2- Resolução de Sistemas Não-lineares.

2.1- Método de Newton.

2.2- Método da Iteração.

3.3- Método do Gradiente.

2- Sistemas Não Lineares de Equações

Considere um sistema não linear de *n* equações com *n* incógnitas.

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \mathbf{f(x)} = \mathbf{0} \quad \text{com } \mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad (1)$$

Note que como caso particular podemos ter um sistema linear de equações algébricas:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n - b_1 = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n - b_2 = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots a_{nn}x_n - b_n = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \mathbf{Ax} - \mathbf{b} = \mathbf{0}$$

2.1- Método de Newton

Considere um sistema não linear de n equações com n incógnitas.

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \mathbf{f(x) = 0} \quad \text{com } \mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (1)$$

Resolveremos este problema com aproximações sucessivas. Seja a aproximação k com $\mathbf{x}^k = (x_1^k, x_2^k, \cdots, x_n^k)$ sendo uma das raízes de $\mathbf{x}$ com erro $\Delta\mathbf{x}^k = (\Delta x_1^k, \Delta x_2^k, \cdots, \Delta x_n^k)$. Logo $\mathbf{x} = \mathbf{x}^k + \Delta\mathbf{x}^k$.

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}^k + \Delta\mathbf{x}^k) = \mathbf{0} \quad (2)$$

Supondo que $\mathbf{f(x)}$ é continuamente diferenciável num domínio convexo que contem $\mathbf{x}$ e $\mathbf{x}^k$ podemos expandir a função em série de potencia entorno do ponto $\mathbf{x}^k$ e desprezamos as potencias maiores que 1 (termos não lineares).

2.1- Método de Newton

Linearização do sistema (2).

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}^k + \Delta\mathbf{x}^k) \approx \mathbf{f}(\mathbf{x}^k) + \mathbf{f}'(\mathbf{x}^k)\Delta\mathbf{x}^k = \mathbf{0} \quad (3) \text{ ou}$$

$$\begin{cases} f_1(\mathbf{x}) \approx f_1(x_1^k, x_2^k, \cdots, x_n^k) + \left.\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}\right|_{\mathbf{x}^\mathbf{k}} \Delta x_1^k + \left.\dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}\right|_{\mathbf{x}^\mathbf{k}} \Delta x_2^k + \cdots + \left.\dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}\right|_{\mathbf{x}^\mathbf{k}} \Delta x_n^k = 0 \\ f_2(\mathbf{x}) \approx f_2(x_1^k, x_2^k, \cdots, x_n^k) + \left.\dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}\right|_{\mathbf{x}^\mathbf{k}} \Delta x_1^k + \left.\dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}\right|_{\mathbf{x}^\mathbf{k}} \Delta x_2^k + \cdots + \left.\dfrac{\partial f_2}{\partial x_n}\right|_{\mathbf{x}^\mathbf{k}} \Delta x_n^k = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_n(\mathbf{x}) \approx f_n(x_1^k, x_2^k, \cdots, x_n^k) + \left.\dfrac{\partial f_n}{\partial x_1}\right|_{\mathbf{x}^\mathbf{k}} \Delta x_1^k + \left.\dfrac{\partial f_n}{\partial x_2}\right|_{\mathbf{x}^\mathbf{k}} \Delta x_2^k + \cdots + \left.\dfrac{\partial f_n}{\partial x_n}\right|_{\mathbf{x}^\mathbf{k}} \Delta x_n^k = 0 \end{cases}$$

Devemos entender $\mathbf{f}'(\mathbf{x})$ como sendo a matriz Jacobiana das funções $f_1, f_2, \cdots, f_n$ com respeito as variáveis $x_1, x_2, \cdots, x_n$.

2.1- Método de Newton

$$\mathbf{f}\,'(\mathbf{x}) = \mathbf{W}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

O sistema (3) é um sistema linear da forma:

$$\begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}^k) \\ f_2(\mathbf{x}^k) \\ \vdots \\ f_n(\mathbf{x}^k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \left.\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}\right|_{\mathbf{x}^k} & \left.\dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}\right|_{\mathbf{x}^k} & \cdots & \left.\dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}\right|_{\mathbf{x}^k} \\ \left.\dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}\right|_{\mathbf{x}^k} & \left.\dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}\right|_{\mathbf{x}^k} & \cdots & \left.\dfrac{\partial f_2}{\partial x_n}\right|_{\mathbf{x}^k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \left.\dfrac{\partial f_n}{\partial x_1}\right|_{\mathbf{x}^k} & \left.\dfrac{\partial f_n}{\partial x_2}\right|_{\mathbf{x}^k} & \cdots & \left.\dfrac{\partial f_n}{\partial x_n}\right|_{\mathbf{x}^k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1^k \\ \Delta x_2^k \\ \vdots \\ \Delta x_n^k \end{bmatrix} = 0 \text{ ou } \mathbf{f}(\mathbf{x}^k) + \mathbf{W}(\mathbf{x}^k)\Delta\mathbf{x}^k = \mathbf{0}$$

2.1- Método de Newton

Se a matriz $\mathbf{W}(\mathbf{x}^k)$ é não singular, então possui inversa e segue

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}^k)^{-1}[\mathbf{f}(\mathbf{x}^k) + \mathbf{W}(\mathbf{x}^k)\Delta\mathbf{x}^k] = \mathbf{0} \Rightarrow \Delta\mathbf{x}^k = -\mathbf{W}(\mathbf{x}^k)^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{x}^k) \text{ logo}$$

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \Delta\mathbf{x}^k = \mathbf{x}^k - \mathbf{W}(\mathbf{x}^k)^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{x}^k) \text{ com } k = 0,1,2,\ldots$$

Para a aproximação zero podemos escolher $\mathbf{x}^0$ como um valor estimado grotescamente para a raiz procurada.

Este é o Método de Newton e note que devemos calcular a matriz inversa em cada passo: $\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k - \mathbf{W}(\mathbf{x}^k)^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{x}^k)$. Se a matriz inversa $\mathbf{W}(\mathbf{x})^{-1}$ é continua na vizinhança da solução procurada $\mathbf{x}^*$ e a aproximação inicial $\mathbf{x}^0$ é suficientemente perto de $\mathbf{x}^*$, então podemos fazer a seguinte aproximação para obter o Método de Newton Modificado:

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}^k)^{-1} \approx \mathbf{W}(\mathbf{x}^0)^{-1}$$

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k - \mathbf{W}(\mathbf{x}^0)^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{x}^k)$$

2.1.1- Existência de Raiz do Sistema e Convergência do Método de Newton

Teorema 1: Seja um sistema não linear de equações com coeficientes reais, onde as funções $\mathbf{f(x)}$ são definidas e continuas junto com suas derivadas parciais de primeira e segunda ordem num domínio Ω. Ou seja, $\mathbf{f(x)} \in C^2(\Omega)$.

$$\mathbf{f(x)} = \mathbf{0} \quad \text{com } \mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Suponha $\mathbf{x}^0$ e o fecho de sua vizinhança $\overline{V}(\mathbf{x}^0) = \left\{ \left\| \mathbf{x} - \mathbf{x}^0 \right\|_m \leq \overline{\Delta \mathbf{x}} \right\} \subset \Omega$ serem pontos de Ω, onde $\| \; \|_m$ é a *m*-norma e as seguintes condições serem válidas:

1) A matriz Jacobiana $\mathbf{W(x)}$ em $\mathbf{x}^0$ tem inversa $\mathbf{W}(\mathbf{x}^0)^{-1}$ e

$$\left\| \mathbf{W}(\mathbf{x}^0)^{-1} \right\|_m \leq A_0, \text{ com } \left\| \mathbf{W}(\mathbf{x}^0) \right\|_m = \max_i \frac{1}{\left| \det(\mathbf{W}(\mathbf{x}^0)) \right|} \sum_{j=1}^{n} \left| \overline{W}_{ij} \right|, \; \overline{W}_{ij}$$

são os cofatores do elemento W_{ij}

2.1.1- Existência de Raiz do Sistema e Convergência do Método de Newton

2) $\left\| \mathbf{W}(\mathbf{x}^0)^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{x}^0) \right\|_m \le B_0 \le \dfrac{\overline{\Delta \mathbf{x}}}{2},$

3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left| \frac{\partial^2 f_i(\mathbf{x})}{\partial x_j \partial x_k} \right| \le C \text{ com } (i, j = 1, \cdots, n) \text{ e } \mathbf{x} \in \overline{V}(\mathbf{x}^0),$

4) as constantes A_0, B_0 e C satisfazem a desigualdade

$\mu_0 = 2nA_0B_0C \le 1.$

Então o Método de Newton $\mathbf{x}^{p+1} = \mathbf{x}^p - \mathbf{W}(\mathbf{x}^p)^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{x}^p),\ p = 0, 1, 2, \ldots$

converge para esta escolha de aproximação inicial x^0 e

$\mathbf{x}^* = \lim\limits_{p \to \infty} \mathbf{x}^p$ é a solução do sistema $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ tal que

$\left\| \mathbf{x}^* - \mathbf{x}^0 \right\|_m \le 2B_0 \le \overline{\Delta \mathbf{x}}.$

Note que, sempre que sejam verificadas todas as hipóteses do teorema o método de Newton converge para uma solução $\mathbf{x}^*$ que é raiz do sistema na vizinhança de $\mathbf{x}^0$.

2.1.1- Existência de Raiz do Sistema e Convergência do Método de Newton

Note que, se $\mathbf{f(x)} \in C^2(\Omega)$ e o sistema $\mathbf{f(x)} = \mathbf{0}$ tem em Ω uma solução $\mathbf{x}^*$ segue que $\mathbf{f(x^*)} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{W(x^*)} \neq 0$ e as condições do teorema são válidas para qualquer ponto $\mathbf{x}^0$ suficientemente perto de $\mathbf{x}^*$.

Por outro lado, para que a condição 2) seja válida é importante observar que B_0 fornece uma estimativa da diferença entre as aproximações primeira e inicial. Desta forma podemos verificar rapidamente se esta desigualdade é verificada assim que a primeira aproximação seja calculada:

2) $$\left\| \mathbf{W(x^0)}^{-1}\mathbf{f(x^0)} \right\|_m = \left\| \mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^0 \right\|_m \leq B_0 \leq \frac{\overline{\Delta \mathbf{x}}}{2}.$$

Também, podem ser obtidos resultados de convergência análogos aos anteriores para o caso em que a norma considerada é $\| \ \|_l$ ou $\| \ \|_k$.

2.1.1- Existência de Raiz do Sistema e Convergência do Método de Newton

Definição de Taxa de Convergência para os Métodos iterativos:

Dizemos que um método iterativo converge para a solução $\mathbf{x}^*$ com taxa de convergência de ordem Q se a seguinte desigualdade se verifica $\forall\ k > \bar{k}$

$$\left\| \mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^* \right\|_{específica} \leq c \left\| \mathbf{x}^{k} - \mathbf{x}^* \right\|_{específica}^{Q}$$

onde c não depende de $\mathbf{x}^k$.

Taxa de Convergência Computacional

$$\rho = \frac{\ln\left(\dfrac{\left\| \mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^* \right\|_{específica}}{\left\| \mathbf{x}^{k} - \mathbf{x}^* \right\|_{específica}} \right)}{\ln\left(\dfrac{\left\| \mathbf{x}^{k} - \mathbf{x}^* \right\|_{específica}}{\left\| \mathbf{x}^{k-1} - \mathbf{x}^* \right\|_{específica}} \right)}$$

2.1.2- Unicidade da Solução do Método de Newton e Taxa de Convergência e Estabilidade.

Teorema 2: Se as condições 1) a 4) do Teorema 1 são verificadas, então existirá no domínio $\left\| \mathbf{x} - \mathbf{x}^0 \right\|_m \leq 2B_0 \leq \overline{\Delta \mathbf{x}}$ uma única solução do sistema $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$.

Teorema 3: Se as condições 1) a 4) do Teorema 1 são verificadas, então a seguinte desigualdade se verifica para as aproximações sucessivas $\mathbf{x}^p$

$$\left\| \mathbf{x}^* - \mathbf{x}^p \right\|_m \leq \left(\frac{1}{2} \right)^{p-1} (\mu_0)^{2p-1} (B_0)$$

onde $\mathbf{x}^*$ é a solução do sistema $\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$ e $\mu_0 = 2nA_0B_0C \leq 1$.

Falta algum resultado que garanta a estabilidade da convergência do Método de Newton quando varia a escolha da aproximação inicial!

2.1.2- Unicidade da Solução do Método de Newton e Taxa de Convergência e Estabilidade.

Teorema 4: Se as condições 1) a 4) do Teorema 1 são verificadas e $\frac{2}{\mu_0} B_0 C \leq \overline{\Delta \mathbf{x}}$ onde $\mu_0 = 2nA_0B_0C < 1$, então o Método de Newton converge para sua única solução $\mathbf{x}^*$ do sistema $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ no domínio $\left\| \mathbf{x} - \mathbf{x}^0 \right\|_m \leq 2B_0 \leq \overline{\Delta \mathbf{x}}$ para qualquer escolha da aproximação inicial $\mathbf{x}^0$ que pertença ao domínio $\left\| \tilde{\mathbf{x}}^0 - \mathbf{x}^0 \right\|_m \leq \frac{1-\mu_0}{2\mu_0} B_0$.

Note que se $2B_0 < \overline{\Delta \mathbf{x}}$ e $\mu_0 < 1$ então para a aproximação inicial $\mathbf{x}^0$ sempre há uma vizinhança e qualquer ponto desta vizinhança pode ser escolhido como aproximação inicial para que o Método de Newton seja convergente para a solução procurada $\mathbf{x}^*$.

Suponha $2B_0 < 2qB_0 = \overline{\Delta \mathbf{x}}$ com $q > 1$ fixe $\mu_0^* = \max(\mu_0, 1/q)$ logo pelo teorema 1 e 4 o Método de Newton para qualquer aproximação inicial $\tilde{\mathbf{x}}^0$ que verifique a condição $\left\| \tilde{\mathbf{x}}^0 - \mathbf{x}^0 \right\|_m \leq \frac{1-\mu_0^*}{2\mu_0} B_0$ será convergente para $\mathbf{x}^*$.

2.1.3- Exemplo 2 pag. 462 do Demidovich

Use o Método de Newton para encontrar a solução aproximada positiva do sistema de equações:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ 2x^2 + y^2 - 4z = 0 \\ 3x^2 - 4y + z^2 = 0 \end{cases}$$

começando com a aproximação inicial $x_0 = y_0 = z_0 = 0.5.$

Solução: Nosso sistema é

$$\begin{cases} f_1(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \\ f_2(x,y,z) = 2x^2 + y^2 - 4z = 0 \\ f_3(x,y,z) = 3x^2 - 4y + z^2 = 0 \end{cases}$$

Método de Newton

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k - \mathbf{W}(\mathbf{x}^k)^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{x}^k)$$

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Para executar cada aproximação devemos calcular em cada passo

$\mathbf{f}(\mathbf{x}^k)$, $\mathbf{W}(\mathbf{x}^k)$ e $\mathbf{W}(\mathbf{x}^k)^{-1}$

2.1.3- Exemplo 2 pag. 462 do Demidovich

Solução: Nosso sistema é $x_0 = y_0 = z_0 = 0.5.$

$$\begin{cases} f_1(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \\ f_2(x,y,z) = 2x^2 + y^2 - 4z = 0 \\ f_3(x,y,z) = 3x^2 - 4y + z^2 = 0 \end{cases}$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}^0) = \begin{bmatrix} -0.25 \\ -1.25 \\ -1.00 \end{bmatrix} = \begin{cases} f_1(x^0,y^0,z^0) = (0.5)^2 + (0.5)^2 + (0.5)^2 - 1 = -0.25 \\ f_2(x^0,y^0,z^0) = 2(0.5)^2 + (0.5)^2 - 4(0.5) = -1.25 \\ f_3(x^0,y^0,z^0) = 3(0.5)^2 - 4(0.5) + (0.5)^2 = -1.00 \end{cases}$$

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 4x & 2y & -4 \\ 6x & -4 & 2z \end{bmatrix} \text{ logo } \mathbf{W}(\mathbf{x}^0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \\ 3 & -4 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } \det(\mathbf{W}(\mathbf{x}^0)) = -40$$

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}^0)^{-1} = -\frac{1}{40}\begin{bmatrix} -15 & -5 & -5 \\ -14 & -2 & 6 \\ -11 & 7 & -1 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{x}^1 = \mathbf{x}^0 - \mathbf{W}(\mathbf{x}^0)^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{x}^0) = \begin{bmatrix} 0.875 \\ 0.500 \\ 0.375 \end{bmatrix}$$

2.1.3- Exemplo 2 pag. 462 do Demidovich

Para a iteração 2 devemos calcular

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}^1)=\begin{bmatrix}0.15625\\0.28125\\0.43750\end{bmatrix}=\begin{cases}f_1(x^1,y^1,z^1)=(0.875)^2+(0.500)^2+(0.375)^2-1=0.15625\\ f_2(x^1,y^1,z^1)=2(0.875)^2+(0.500)^2-4(0.375)=0.28125\\ f_3(x^1,y^1,z^1)=3(0.875)^2-4(0.500)+(0.375)^2=0.43750\end{cases}$$

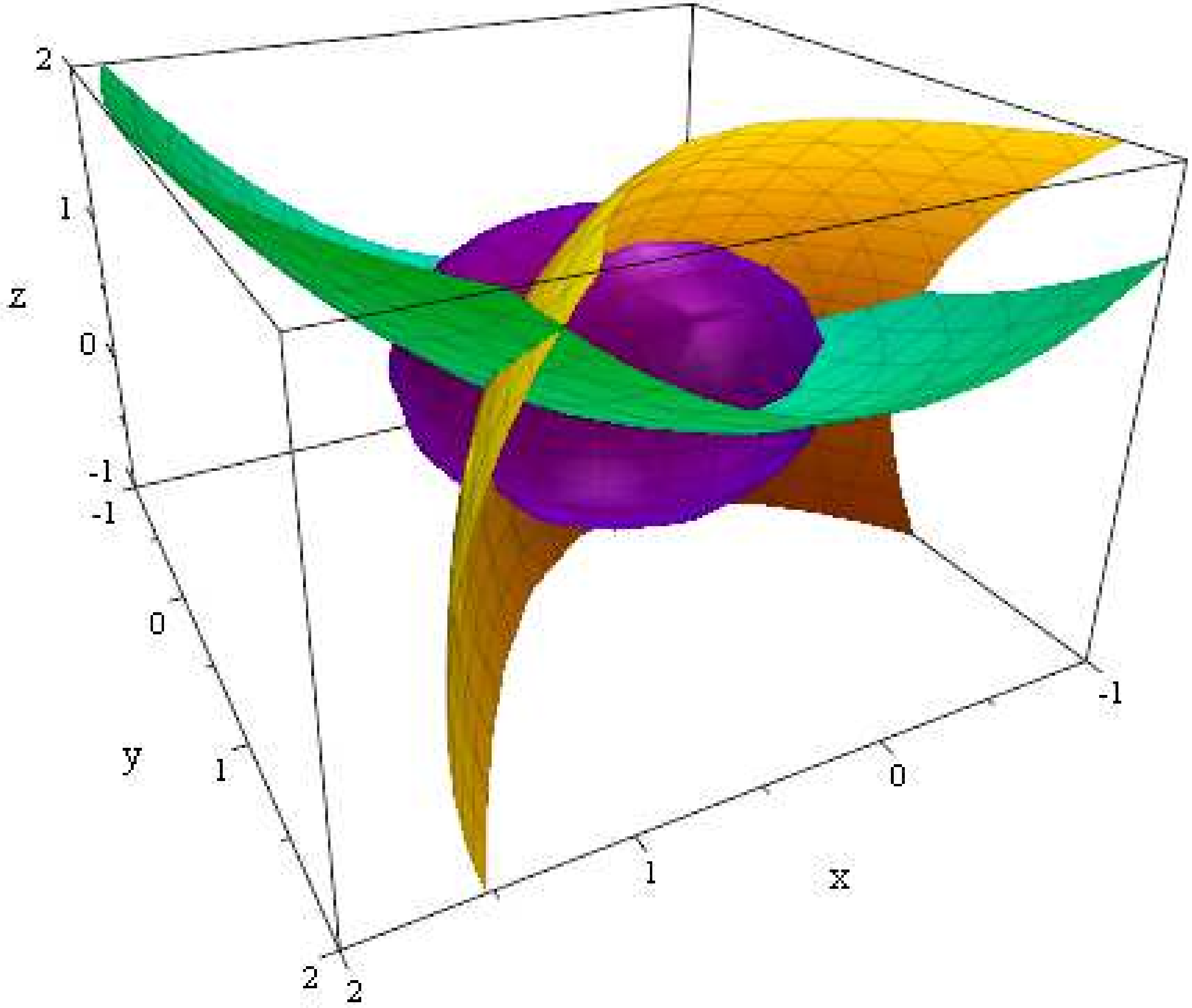
$$\mathbf{W}(\mathbf{x})=\begin{bmatrix}2x & 2y & 2z\\4x & 2y & -4\\6x & -4 & 2z\end{bmatrix}\text{ logo }\mathbf{W}(\mathbf{x}^1)=\begin{bmatrix}1.750 & 1 & 0.750\\3.500 & 1 & -4\\5.250 & -4 & 0.750\end{bmatrix}\text{ e }\det(\mathbf{W}(\mathbf{x}^1))=-64.75$$

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}^1)^{-1}=-\frac{1}{64.75}\begin{bmatrix}-15.25 & -3.75 & -4.75\\-23.625 & -2.6250 & 9.625\\-19.25 & 12.25 & -1.75\end{bmatrix}\text{ e }\mathbf{x}^2=\mathbf{x}^1-\mathbf{W}(\mathbf{x}^1)^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{x}^1)=\begin{bmatrix}0.78981\\0.49662\\0.36993\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases}\text{e assim sucessivamente,}\\ \text{note que a medida que}\\ \text{aumenta o número de}\\ \text{iterações } \mathbf{f}(\mathbf{x}^k)\to\mathbf{0}\end{cases}\quad \mathbf{x}^3=\begin{bmatrix}0.78521\\0.49662\\0.36992\end{bmatrix}\ \mathbf{f}(\mathbf{x}^3)=\begin{bmatrix}0.00001\\0.00004\\0.00005\end{bmatrix}\ \mathbf{f}(\mathbf{x}^2)=\begin{bmatrix}0.007279\\0.014511\\0.021767\end{bmatrix}$$

2.1.3- Exemplo 2 pag. 462 do Demidovich

Visualização gráfica do problema



Frase do Dia

"True Laws of Nature cannot be linear."

Albert Einstein