com matriz triangular. Esta matriz será triangular superior ou inferior dependendo de como é feito o reordenamento.

$$\square + \square + \cdots + a^{n-2}_{\overset{=}{p}j} x_j + \cdots \square + \cdots + \square = a^{n-2}_{\overset{=}{p}n+1} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{passo n-1 (último)} \\ \text{chega a uma linha com 2 elementos} \end{array} \right.$$

$$\square + \square + \cdots + a^{n-3}_{\tilde{p}j} x_j + \cdots \square + \cdots + a^{n-3}_{\tilde{p}n} x_n = a^{n-3}_{\tilde{p}n+1} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{passo n-2 (penúltimo) elimina coluna n} \\ \text{descartando a linha } \tilde{\text{p}} \end{array} \right.$$

$$\vdots \qquad \text{sucessivamente até chegar no penúltimo passo} \qquad \vdots$$

$$a^{2}_{\hat{p}1} x_1 + \square + \cdots + a^{2}_{\hat{p}j} x_j + \cdots \square + \cdots + a^{2}_{\hat{p}n} x_n = a^{2}_{\hat{p}n+1} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{passo 3, elimina outra coluna} \\ \text{descartando a linha } \hat{\text{p}} \end{array} \right.$$

$$a^{1}_{\bar{p}1} x_1 + a^{1}_{\bar{p}2} x_2 + \cdots + a^{1}_{\bar{p}j} x_j + \cdots \square + \cdots + a^{1}_{\bar{p}n} x_n = a^{1}_{\bar{p}n+1} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{passo 2, elimina coluna 2} \\ \text{descartando a linha } \bar{\text{p}} \end{array} \right.$$

$$a_{p1} x_1 + a_{p2} x_2 + \cdots + a_{pj} x_j + \cdots a_{pq} x_q + \cdots + a_{pn} x_n = a_{pn+1} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{passo 1, elimina coluna q} \\ \text{descartando a linha p} \end{array} \right.$$

1.2.3- Método do Elemento Principal (Estratégia do Pivô)

Reordenando o sistema anterior obtemos:

$$\square + \square + \cdots + a^{n-2}_{\overset{=}{p} j} x_j + \cdots \square + \cdots + \square = a^{n-2}_{\overset{=}{p} n+1} \quad \{\text{passo n-1 sem reordenação}$$

reordenando j→n e $\overset{=}{p}$→n a linha acima se transforma em

$$\square + \square + \cdots + a^{n-2}_{nn} x_n + \cdots \square + \cdots + \square = a^{n-2}_{nn+1} \quad \{\text{passo n-1 reordenado}$$

$$\square + \square + \cdots + a^{n-3}_{\tilde{p} j} x_j + \cdots \square + \cdots + a^{n-3}_{\tilde{p} n} x_n = a^{n-3}_{\tilde{p} n+1} \quad \{\text{passo n-2 sem reordenação}$$

reordenando j → n, n → n-1 e $\tilde{p}$ → n-1 a linha acima se transforma em

$$\square + \square + \cdots + a^{n-3}_{n-1n} x_n + \cdots \square + \cdots + a^{n-3}_{n-1n-1} x_{n-1} = a^{n-3}_{n-1n+1} \quad \{\text{passo n-1 reordenado}$$

$\vdots$ sucessivamente até chegar no passo 1 $\vdots$

$$a_{p1} x_1 + a_{p2} x_2 + \cdots + a_{pj} x_j + \cdots a_{pq} x_q + \cdots + a_{pn} x_n = a_{pn+1} \quad \{\text{passo 1 sem reordenação}$$

reordenando j → n, n → n-1, 1 → 3, 2 → 2, q → 1 e p → 1 a linha acima se transforma em

$$a_{13} x_3 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n + \cdots a_{11} x_1 + \cdots + a_{1n-1} x_{n-1} = a_{1n+1} \quad \{\text{passo 1 reordenado}$$

Note que invertendo a ordem das linhas obtemos uma matriz triangular superior.

1.2.3- Método do Elemento Principal (Estratégia do Pivô)

Este método pode ser aplicado sempre que $\det \mathbf{A} \neq 0$.

Note que o método de Gauss é um caso particular deste método, que pode ser obtido sempre que escolhermos o elemento esquerdo superior da matriz correspondente em cada passo.

Exemplo 4.4 (Conte) Suponha uma precisão de 4 casas decimais.

$$\begin{bmatrix} 0.0003 & 1.566 \\ 0.3454 & -2.436 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.569 \\ 1.018 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0.0003 & 1.566 & 1.569 \\ 0.3454 & -2.436 & 1.018 \end{array}\right]$$

Como tarefa resolver este sistema usando:

-Método de Gauss sem pivoteamento,

-Método do Elemento Principal.

1.2.4- Método de Gauss para calcular a inversa

Suponha que queremos calcular a matriz inversa de uma matriz não singular $\mathbf{A}_{n\times n}$ $(\det \mathbf{A} \neq \mathbf{0})$.

$$\mathbf{A}_{n\times n}\mathbf{A}_{n\times n}^{-1} = \mathbf{E}$$

Este é um sistema de n^2 incógnitas x_{ij} $(i, j = 1, \cdots, n)$.

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_{kj} = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, \cdots, n) \;\; \mathbf{e} \;\; \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

$$a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} + \cdots + a_{1n}x_{n1} = 1 \qquad (i = j = 1)$$

$$a_{21}x_{11} + a_{22}x_{21} + \cdots + a_{2n}x_{n1} = 0 \qquad (i = 2,\ j = 1)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_{n1}x_{11} + a_{n2}x_{21} + \cdots + a_{nn}x_{n1} = 0 \qquad (i = n,\ j = 1)$$

$$a_{11}x_{12} + a_{12}x_{22} + \cdots + a_{1n}x_{n2} = 0 \qquad (i = 1,\ j = 2)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_{11}x_{1n} + a_{12}x_{2n} + \cdots + a_{1n}x_{nn} = 1 \qquad (i = 1,\ j = n)$$

Os n sistemas resultantes tem a mesma matriz e vetor b distintos e podem ser resolvidos simultaneamente pelo método de Gauss.

1.2.4- Método de Gauss para calcular a inversa

Exemplo: Encontre a inversa de $\mathbf{A}_{2\times2}$: $\mathbf{A}_{2\times2}\mathbf{A}_{2\times2}^{-1} = \mathbf{E} \quad \det \mathbf{A} \neq \mathbf{0}$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} = \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}_{2\times2} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(1)\begin{cases} a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} = 1 & (i=1,\ j=1) \\ a_{21}x_{11} + a_{22}x_{21} = 0 & (i=2,\ j=1) \end{cases}$$

$$(2)\begin{cases} a_{11}x_{12} + a_{12}x_{22} = 0 & (i=1,\ j=2) \\ a_{21}x_{12} + a_{22}x_{22} = 1 & (i=2,\ j=2) \end{cases}$$

Os 2 sistemas tem a mesma matriz e vetor b distintos e podem ser resolvidos simultaneamente pelo método de Gauss.

Matriz Triangular
$$\begin{bmatrix} 1 & u_{12}^{1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x_{21} = \frac{a_{23}^{1}}{a_{22}^{1}} \qquad x_{11} = a_{13}^{1} - u_{12}^{1}x_{21}$$

$$x_{22} = \frac{\tilde{a}_{23}^{1}}{a_{22}^{1}} \qquad x_{12} = \tilde{a}_{13}^{1} - u_{12}^{1}x_{22}$$

A matriz triangular superior é a mesma e o procedimento para obter ela é o mesmo. Logo, só precisa ser feito uma única vez. O processo de *Back-Substitution* deve ser feito por separado porque os termos independentes são diferentes.

1.2.5- Erro da Solução e Condicionamento da matriz

Seja um sistema descrito por uma matriz não singular $\mathbf{A}_{n\times n}$ ($\det \mathbf{A} \neq \mathbf{0}$). Como o sistema é resolvido com **aritmética de precisão finita** a solução pelo **método de Gauss** terá erro do tipo *round-off*. Também, nosso sistema pode ter incertezas devido a incertezas no termo independente e nos elementos da matriz. Queremos estimar como estas incertezas ou a aritmética de precisão finita pode influenciar a solução do sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

Primeiro consideramos a matriz exata e incertezas no termo independente: $\mathbf{b} + \Delta\mathbf{b}$ logo $\mathbf{A}(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) = \mathbf{b} + \Delta\mathbf{b}$ estimaremos quão grande pode ser esta incerteza. $\mathbf{A}\Delta\mathbf{x} = \Delta\mathbf{b}$ ou $\Delta\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\Delta\mathbf{b}$

$\|\Delta\mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{A}^{-1}\|\|\Delta\mathbf{b}\|$ $\quad \|\mathbf{b}\| \leq \|\mathbf{A}\|\|\mathbf{x}\|$ multiplicando ambas

$\|\Delta\mathbf{x}\|\|\mathbf{b}\| \leq \|\mathbf{A}^{-1}\|\|\mathbf{A}\|\|\Delta\mathbf{b}\|\|\mathbf{x}\|$ se $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ segue $\dfrac{\|\Delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \|\mathbf{A}\|\|\mathbf{A}^{-1}\|\dfrac{\|\Delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|}$

1.2.5- Erro da Solução e Condicionamento da matriz

Para toda matriz não singular definimos um número chamado Condicionamento da Matriz como: $\text{cond}(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{A}^{-1}\|$ logo

$$\frac{\|\Delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \le \text{cond}(\mathbf{A}) \frac{\|\Delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|}$$

Note que $\frac{\|\Delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|}$ é uma medida do erro relativo do dado $\mathbf{b}$.

$\frac{\|\Delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}$ é uma medida do erro relativo em $\mathbf{x}$ devido á incerteza em $\mathbf{b}$. Note que quanto mais próximo de **1** for o **cond(A)** as incertezas em **b** terão menor influenza no erro da solução (matriz bem condicionada). Se **cond(A)>>1** (muito grande) consequentemente o erro da solução será grande (mal condicionamento). Agora consideramos a matriz com incertezas e o termo independente exato: $\mathbf{A} + \Delta\mathbf{A}$ estimaremos quão grande pode ser esta incerteza.

$$(\mathbf{A} + \Delta\mathbf{A})(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) = \mathbf{b} \qquad\qquad (\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) = (\mathbf{A} + \Delta\mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}$$

1.2.5- Erro da Solução e Condicionamento da matriz

$$\Delta \mathbf{x} = [(\mathbf{A} + \Delta\mathbf{A})^{-1} - \mathbf{A}^{-1}]\mathbf{b}$$

Denotando $\mathbf{B} = \mathbf{A} + \Delta\mathbf{A}$ e usando a identidade abaixo segue

$$\mathbf{B}^{-1} - \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{A} - \mathbf{B})\mathbf{B}^{-1}$$

$$\Delta \mathbf{x} = -\mathbf{A}^{-1}(\Delta\mathbf{A})(\mathbf{A} + \Delta\mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} = -\mathbf{A}^{-1}(\Delta\mathbf{A})(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x})$$

$$\|\Delta\mathbf{x}\| \le \left\|\mathbf{A}^{-1}\right\| \|\Delta\mathbf{A}\| \|\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}\| \text{ ou } \frac{\|\Delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}\|} \le \operatorname{cond}(\mathbf{A}) \frac{\|\Delta\mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|}$$

Novamente quanto mais próximo de **1** for o **cond(A)** as incertezas na matriz terão menor influenza no erro da solução (matriz bem condicionada). Se **cond(A)>>1** (muito grande) consequentemente o erro da solução será grande (mal condicionamento).

Frase do Dia

"As long as algebra and geometry proceed along separate paths, their advance was slow and their applications were limited. But when these sciences joined company, they drew from each other fresh vitality and hence forward marched on at a rapid pace towards perfection."

Joseph Louis Lagrange