1- Resolução de Sistemas Lineares.

1.1- Matrizes e Vetores.

1.2- Resolução de Sistemas Lineares de Equações Algébricas por Métodos Exatos (Diretos).

1.3- Resolução de Sistemas Lineares de Equações Algébricas por Métodos Iterativos.

1.4- Convergência dos Métodos Iterativos.

1.4.1- Convergência do Método da Iteração

Método da Iteração:

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\alpha}_{n\times n}\mathbf{x} \qquad (2)$$

$$x_i = \beta_i + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j$$

$$i = 1, \cdots, n$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-11} & a_{n-12} & \cdots & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix} \qquad (1)$$

$$\begin{cases} x_i^0 = \beta_i \\ x_i^{k+1} = \beta_i + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j^k, \quad k = 0, 1, 2, \cdots \\ \alpha_{ii} = 0, \quad i = (1, \cdots, n) \\ \beta_i = \dfrac{b_i}{a_{ii}}, \quad \alpha_{ij} = -\dfrac{a_{ij}}{a_{ii}} \end{cases} \qquad (3)$$

Muitas vezes ao reduzir (1) para (2) é conveniente que $\alpha_{ii} \neq 0$. Isto pode ser feito $\alpha_{ii} = 0 = \alpha_{ii}^1 + \alpha_{ii}^2$

Logo as formulas do método serão:

$$\begin{cases} x_i^0 = \beta_i \\ x_i^{k+1} = \beta_i + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j^k, \quad k = 0, 1, 2, \cdots \qquad (3') \\ \beta_i = \dfrac{b_i}{a_{ii}^1}, \alpha_{ii} = -\dfrac{a_{ii}^2}{a_{ii}^1}, \quad \alpha_{ij} = -\dfrac{a_{ij}}{a_{ii}^1} \quad i = (1, \cdots, n) \end{cases}$$

Método da Iteração

1.4.1- Convergência do Método da Iteração

Condição suficiente para a convergência do processo iterativo.

Teorema: Para o sistema reduzido (2) o processo iterativo (3) converge para sua única solução se alguma norma canônica da matriz $\boldsymbol{\alpha}_{n\times n}$ é menor que a unidade. Isto é, a condição suficiente para a convergência do método da iteração

$$\mathbf{x}^{k} = \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\alpha}_{n\times n}\mathbf{x}^{k-1} \quad k = 1, 2, \cdots$$

com $\mathbf{x}^{0}$ arbitrário é $\|\boldsymbol{\alpha}\| < 1$.

$$\begin{cases} \|\mathbf{A}_{n\times n}\|_m = \max\limits_i \sum\limits_j |a_{ij}| & \text{(m-norma)} \\ \|\mathbf{A}_{n\times n}\|_l = \max\limits_j \sum\limits_i |a_{ij}| & \text{(l-norma)} \\ \|\mathbf{A}_{n\times n}\|_k = \sqrt{\sum\limits_{i,j} |a_{ij}|^2} & \text{(k-norma)} \end{cases}$$

Prova: Escolha $\mathbf{x}^{0}$ e construa as seguintes aproximações

$$\begin{cases} \mathbf{x}^{1} = \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\alpha}_{n\times n}\mathbf{x}^{0} \\ \mathbf{x}^{2} = \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\alpha}_{n\times n}\mathbf{x}^{1} = \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\alpha}_{n\times n}(\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\alpha}_{n\times n}\mathbf{x}^{0}) = (\mathbf{E} + \boldsymbol{\alpha}_{n\times n})\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\alpha}^{2}_{n\times n}\mathbf{x}^{0} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathbf{x}^{k} = \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\alpha}_{n\times n}\mathbf{x}^{k-1} = (\mathbf{E} + \boldsymbol{\alpha}_{n\times n} + \boldsymbol{\alpha}^{2}_{n\times n} + \cdots + \boldsymbol{\alpha}^{k-1}_{n\times n})\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\alpha}^{k}_{n\times n}\mathbf{x}^{0} \qquad (*) \end{cases}$$

1.4.1- Convergência do Método da Iteração

Nas duas telas a seguir mostraremos um resultado intermediário importante na prova do teorema $\sum_{l=0}^{\infty} \boldsymbol{\alpha}_{n\times n}^{l} = (\mathbf{E} - \boldsymbol{\alpha}_{n\times n})^{-1}$.

Considere a convergência do seguinte processo iterativo:

Seja $\mathbf{F}_k = \mathbf{E} - \mathbf{A}\mathbf{D}_k$, $\mathbf{D}_k = \mathbf{D}_{k-1} + \mathbf{D}_{k-1}\mathbf{F}_{k-1} = \mathbf{D}_{k-1}(\mathbf{E} + \mathbf{F}_{k-1})$ e $\|\mathbf{F}_0\| < 1$

logo $\mathbf{F}_1 = \mathbf{E} - \mathbf{A}\mathbf{D}_1 = \mathbf{E} - \mathbf{A}\mathbf{D}_0(\mathbf{E} + \mathbf{F}_0)$,

$$\mathbf{F}_2 = \mathbf{E} - \mathbf{A}\mathbf{D}_2 = \mathbf{E} - \mathbf{A}\mathbf{D}_1(\mathbf{E} + \mathbf{F}_1) = \mathbf{E} - \mathbf{A}\mathbf{D}_0(\mathbf{E} + \mathbf{F}_0)[\mathbf{E} + \mathbf{F}_1] =$$

$$\mathbf{E} - \mathbf{A}\mathbf{D}_0(\mathbf{E} + \mathbf{F}_0)[\mathbf{E} + \mathbf{E} - (\mathbf{E} - \mathbf{F}_0)(\mathbf{E} + \mathbf{F}_0)] =$$

$$\mathbf{E} - \mathbf{A}\mathbf{D}_0(\mathbf{E} + \mathbf{F}_0)[\mathbf{E} + \mathbf{F}_0\mathbf{F}_0)] = \mathbf{E} - \mathbf{A}\mathbf{D}_0(\mathbf{E} + \mathbf{F}_0 + \mathbf{F}_0^2 + \mathbf{F}_0^3),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\mathbf{F}_k = \mathbf{E} - \mathbf{A}\mathbf{D}_k = \mathbf{E} - \mathbf{A}\mathbf{D}_0(\mathbf{E} + \mathbf{F}_0 + \mathbf{F}_0^2 + \cdots + \mathbf{F}_0^{k+1}) =$$

$$\mathbf{E} - \mathbf{A}\mathbf{D}_0\sum_{l=0}^{k+1}\mathbf{F}_0^l = \mathbf{E} - (\mathbf{E} - \mathbf{F}_0)\sum_{l=0}^{k+1}\mathbf{F}_0^l,$$

ja que $\mathbf{A}\mathbf{D}_0 = \mathbf{E} - \mathbf{F}_0$ onde $\mathbf{F}_0^0 = \mathbf{E}$.

1.4.1- Convergência do Método da Iteração

Se $\|\mathbf{F}_0\| < 1$ o processo iterativo anterior converge e

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{F}_k = \lim_{k\to\infty} (\mathbf{E} - \mathbf{A}\mathbf{D}_k) = \mathbf{E} - \mathbf{A} \lim_{k\to\infty} \mathbf{D}_k = \mathbf{0}$$

$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} \mathbf{D}_k = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{E} = \mathbf{A}^{-1}$. Já que $\mathbf{F}_k = \mathbf{E} - (\mathbf{E} - \mathbf{F}_0)\sum_{l=0}^{k+1} \mathbf{F}_0^l$

e $\mathbf{0} = \mathbf{E} - \mathbf{A}\ \mathbf{A}^{-1}$ do resultado anterior segue

$$\mathbf{0} = \lim_{k\to\infty} \mathbf{F}_k = \mathbf{E} - (\mathbf{E} - \mathbf{F}_0)\sum_{l=0}^{\infty} \mathbf{F}_0^l = \mathbf{E} - \mathbf{A}\ \mathbf{A}^{-1} \Rightarrow$$

$(\mathbf{E} - \mathbf{F}_0)\sum_{l=0}^{\infty} \mathbf{F}_0^l = \mathbf{A}\ \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}$ ou $\sum_{l=0}^{\infty} \mathbf{F}_0^l = (\mathbf{E} - \mathbf{F}_0)^{-1}$.

Se $\mathbf{F}_0 = \boldsymbol{\alpha}_{n\times n}$ segue $\sum_{l=0}^{\infty} \boldsymbol{\alpha}_{n\times n}^l = (\mathbf{E} - \boldsymbol{\alpha}_{n\times n})^{-1}$. Note que $\|\boldsymbol{\alpha}_{n\times n}\| < 1$ é a hipótese do teorema que queremos provar. Logo, o resultado acima pode ser aplicado à matriz $\boldsymbol{\alpha}_{n\times n}$.

1.4.1- Convergência do Método da Iteração

Se $\|\boldsymbol{\alpha}\| < 1$ segue $\|\boldsymbol{\alpha}^k\| \to 0$ quando $k \to \infty$, consequentemente

$\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{\alpha}^k = 0$ e $\lim_{k\to\infty}(\mathbf{E} + \boldsymbol{\alpha}_{n\times n} + \boldsymbol{\alpha}^2_{n\times n} + \cdots + \boldsymbol{\alpha}^{k-1}_{n\times n}) = \sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{\alpha}^k_{n\times n} = (\mathbf{E} - \boldsymbol{\alpha}_{n\times n})^{-1}$

Se passamos ao limite em (*) quando $k \to \infty$ obtemos

$$\mathbf{x} = \lim_{k\to\infty} \mathbf{x}^k = \lim_{k\to\infty} [(\mathbf{E} + \boldsymbol{\alpha}_{n\times n} + \boldsymbol{\alpha}^2_{n\times n} + \cdots + \boldsymbol{\alpha}^{k-1}_{n\times n})\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\alpha}^k_{n\times n}\mathbf{x}^0]$$

$$= \underbrace{\lim_{k\to\infty}(\mathbf{E} + \boldsymbol{\alpha}_{n\times n} + \boldsymbol{\alpha}^2_{n\times n} + \cdots + \boldsymbol{\alpha}^{k-1}_{n\times n})}_{(\mathbf{E}+\boldsymbol{\alpha}_{n\times n})^{-1}}\boldsymbol{\beta} + \boxed{\underbrace{\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{\alpha}^k_{n\times n}}_{\text{zero}}\mathbf{x}^0} = (\mathbf{E} - \boldsymbol{\alpha}_{n\times n})^{-1}\boldsymbol{\beta} \quad (**)$$

Isto prova a convergência do processo iterativo, ou seja, que existe o limite. Da equação (**) segue que

$$\mathbf{x} = (\mathbf{E} - \boldsymbol{\alpha}_{n\times n})^{-1}\boldsymbol{\beta} \text{ ou } (\mathbf{E} - \boldsymbol{\alpha}_{n\times n})\mathbf{x} = (\mathbf{E} - \boldsymbol{\alpha}_{n\times n})(\mathbf{E} - \boldsymbol{\alpha}_{n\times n})^{-1}\boldsymbol{\beta} \text{ ou } (\mathbf{E} - \boldsymbol{\alpha}_{n\times n})\mathbf{x} = \boldsymbol{\beta}$$

ou $\mathbf{x} = \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\alpha}_{n\times n}\mathbf{x}$ que significa que $\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}^k$ (**) é solução do sistema (2). Como a matriz $(\mathbf{E} - \boldsymbol{\alpha}_{n\times n})$ é não singular o sistema (2) tem uma única solução □.

1.4.1- Convergência do Método da Iteração

Como conseqüência do teorema anterior segue.

Corolário 1: O método da iteração para o sistema (2) converge se for verificada uma das desigualdades:

1) $\|\boldsymbol{\alpha}_{n\times n}\|_m = \max_i \sum_{j=1}^{n} |\alpha_{ij}| < 1$ (m-norma) ou

2) $\|\boldsymbol{\alpha}_{n\times n}\|_l = \max_j \sum_{i=1}^{n} |\alpha_{ij}| < 1$ (l-norma) ou

3) $\|\boldsymbol{\alpha}_{n\times n}\|_k = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |\alpha_{ij}|^2} < 1$ (k-norma)

Em particular se os elementos da matriz $\boldsymbol{\alpha}$ satisfazem $|\alpha_{ij}| < \frac{1}{n}$ então o método da iteração converge (*n* é o número de incógnitas).

1.4.1- Convergência do Método da Iteração

Corolário 2: Para o sistema $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = \mathrm{b}_i \quad (i = 1, \cdots, n)$

o método da iteração converge se for verificada uma das desigualdade abaixo:

1) $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i}^{n} |a_{ij}| \quad (i = 1, \cdots, n)$

2) $|a_{jj}| > \sum_{i \neq j}^{n} |a_{ij}| \quad (\mathrm{j} = 1, \cdots, n)$

---

1) $\sum_{j}^{n} |\alpha_{ij}| < 1 \quad (i = 1, \cdots, n)$

2) $\sum_{i}^{n} |\alpha_{ij}| < 1 \quad (\mathrm{j} = 1, \cdots, n)$

$$\alpha_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}}, \quad \alpha_{ii} = 0$$

$$|\alpha_{i1}| + |\alpha_{i2}| + \cdots + |\alpha_{ii} = 0| + \cdots + |\alpha_{in}| < 1$$

$$\left|-\frac{a_{i1}}{a_{ii}}\right| + \left|-\frac{a_{i2}}{a_{ii}}\right| + \cdots + |\alpha_{ii} = 0| + \cdots + \left|-\frac{a_{in}}{a_{ii}}\right| < 1$$

$$|a_{i1}| + |a_{i2}| + \cdots + |a_{in}| < |a_{ii}|$$

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|$$

Explicado na aula anterior.

1.4.2- Estimativa do Erro do Método da Iteração

Sejam $\mathbf{x}^{k-1}$ e $\mathbf{x}^{k}$ duas aproximações sucessivas da solução do sistema linear $\mathbf{x}=\boldsymbol{\alpha}_{n\times n}\mathbf{x}+\boldsymbol{\beta}$. Para $p\geq 1$ segue

$$\left\|\mathbf{x}^{k+p}-\mathbf{x}^{k}\right\|=\left\|\mathbf{x}^{k+p}-\mathbf{x}^{k}+\underbrace{(\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^{k+1})+(\mathbf{x}^{k+2}-\mathbf{x}^{k+2})+\cdots+(\mathbf{x}^{k+p-1}-\mathbf{x}^{k+p-1})}_{\text{é zero, mas esta manipulação permite usar a desigualdade triangular}}\right\|$$

$$\leq\left\|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^{k}\right\|+\left\|\mathbf{x}^{k+2}-\mathbf{x}^{k+1}\right\|+\cdots+\left\|\mathbf{x}^{k+p}-\mathbf{x}^{k+p-1}\right\| \qquad (4)$$

como $\mathbf{x}^{m+1}=\boldsymbol{\alpha}_{n\times n}\mathbf{x}^{m}+\boldsymbol{\beta}$ e $\mathbf{x}^{m}=\boldsymbol{\alpha}_{n\times n}\mathbf{x}^{m-1}+\boldsymbol{\beta}$ segue $\mathbf{x}^{m+1}-\mathbf{x}^{m}=\boldsymbol{\alpha}_{n\times n}(\mathbf{x}^{m}-\mathbf{x}^{m-1})$

$$\left\|\mathbf{x}^{m+1}-\mathbf{x}^{m}\right\|\leq\left\|\boldsymbol{\alpha}_{n\times n}\right\|\left\|\mathbf{x}^{m}-\mathbf{x}^{m-1}\right\|\leq\left\|\boldsymbol{\alpha}_{n\times n}\right\|^{m-k}\left\|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^{k}\right\| \quad \forall m>k>1$$

logo de (4) segue $\left\|\mathbf{x}^{k+p}-\mathbf{x}^{k}\right\|\leq\left\|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^{k}\right\|+\underbrace{\left\|\mathbf{x}^{k+2}-\mathbf{x}^{k+1}\right\|}_{\left\|\boldsymbol{\alpha}_{n\times n}\right\|\left\|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^{k}\right\|}+\cdots+\underbrace{\left\|\mathbf{x}^{k+p}-\mathbf{x}^{k+p-1}\right\|}_{\left\|\boldsymbol{\alpha}_{n\times n}\right\|^{p-1}\left\|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^{k}\right\|}$

$$\leq\frac{1}{1-\left\|\boldsymbol{\alpha}_{n\times n}\right\|}\left\|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^{k}\right\|$$

Na tela a seguir mostramos este resultado em detalhes!

1.4.2- Estimativa do Erro do Método da Iteração

$$\left\|\mathbf{x}^{k+p}-\mathbf{x}^{k}\right\| \leq \underbrace{[1+\left\|\boldsymbol{\alpha}_{n\times n}\right\|+\cdots+\left\|\boldsymbol{\alpha}_{n\times n}\right\|^{p-1}]}_{\text{Progressão Geométrica}}\left\|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^{k}\right\|$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Progressão}\\ \text{Geométrica}\end{array}\right\} S_n=\sum_{i=1}^{n}a_i=\frac{a_1(q^n-1)}{q-1},\ \text{com}\ \begin{cases}a_i=qa_{i-1}\ (\text{razão})\\ a_1\ (\text{termo inicial})\end{cases}$$

$$S_\infty=\lim_{n\to\infty}S_n=\sum_{i=1}^{\infty}a_i=\sum_{i=1}^{\infty}a_1q^{i-1}=\frac{a_1}{1-q},\ \text{se}\ |\mathrm{q}|<1.\quad \text{Logo,}$$

$$\underbrace{[1+\left\|\boldsymbol{\alpha}_{n\times n}\right\|+\cdots+\left\|\boldsymbol{\alpha}_{n\times n}\right\|^{p-1}]}_{\text{Progressão Geométrica}}=\sum_{i=1}^{p}\left\|\boldsymbol{\alpha}_{n\times n}\right\|^{i-1},\ \text{com}\ \begin{cases}q=\left\|\boldsymbol{\alpha}_{n\times n}\right\|<1\ (\text{razão})\\ a_1=1\ (\text{termo inicial})\end{cases}.$$

$$\text{Como}\ \sum_{i=1}^{p}\left\|\boldsymbol{\alpha}_{n\times n}\right\|^{i-1}\leq\sum_{i=1}^{\infty}\left\|\boldsymbol{\alpha}_{n\times n}\right\|^{i-1}=\frac{1}{1-\left\|\boldsymbol{\alpha}_{n\times n}\right\|},\ \text{logo}$$

$$\left\|\mathbf{x}^{k+p}-\mathbf{x}^{k}\right\| \leq \underbrace{[1+\left\|\boldsymbol{\alpha}_{n\times n}\right\|+\cdots+\left\|\boldsymbol{\alpha}_{n\times n}\right\|^{p-1}]}_{\text{Progressão Geométrica}}\left\|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^{k}\right\|\leq\frac{1}{1-\left\|\boldsymbol{\alpha}_{n\times n}\right\|}\left\|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^{k}\right\|$$

passando ao limite quando $p\to\infty$ nesta desigualdade obtemos

1.4.2- Estimativa do Erro do Método da Iteração

$$\lim_{p\to\infty} \mathbf{x}^{k+p} = \mathbf{x} \Rightarrow \left\|\mathbf{x}-\mathbf{x}^k\right\| \le \frac{1}{1-\left\|\boldsymbol{\alpha}_{n\times n}\right\|}\left\|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^k\right\| \quad \forall k \ge 1 \qquad (5) \text{ ou}$$

$$\left\|\mathbf{x}-\mathbf{x}^k\right\| \le \frac{\left\|\boldsymbol{\alpha}_{n\times n}\right\|}{1-\left\|\boldsymbol{\alpha}_{n\times n}\right\|}\left\|\mathbf{x}^{k}-\mathbf{x}^{k-1}\right\| \qquad (6) \text{ se } \left\|\boldsymbol{\alpha}_{n\times n}\right\| \le \frac{1}{2} \text{ então segue que}$$

$$\left\|\mathbf{x}-\mathbf{x}^k\right\| \le \left\|\mathbf{x}^{k}-\mathbf{x}^{k-1}\right\| \text{ logo se } \left\|\mathbf{x}^{k}-\mathbf{x}^{k-1}\right\| < \varepsilon \text{ consequentemente}$$

$\left\|\mathbf{x}-\mathbf{x}^k\right\| < \varepsilon$. No caso mais geral, se $q = \left\|\boldsymbol{\alpha}_{n\times n}\right\| < 1$ e $\left\|\mathbf{x}^{k}-\mathbf{x}^{k-1}\right\| < \dfrac{1-q}{q}\varepsilon$,

então $\left\|\mathbf{x}-\mathbf{x}^k\right\| \le \varepsilon$ e para cada componente $\left|x_i - x_i^k\right| < \varepsilon \quad (\text{i}=1,\cdots,\text{n})$

Note que nestes cálculos não foram considerados erros devidos à Aritmética de Precisão Finita (round-off errors). Ou seja, é assumido que os cálculos são exatos.

1.4.2- Estimativa do Erro do Método da Iteração

Se usamos (6) para estimar a norma da diferença entre duas aproximações sucessivas segue

$$\left\|\mathbf{x}-\mathbf{x}^k\right\| \le \frac{\left\|\boldsymbol{\alpha}_{n\times n}\right\|}{1-\left\|\boldsymbol{\alpha}_{n\times n}\right\|}\left\|\mathbf{x}^k-\mathbf{x}^{k-1}\right\| \quad (6)$$

como $\left\|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^k\right\| \le \left\|\boldsymbol{\alpha}_{n\times n}\right\|\left\|\mathbf{x}^k-\mathbf{x}^{k-1}\right\| \le \left\|\boldsymbol{\alpha}_{n\times n}\right\|^k\left\|\mathbf{x}^1-\mathbf{x}^0\right\|$ substituindo em (6)

$\left\|\mathbf{x}-\mathbf{x}^k\right\| \le \dfrac{\left\|\boldsymbol{\alpha}_{n\times n}\right\|^k}{1-\left\|\boldsymbol{\alpha}_{n\times n}\right\|}\left\|\mathbf{x}^1-\mathbf{x}^0\right\|$. Como caso particular, se escolhemos

$\mathbf{x}^0=\boldsymbol{\beta}$, então $\mathbf{x}^1=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_{n\times n}\mathbf{x}^0=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_{n\times n}\boldsymbol{\beta}$ e $\left\|\mathbf{x}^1-\mathbf{x}^0\right\|=\left\|\boldsymbol{\alpha}_{n\times n}\boldsymbol{\beta}\right\| \le \left\|\boldsymbol{\alpha}_{n\times n}\right\|\left\|\boldsymbol{\beta}\right\|$.

Portanto, $$\left\|\mathbf{x}-\mathbf{x}^k\right\| \le \frac{\left\|\boldsymbol{\alpha}_{n\times n}\right\|^{k+1}}{1-\left\|\boldsymbol{\alpha}_{n\times n}\right\|}\left\|\boldsymbol{\beta}\right\| \qquad (6')$$

Esta desigualdade permite estimar o erro que estamos cometendo na iteração k. Note que este erro depende apenas dos dados do problema (a matriz $\boldsymbol{\alpha}_{n\times n}$ e o vetor $\boldsymbol{\beta}$).

1.4.3- Convergência do Método de Seidel

Primeira condição suficiente para a convergência do método de Seidel (*Norma m*).

Teorema: Se para o sistema $\mathbf{x} = \boldsymbol{\alpha}_{n\times n}\mathbf{x} + \boldsymbol{\beta}$ (7) se verifica a condição $\|\boldsymbol{\alpha}_{n\times n}\|_m < 1$ com $\|\boldsymbol{\alpha}_{n\times n}\|_m = \max_i \sum_{j=1}^{n} |\alpha_{ij}| < 1$ (m-norma)

, então o método de Seidel converge para sua única solução

$\mathbf{x} = \boldsymbol{\alpha}_{n\times n}\mathbf{x} + \boldsymbol{\beta}$ independentemente da escolha da aproximação inicial $\mathbf{x}^0$.

Note que a prova deste teorema prova como caso particular o **Corolário 1** sobre a convergência do método da iteração.

Prova: Seja $\mathbf{x}^k = (x_1^k, x_2^k, \cdots, x_n^k)$ a aproximação *k* do método de Seidel. Ou seja,

$$x_i^k = \beta_i + \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} x_j^k + \sum_{j=i}^{n} \alpha_{ij} x_j^{k-1} \quad (i = 1, \cdots, n) \qquad (8)$$

Se $\|\boldsymbol{\alpha}_{n\times n}\|_m < 1$ o sistema (7) terá uma única solução que pode

1.4.3- Convergência do Método de Seidel

ser encontrada pelo método da iteração. Seja $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ a solução exata de

$$x_i = \beta_i + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j \qquad (9)$$

Subtraindo (8) de (9) segue

$$x_i - x_i^k = \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij}(x_j - x_j^k) + \sum_{j=i}^{n} \alpha_{ij}(x_j - x_j^{k-1}) \text{ logo}$$

$$\left|x_i - x_i^k\right| \le \sum_{j=1}^{i-1} \left|\alpha_{ij}\right| \left|x_j - x_j^k\right| + \sum_{j=i}^{n} \left|\alpha_{ij}\right| \left|x_j - x_j^{k-1}\right|.$$ Lembrando a definição de m-norma $\left\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^k\right\|_m = \max_i \left|x_i - x_i^k\right|$ segue que $\left|x_j - x_j^k\right| \le \left\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^k\right\|_m$

Que substituindo na desigualdade anterior segue

$$\left|x_i - x_i^k\right| \le p_i \left\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^k\right\|_m + q_i \left\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{k-1}\right\|_m \quad \text{onde } p_i = \sum_{j=1}^{i-1} \left|\alpha_{ij}\right| \text{ e } q_i = \sum_{j=i}^{n} \left|\alpha_{ij}\right| \qquad (10)$$

Denotemos por *s=s(k)* o valor da componente que verifica

$$\left|x_s - x_s^k\right| = \max_i \left|x_i - x_i^k\right| = \left\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^k\right\|_m$$

1.4.3- Convergência do Método de Seidel

A desigualdade (10) é valida para todas as componentes *i*, logo é válida para a componente *s* e segue

$$\left|x_s - x_s^k\right| \le p_s \left\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^k\right\|_m + q_s \left\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{k-1}\right\|_m \quad \text{onde } p_s = \sum_{j=1}^{s-1}\left|\alpha_{sj}\right| \text{ e } q_s = \sum_{j=s}^{n}\left|\alpha_{sj}\right|$$

$$\left|x_s - x_s^k\right| = \left\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^k\right\|_m \le p_s \left\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^k\right\|_m + q_s \left\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{k-1}\right\|_m \quad \text{ou}$$

$$\left\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^k\right\|_m (1 - p_s) \le q_s \left\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{k-1}\right\|_m \text{ ou } \left\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^k\right\|_m \le \frac{q_s}{(1-p_s)}\left\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{k-1}\right\|_m$$

Se definimos $\mu = \max_i \left\{ \dfrac{q_i}{(1-p_i)} \right\}$ segue da desigualdade anterior

$$\left\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^k\right\|_m \le \mu \left\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{k-1}\right\|_m \qquad (11)$$

Agora devemos provar que $\mu \le \left\|\boldsymbol{\alpha}_{n\times n}\right\|_m < 1$. De fato

$$p_i + q_i = \sum_{j=1}^{i-1}\left|\alpha_{ij}\right| + \sum_{j=i}^{n}\left|\alpha_{ij}\right| = \sum_{j=1}^{n}\left|\alpha_{ij}\right| \le \left\|\boldsymbol{\alpha}_{n\times n}\right\|_m < 1 \text{ por hipótese do Teorema}$$

$$\text{logo } q_i \le \left\|\boldsymbol{\alpha}_{n\times n}\right\|_m - p_i \Rightarrow \frac{q_i}{1-p_i} \le \frac{\left\|\boldsymbol{\alpha}_{n\times n}\right\|_m - p_i}{1-p_i} \le \frac{\left\|\boldsymbol{\alpha}_{n\times n}\right\|_m - p_i \left\|\boldsymbol{\alpha}_{n\times n}\right\|_m}{1-p_i} = \left\|\boldsymbol{\alpha}_{n\times n}\right\|_m$$

1.4.3- Convergência do Método de Seidel

$p_i + q_i \le \|\alpha_{n\times n}\| < 1,\ |p_i| < 1,\ |q_i| < 1$ logo $\|\alpha_{n\times n}\|\,|p_i| < |p_i|$ e $\|\alpha_{n\times n}\|\,|p_i| < \|\alpha_{n\times n}\|$

logo $\mu = \dfrac{q_i}{1-p_i} \le \dfrac{\|\boldsymbol{\alpha}_{n\times n}\|_m - p_i}{1-p_i} \le \dfrac{\|\boldsymbol{\alpha}_{n\times n}\|_m - p_i\|\boldsymbol{\alpha}_{n\times n}\|_m}{1-p_i} = \|\boldsymbol{\alpha}_{n\times n}\|_m < 1$ ou $\mu < 1$

Da desigualdade (11) $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^k\|_m \le \mu\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{k-1}\|_m$ segue

$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^k\|_m \le \mu^k\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\|_m$ e consequentemente $\lim\limits_{k\to\infty} \mathbf{x}^k = \mathbf{x}$ $\square$.

Note que foi obtido:

$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^k\|_m \le \|\boldsymbol{\alpha}_{n\times n}\|_m \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{k-1}\|_m$ para o método da iteração

$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^k\|_m \le \mu\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{k-1}\|_m$ para o método de Seidel com $\mu \le \|\boldsymbol{\alpha}_{n\times n}\|_m$

Isto indica que sob certas condições $\mu = \max\limits_i \left\{\dfrac{q_i}{(1-p_i)}\right\}$ o método

de Seidel converge melhor que o método da iteração. Neste caso é conveniente que a primeira equação do sistema tenha a menor soma dos módulos. $q_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} |\alpha_{1j}|,\ p_1 = 0$

1.4.3- Convergência do Método de Seidel

Teoremas e provas semelhantes podem ser construídos se consideramos em lugar da *m-norma* (linha) a *l-norma* (coluna) e *k-norma* (Euclidiana).

Teorema: Se para o sistema $\mathbf{x} = \boldsymbol{\alpha}_{n\times n}\mathbf{x} + \boldsymbol{\beta}_n$ (7) se verifica a condição $\|\boldsymbol{\alpha}_{n\times n}\|_l < 1$ com $\|\boldsymbol{\alpha}_{n\times n}\|_l = \max_j \sum_{i=1}^{n} |\alpha_{ij}| < 1$ (l-norma)

, então o método de Seidel converge para sua única solução

$\mathbf{x} = \boldsymbol{\alpha}_{n\times n}\mathbf{x} + \boldsymbol{\beta}$ independentemente da escolha da aproximação inicial $\mathbf{x}^0$.

Teorema: Se para o sistema $\mathbf{x} = \boldsymbol{\alpha}_{n\times n}\mathbf{x} + \boldsymbol{\beta}$ (7) se verifica a condição $\|\boldsymbol{\alpha}_{n\times n}\|_k < 1$ com $\|\boldsymbol{\alpha}_{n\times n}\|_k = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |\alpha_{ij}|^2} < 1$ (k-norma)

, então o método de Seidel converge para sua única solução $\mathbf{x} = \boldsymbol{\alpha}_{n\times n}\mathbf{x} + \boldsymbol{\beta}$ independentemente da escolha da aproximação inicial $\mathbf{x}^0$.

1.4.4- Estimativa do Erro do Método de Seidel

Procedendo semelhante ao descrito para o método da iteração obtemos $\left\|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^{k}\right\| \leq \mu\left\|\mathbf{x}^{k}-\mathbf{x}^{k-1}\right\|$ e $\left\|\mathbf{x}^{k+p}-\mathbf{x}^{k}\right\| \leq \frac{\mu}{1-\mu}\left\|\mathbf{x}^{k}-\mathbf{x}^{k-1}\right\|$

Passando ao limite quando $p \rightarrow \infty$ nesta desigualdade segue

$$\lim_{p\rightarrow\infty} \mathbf{x}^{k+p} = \mathbf{x} \quad \text{e consequentemente} \quad \left\|\mathbf{x}-\mathbf{x}^{k}\right\| \leq \frac{\mu}{1-\mu}\left\|\mathbf{x}^{k}-\mathbf{x}^{k-1}\right\|$$

$$\mu = \max_i \left\{ \frac{q_i}{(1-p_i)} \right\}$$

$$\left\|\mathbf{x}-\mathbf{x}^{k}\right\| \leq \frac{\mu^k}{1-\mu}\left\|\mathbf{x}^{1}-\mathbf{x}^{0}\right\| \quad \text{ou por componente}$$

$$\left|x_i - x_i^k\right| \leq \frac{\mu^k}{1-\mu} \max_j \left|x_j^1 - x_j^0\right| \qquad \text{se} \quad \max_j \left|x_j^1 - x_j^0\right| < \frac{1-\mu}{\mu^k}\varepsilon$$

então $\left\|\mathbf{x}-\mathbf{x}^{k}\right\| < \varepsilon.$

1.4.5- Resumo da Convergência e Estimativa do Erro para o Método da Iteração

Os métodos da Iteração e de Seidel convergem se alguma norma canônica da matriz $\boldsymbol{\alpha}_{n\times n}$ é menor que a unidade:

$\left\|\boldsymbol{\alpha}_{n\times n}\right\|_m < 1$

Estimativa do erro na *m-norma*:

$$\left\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^k\right\| \leq \frac{\left\|\boldsymbol{\alpha}_{n\times n}\right\|^k}{1-\left\|\boldsymbol{\alpha}_{n\times n}\right\|}\left\|\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^0\right\| \quad \text{Método da Iteração}$$

Como caso particular, se escolhemos $\mathbf{x}^0 = \boldsymbol{\beta}$, então

$\mathbf{x}^1 = \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\alpha}_{n\times n}\mathbf{x}^0 = \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\alpha}_{n\times n}\boldsymbol{\beta}$ e $\left\|\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^0\right\| = \left\|\boldsymbol{\alpha}_{n\times n}\boldsymbol{\beta}\right\| \leq \left\|\boldsymbol{\alpha}_{n\times n}\right\|\left\|\boldsymbol{\beta}\right\|$.

Portanto, $\left\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^k\right\| \leq \dfrac{\left\|\boldsymbol{\alpha}_{n\times n}\right\|^{k+1}}{1-\left\|\boldsymbol{\alpha}_{n\times n}\right\|}\left\|\boldsymbol{\beta}\right\|$

1.4.5- Resumo da Convergência e Estimativa do Erro para o Método de Seidel

Os métodos da Iteração e de Seidel convergem se alguma norma canônica da matriz $\boldsymbol{\alpha}_{n\times n}$ é menor que a unidade:

$$\|\boldsymbol{\alpha}_{n\times n}\|_m < 1$$

Estimativa do erro na *m-norma*:

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^k\| \le \frac{\mu^k}{1-\mu}\|\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^0\| \qquad \text{Método de Seidel}$$

$$\mu = \max_i \left\{ \frac{q_i}{(1-p_i)} \right\} \qquad \text{onde } p_i = \sum_{j=1}^{i-1} |\alpha_{ij}| \text{ e } q_i = \sum_{j=i}^{n} |\alpha_{ij}|$$

Frase do Dia

"O objetivo de minha teoria é estabelecer de uma vez por todas a certeza dos métodos matemáticos... O estado atual das coisas, em que nos chocamos com os paradoxos, é intolerável. Imaginem as definições e os métodos dedutivos que todos apreendem, ensinam e usam em matemática, os paradigmas de verdade e de certeza, conduzindo a absurdos! Se o pensamento matemático é defeituoso, onde acharemos verdade e certeza?"

D. Hilbert, "On the Infinite", em *Philosophy of Mathematics*, de Benacerraf e Putnam.