1- Resolução de Sistemas Lineares.

1.1- Matrizes e Vetores.

1.2- Resolução de Sistemas Lineares de Equações Algébricas por Métodos Exatos (Diretos).

1.3- Resolução de Sistemas Lineares de Equações Algébricas por Métodos Iterativos.

1.4- Convergência dos Métodos Iterativos.

1.3- Sistemas Lineares de Equações Algébricas

Solução de um sistema linear de *m* equações algébricas com *n* incógnitas via métodos iterativos.

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n &= b_2 \\
\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}
$$

$$
\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \text{ ou } \quad \mathbf{Ax} = \mathbf{b}
$$

1.3.1- Quando existe solução?

No tópico anterior 1.2 foi visto o seguinte teorema.

Teorema: O sistema linear $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ tem uma única solução (se existir) se e somente se o correspondente sistema homogêneo $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ tem somente a solução $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Pode ser mostrado que $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ tem somente a solução $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ se $\det \mathbf{A} \neq \mathbf{0}$

Quando a ordem da matriz é muito grande, devido a Aritmética com Precisão Finita do computador, a solução dos métodos diretos apresenta um erro que pode ser muito grande a ponto de perder a utilidade prática. Nestes casos é conveniente o uso dos métodos iterativos.

1.3.1- Métodos iterativos para resolver $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$

Métodos Iterativos: Produzem a solução exata do sistema após um número infinito de operações aritméticas (algoritmo infinito). Como isto é impossível de ser feito o algoritmo infinito é transformado em finito e conseqüentemente a solução é sempre aproximada. Alguns métodos: Método da Iteração, Método de Seidel, Método do Relaxamento.

Estamos interessados em sistemas representados por uma matriz não singular:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-11} & a_{n-12} & \cdots & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}_{n\times n}\mathbf{x} = \mathbf{b} \qquad \det \mathbf{A} \neq \mathbf{0}$$

1.3.2- Método da Iteração (Aproximações Sucessivas)

Considere o sistema com matriz não singular:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-11} & a_{n-12} & \cdots & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}_{n\times n}\mathbf{x} = \mathbf{b} \qquad (1)$$

Se $a_{ii} \neq 0 \ \ (i = 1, \cdots, n)$ podemos resolver a primeira equação para x_1, a segunda para x_2 e assim sucessivamente até x_n.

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \beta_1 + 0\,x_1 + \alpha_{12}x_2 + \cdots + \alpha_{1n}x_n \\ x_2 = \beta_2 + a_{21}x_1 + 0\,x_2 + \cdots + \alpha_{2n}x_n \\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ x_n = \beta_n + a_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \cdots + 0\,x_n \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} \beta_i = \dfrac{b_i}{a_{ii}} \\ \alpha_{ij} = -\dfrac{a_{ij}}{a_{ii}} \ \text{se} \ i \neq j \\ \alpha_{ij} = 0 \ \text{se} \ i = j \end{array}\right.$$

1.3.2- Método da Iteração (Aproximações Sucessivas)

Ou em forma matricial:

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n-1} & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n-1} & \alpha_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n-11} & \alpha_{n-12} & \cdots & \alpha_{n-1n-1} & \alpha_{n-1n} \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn-1} & \alpha_{nn} \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \\ \beta_n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\alpha}_{n\times n}\mathbf{x} \qquad (2)$$

$$x_i = \beta_i + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j$$

$$i = 1, \cdots, n$$

Podemos resolver o sistema via método das aproximações sucessivas como a seguir. Na aproximação zero escolhemos

$\mathbf{x}^0 = \boldsymbol{\beta}$ e substituímos no membro direito de (2), obtendo

$\mathbf{x}^1 = \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\alpha}_{n\times n}\mathbf{x}^0$. Na aproximação 1 substituímos $\mathbf{x}^1$ no membro direito de (2), obtendo $\mathbf{x}^2 = \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\alpha}_{n\times n}\mathbf{x}^1$. E assim sucessivamente até chegar na aproximação *k+1* $\mathbf{x}^{k+1} = \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\alpha}_{n\times n}\mathbf{x}^k$. Desta forma obtemos uma seqüência de aproximações que se converge para um limite ($\mathbf{x}^1 \to \mathbf{x}^2 \to \cdots \to \mathbf{x}^k \to \cdots$), então este limite é solução de (2) e também de (1).

1.3.2- Método da Iteração (Aproximações Sucessivas)

Ou seja, se $\lim\limits_{k\to\infty} \mathbf{x}^k = \mathbf{x}$ usando (2) e propriedades do limite segue que:

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}^{k+1} = \lim_{k\to\infty} (\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\alpha}_{n\times n} \mathbf{x}^k) = \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\alpha}_{n\times n} \lim_{k\to\infty} \mathbf{x}^k = \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\alpha}_{n\times n} \mathbf{x} = \mathbf{x}$$

Resumindo as formulas do Método da Iteração são:

$$\begin{cases} x_i^0 = \beta_i \\ x_i^{k+1} = \beta_i + \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j^k, \quad k = 0,1,2,\cdots \\ \alpha_{ii} = 0, \quad i = (1,\cdots,n) \\ \beta_i = \dfrac{b_i}{a_{ii}}, \quad \alpha_{ij} = -\dfrac{a_{ij}}{a_{ii}} \end{cases} \qquad (3)$$

Muitas vezes ao reduzir (1) para (2) é conveniente que $\alpha_{ii} \neq 0$. Isto pode ser feito da seguinte forma $\alpha_{ii} = 0 = \alpha_{ii}^1 + \alpha_{ii}^2$. Logo as formulas do método serão:

$$\begin{cases} x_i^0 = \beta_i \\ x_i^{k+1} = \beta_i + \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j^k, \quad k = 0,1,2,\cdots \qquad (3') \\ \beta_i = \dfrac{b_i}{a_{ii}^1}, \alpha_{ii} = -\dfrac{a_{ii}^2}{a_{ii}^1}, \quad \alpha_{ij} = -\dfrac{a_{ij}}{a_{ii}^1} \quad i = (1,\cdots,n) \end{cases}$$

Método da Iteração

1.3.2- Método da Iteração (Aproximações Sucessivas)

Este processo iterativo converge rapidamente (poucas iterações) se os elementos da matriz $\boldsymbol{\alpha}_{n\times n}$ são pequenos em valor absoluto. Ou seja, se $|a_{ii}| > |a_{ij}| \quad i,\ j = 1, \cdots, n$. O valor de $\mathbf{b}$ não influencia na convergência do método.

Como a convergência do método depende unicamente das propriedades da matriz $\boldsymbol{\alpha}_{n\times n}$ a escolha do vetor $\mathbf{x}^0$ pode ser feita de forma arbitrária. Isto é, a escolha de $\mathbf{x}^0 \neq \boldsymbol{\beta}$ não influencia na convergência do método.

A convergência do processo iterativo é auto-corretora. Ou seja, erros devidos a Aritmética com Precisão Finita do computador não afetarão o resultado final, já que estes erros podem ser considerados como um novo vetor $\mathbf{x}^k$ em cada passo de aproximação.

1.3.2- Método da Iteração (Aproximações Sucessivas)

Critério de parada do processo iterativo: considere a diferença da solução entre duas iterações sucessivas
$$\begin{cases} \Delta\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^{k} \\ \Delta x_i^{k+1} = x_i^{k+1} - x_i^{k} \end{cases}$$
e escolha a precisão desejada como $\varepsilon > 0$.

Um possível critério de parada pode ser $\left|x_i^{k+1} - x_i^{k}\right| = \left|\Delta x_i^{k+1}\right| \le \varepsilon \quad \forall i$

Condição suficiente para a convergência do processo iterativo.

Teorema: Se para o sistema (2) se verifica pelo menos uma das seguintes condições:

$$i) \quad \sum_{j}^{n} \left|\alpha_{ij}\right| < 1 \quad (i = 1, \cdots, n)$$

$$ii) \quad \sum_{i}^{n} \left|\alpha_{ij}\right| < 1 \quad (j = 1, \cdots, n)$$

$$\mathbf{A}_{n\times n}\mathbf{x} = \mathbf{b} \qquad (1)$$

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\alpha}_{n\times n}\mathbf{x} \qquad (2)$$

$$x_i = \beta_i + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j$$

$$i = 1, \cdots, n$$

$$\begin{cases} x_i^0 = \beta_i \\ x_i^{k+1} = \beta_i + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j^k, \quad k = 0, 1, 2, \cdots \\ \alpha_{ii} = 0, \quad i = (1, \cdots, n) \\ \beta_i = \dfrac{b_i}{a_{ii}}, \quad \alpha_{ij} = -\dfrac{a_{ij}}{a_{ii}} \qquad (3) \end{cases}$$

então o processo iterativo (3) converge para a única solução de (1) independentemente da escolha da aproximação inicial.

1.3.2- Método da Iteração (Aproximações Sucessivas)

Como conseqüência do teorema anterior segue.

Corolário: Para o sistema $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = \mathrm{b}_i \quad (i=1,\cdots,n)$

o método da iteração converge se for verificada a desigualdade

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i}^{n} |a_{ij}| \quad (i=1,\cdots,n)$$

$$i)\ \sum_{j}^{n} |\alpha_{ij}| < 1 \quad (i=1,\cdots,n)$$

$$ii)\ \sum_{i}^{n} |\alpha_{ij}| < 1 \quad (\mathrm{j}=1,\cdots,n)$$

$$\boldsymbol{\alpha_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}}, \quad \alpha_{ii} = 0}$$

$$|\alpha_{i1}| + |\alpha_{i2}| + \cdots + |\alpha_{ii} = 0| + \cdots + |\alpha_{in}| < 1$$

$$\left|-\frac{a_{i1}}{a_{ii}}\right| + \left|-\frac{a_{i2}}{a_{ii}}\right| + \cdots + |\alpha_{ii} = 0| + \cdots + \left|-\frac{a_{in}}{a_{ii}}\right| < 1$$

$$|a_{i1}| + |a_{i2}| + \cdots + |a_{in}| < |a_{ii}|$$

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|$$

1.3.3- Método de Seidel

O Método de Seidel pode ser entendido como uma modificação do Método da Iteração. A idéia principal é que ao calcular x_i no passo de aproximação ($k+1$) sejam consideradas as $x_1, x_2, \cdots, x_{i-1}$ calculadas neste passo e não as do passo anterior k como é feito no Método da Iteração. Isto é, seja o sistema (2)

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\alpha}_{n\times n}\mathbf{x} \quad (i = 1, \cdots, n) \text{ ou } x_i = \beta_i + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j$$

Escolha arbitrariamente a aproximação inicial (passo 0) para obter a seguinte aproximação (passo 1) e assim até a aproximação k $(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0) \to (x_1^1, x_2^1, \cdots, x_n^1) \to \cdots \to (x_1^k, x_2^k, \cdots, x_n^k)$.

Seidel propõe construir a aproximação ($k+1$) como segue:

1.3.3- Método de Seidel

Seidel propõe construir a aproximação (*k+1*) como segue:

$$\begin{cases} x_1^{k+1} = \beta_1 + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{1j} x_j^k \\ x_2^{k+1} = \beta_2 + \alpha_{21} x_1^{k+1} + \sum_{j=2}^{n} \alpha_{2j} x_j^k \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_i^{k+1} = \beta_i + \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} x_j^{k+1} + \sum_{j=i}^{n} \alpha_{ij} x_j^k \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n^{k+1} = \beta_n + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_{nj} x_j^{k+1} + \alpha_{nn} x_n^k \end{cases}$$

O teorema que garante a convergência do método da iteração também é valido para o Método de Seidel.

Em geral, o Método de Seidel converge melhor que o Método da Iteração. Inclusive existem casos em que o Método da Iteração diverge e o Método de Seidel converge. Mas o contrário também acontece. Convergência mais lenta do Método de Seidel e divergência quando comparado com o Método da Iteração.

1.3.4- Método do Relaxamento

Seja o sistema linear de equações:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-11} & a_{n-12} & \cdots & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix}$$

que dividindo cada equação pelo respectivo $-a_{ii}$ (elemento da diagonal) pode ser transformado em

$$\begin{bmatrix} -1 & c_{12} & \cdots & c_{1n-1} & c_{1n} \\ c_{21} & -1 & \cdots & c_{2n-1} & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n-11} & c_{n-12} & \cdots & -1 & c_{n-1n} \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn-1} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{com} \begin{cases} c_{ij} = -\dfrac{a_{ij}}{a_{ii}} \quad (i \neq j) \\ d_i = \dfrac{b_i}{a_{ii}} \end{cases}$$

1.3.4- Método do Relaxamento

Escolha arbitrariamente a aproximação inicial $(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0)$ e substitua neste sistema:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -1 & c_{12} & \cdots & c_{1n-1} & c_{1n} \\ c_{21} & -1 & \cdots & c_{2n-1} & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n-11} & c_{n-12} & \cdots & -1 & c_{n-1n} \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn-1} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix}}_{\text{Diferente de zero (Resíduo). Igual a zero apenas com a solução exata.}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{com} \begin{cases} c_{ij} = -\dfrac{a_{ij}}{a_{ii}} & (i \neq j) \\ d_i = \dfrac{b_i}{a_{ii}} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} R_1^0 \\ R_2^0 \\ \vdots \\ R_{n-1}^0 \\ R_n^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & c_{12} & \cdots & c_{1n-1} & c_{1n} \\ c_{21} & -1 & \cdots & c_{2n-1} & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n-11} & c_{n-12} & \cdots & -1 & c_{n-1n} \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn-1} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ \vdots \\ x_{n-1}^0 \\ x_n^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

1.3.4- Método do Relaxamento

Ou seja, depois da primeira aproximação obtemos os resíduos:

$$\begin{cases} R_1^0 = d_1 - x_1^0 + \sum_{j=2}^{n} c_{1j} x_j^0 \\ R_2^0 = d_2 - x_2^0 + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq 2}}^{n} c_{2j} x_j^0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ R_i^0 = d_i - x_i^0 + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} c_{ij} x_j^0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ R_n^0 = d_n - x_n^0 + \sum_{j=1}^{n-1} c_{nj} x_j^0 \end{cases}$$

Se incrementamos em Δx_s^0 a incógnita x_s^0 o correspondente resíduo R_s^0 será diminuído pela quantidade Δx_s^0 enquanto que todos os outros $R_i^0 \ (i \neq s)$ resíduos serão incrementado pela quantidade $c_{is} \Delta x_s^0$. Assim, para zerar o resíduo R_s^1 na próxima aproximação basta incrementar x_s^0 em $\Delta x_s^0 = R_s^0$.

$$R_s^1 = d_s - (x_s^0 + \Delta x_s^0) + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq s}}^{n} c_{sj} x_j^0 = R_s^0 - \Delta x_s^0$$

$$R_i^1 = d_i - x_i^0 + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} c_{ij} (x_j^0 + \Delta x_s^0 \delta_{js}) = R_i^0 + c_{is} \Delta x_s^0 \quad \forall i \neq j$$

Desta forma obtermos:

1.3.4- Método do Relaxamento

$$\left.\begin{array}{l} R_s^1 = d_s - x_s^1 + \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq s}}^{n} c_{sj} x_j^1 \\ \\ R_i^1 = d_i - x_i^0 + c_{is} x_s^1 + \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i,\, j\neq s}}^{n} c_{ij} x_j^0 \quad \forall i \neq j \end{array}\right\} \begin{array}{l} \begin{cases} x_s^1 = x_s^0 + \Delta x_s^0 \\ \text{se } \Delta x_s^0 = R_s^0 \text{ segue} \end{cases} \\ \begin{cases} R_s^1 = R_s^0 - \Delta x_s^0 = 0 \\ R_i^1 = R_i^0 + c_{is} \Delta x_s^0 \quad \forall i \neq s \end{cases} \end{array}$$

O Método do Relaxamento consiste em reduzir a zero em cada passo o maior resíduo, modificando o valor de sua componente da incógnita. O processo é concluído quando todos os resíduos da aproximação *k* são iguais a zero dentro da precisão exigida ε. As incógnitas são obtidas somando todos os incrementos:

$$x_s^k = x_s^0 + \sum_{l=0}^{k} \Delta x_s^l, \quad \Delta x_s^l = \max_i \left\{ R_i^{l-1} \right\}$$

$$R_s^l = R_s^{l-1} - \Delta x_s^l, \quad R_i^l = R_i^{l-1} + c_{is} \Delta x_s^l \quad \forall i \neq s \quad \text{com } l = k \text{ tal que todo } R_s^l < \varepsilon$$

1.3.4- Método do Relaxamento

Exemplo (Demidovich, pag 315) Resolva pelo método do relaxamento.

$$\begin{cases} 10x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 6 \\ -x_1 + 10x_2 - 2x_3 = 7 \\ -x_1 - x_2 + 10x_3 = 8 \end{cases} \quad \textbf{Solução Exata} \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x_1 + 0.2x_2 + 0.2x_3 + 0.6 = 0 \\ 0.1x_1 - x_2 + 0.2x_3 + 0.7 = 0 \\ 0.1x_1 + 0.1x_2 - x_3 + 0.8 = 0 \end{cases} \quad \text{Sistema Reduzido } *(-\frac{1}{a_{ii}})$$

$$x_s^k = x_s^0 + \sum_{l=0}^{k} \Delta x_s^l, \quad \Delta x_s^l = \max_i \left\{ R_i^{l-1} \right\}$$

Precisão $\varepsilon = 0.01$

$$R_s^l = R_s^{l-1} - \Delta x_s^l, \quad R_i^l = R_i^{l-1} + c_{is} \Delta x_s^l \quad \forall i \neq s \quad \text{com } l = k \text{ tal que todo } R_s^l < \varepsilon$$

Resolvido no Excel 2003

Frase do Dia

"Eu queria certeza da mesma maneira que as pessoas querem fé religiosa. Eu pensava que a certeza é mais provável de ser encontrada na matemática do que em qualquer outra coisa. Mas descobri que muitas demonstrações matemáticas, que meus professores esperavam que eu aceitasse, estavam cheias de falácias, e que, se a certeza pudesse realmente ser descoberta na matemática, seria em um novo campo da matemática, com fundamentos mais sólidos do que os que tinham até então sido considerados seguros. Mas enquanto o trabalho prosseguia, eu me lembrava constantemente da fábula sobre o elefante e a tartaruga. Tendo construído um elefante sobre o qual poderia repousar o mundo matemático, vi que o elefante cambaleava, e passei a construir uma tartaruga, para evitar que ele caísse. Mas a tartaruga não estava mais segura que o elefante, e após uns vinte anos de trabalho muito árduo, cheguei à conclusão de que não havia mais nada que eu pudesse fazer a fim de tornar o conhecimento matemático indubitável."

Bertrand Russell, "Portraits from Memory"