2- Resolução de Sistemas Não-lineares.

2.1- Método de Newton.

2.2- Método da Iteração.

2.3- Método do Gradiente.

2- Sistemas Não Lineares de Equações

Considere um sistema não linear de *n* equações com *n* incógnitas.

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad \text{com } \mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Note que como caso particular podemos ter um sistema linear de equações algébricas:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n - b_1 = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n - b_2 = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots a_{nn}x_n - b_n = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \mathbf{Ax} - \mathbf{b} = \mathbf{0}$$

2.2- Método da Iteração

Considere um sistema não linear de *n* equações com *n* incógnitas como o seguinte:

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ x_2 = \varphi_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = \varphi_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) \end{cases} \quad \text{ou} \quad \mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) \quad \text{com } \boldsymbol{\varphi} = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (1)$$

onde as funções $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$ são reais, definidas e contínuas numa vizinhança Ω de uma solução isolada $\mathbf{x}^*$ deste sistema. Podemos tentar resolver este problema com o Método da Iteração escolhendo uma aproximação inicial $\mathbf{x}^0 \approx \mathbf{x}^*$.

$$\mathbf{x}^{k+1} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}^k) \quad (2)$$

Se este processo iterativo converge, então

$$\boldsymbol{\xi} = \lim_{k\to\infty} \mathbf{x}^k \Rightarrow \lim_{k\to\infty} \mathbf{x}^{k+1} = \lim_{k\to\infty} \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}^k) = \boldsymbol{\varphi}(\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}^k) = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\xi})$$

Ou seja, $\boldsymbol{\xi}$ é uma raiz do sistema (1). Se $\mathbf{x}^*$ é a única raiz deste

2.2- Método da Iteração

sistema em Ω, então $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{x}^*$. O Método da Iteração pode ser aplicado também a sistemas de equações na forma:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \mathbf{f(x)} = \mathbf{0} \quad \text{com } \mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (3)$$

onde $\mathbf{f(x)}$ é uma função vetor definida e contínua numa vizinhança Ω de uma raiz isolada $\mathbf{x}^*$ deste sistema. Entre as varias maneiras de transformar o sistema (3) no (1) destacamos a seguinte. Reescreva o sistema (3) na forma

$$\mathbf{x} = \mathbf{x} + \Lambda\mathbf{f(x)}$$

onde Λ é uma matriz não singular. Definindo $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \Lambda\mathbf{f(x)}$ segue que $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})$ e podemos aplicar o método da iteração. Se a função $\mathbf{f}$ e sua primeira derivada é contínua em Ω segue

$\boldsymbol{\varphi}'(\mathbf{x}) = \mathbf{E} + \Lambda\mathbf{f}'(\mathbf{x})$ e pode ser provado que o processo iterativo

2.2- Método da Iteração

converge rapidamente se a norma de $\boldsymbol{\varphi}'(\mathbf{x})$ é pequena. Logo é conveniente escolher a matriz Λ tal que

$$\boldsymbol{\varphi}'(\mathbf{x}^0) = \mathbf{E} + \Lambda \mathbf{f}'(\mathbf{x}^0) = \mathbf{0}$$

e se a matriz $\mathbf{f}'(\mathbf{x}^0)$ é não singular segue que

$$\Lambda = -[\mathbf{f}'(\mathbf{x}^0)]^{-1} \Rightarrow \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - [\mathbf{f}'(\mathbf{x}^0)]^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{x}) \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{x} - [\mathbf{f}'(\mathbf{x}^0)]^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{x})$$

Aplicando o método da iteração a este sistema segue

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k - [\mathbf{f}'(\mathbf{x}^0)]^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{x}^k) \qquad (4)$$

Note que (4) coincide com o Método de Newton Modificado para o sistema (3), já que $[\mathbf{f}'(\mathbf{x}^0)]^{-1} = \mathbf{W}(\mathbf{x}^0)^{-1}$ (Jacobiana). Ou seja,

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k - \mathbf{W}(\mathbf{x}^0)^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{x}^k) \qquad (4')$$

Se a matriz $\mathbf{f}'(\mathbf{x}^0)$ é singular ($\det(\mathbf{f}'(\mathbf{x}^0)) = 0$), então deve ser escolhida uma aproximação inicial diferente de $\mathbf{x}^0$.

2.2.1- Convergência do Método da Iteração

Teorema: Seja um sistema não linear de equações $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})$ com funções $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})$ e $\boldsymbol{\varphi}'(\mathbf{x})$ continuas em Ω tais que em Ω se verifica a desigualdade $\|\boldsymbol{\varphi}'(\mathbf{x})\|_{\mathbf{I}} \leq q < 1$ (q é uma constante). Se todas as aproximações sucessivas $\mathbf{x}^{k+1} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}^{k})$ pertencem a Ω, então este processo iterativo converge e seu limite é uma solução do sistema $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})$ em Ω.

Ou seja, $\lim\limits_{k\to\infty} \mathbf{x}^{k} = \mathbf{x}^{*} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}^{*})$.

Aqui as normas são $\|\boldsymbol{\varphi}'(\mathbf{x})\|_{\mathbf{I}} = \max\limits_{\mathbf{x}\in\Omega} \|\boldsymbol{\varphi}'(\mathbf{x})\|_{m}$ e $\|\boldsymbol{\varphi}'(\mathbf{x})\|_{m} = \max\limits_{i} \sum\limits_{j=1}^{n} \left| \dfrac{\partial \varphi_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} \right|$

Corolário: O Método da Iteração converge se

$$\sum_{j=1}^{n} \left| \frac{\partial \varphi_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} \right| \leq q < 1 \quad \forall i = 1, \cdots, n \text{ quando } \mathbf{x} \in \Omega.$$

Estimativa de erro na aproximação k para o Método da Iteração:

$$\|\mathbf{x}^{*} - \mathbf{x}^{k}\|_{m} \leq \frac{q^{k}}{1-q} \|\mathbf{x}^{1} - \mathbf{x}^{0}\|_{m} = \frac{q^{k}}{1-q} \|\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}^{0}) - \mathbf{x}^{0}\|_{m}$$

$\boxed{\text{já que } \mathbf{x}^{1} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}^{0})}$

2.3 – Método do Gradiente (Descida mais Íngreme)

Considere um sistema não linear de *n* equações com *n* incógnitas.

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad \text{com } \mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (3)$$

e suponha que as f_i são reais e continuamente diferenciavel no domínio de definição comum. Construa a seguinte função

$$U(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} [f_i(\mathbf{x})]^2 = \left(\mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{f}(\mathbf{x})\right).$$

Note que cada solução do sistema (3) anula a função $U(\mathbf{x})$ e vice-versa, cada $\mathbf{x}$ que anula $U(\mathbf{x})$ é solução do sistema (3). Suponha que (3) tem somente uma solução isolada que corresponde ao ponto de mínimo absoluto de $U(\mathbf{x})$. Logo o problema se reduze a encontrar o mínimo desta função.

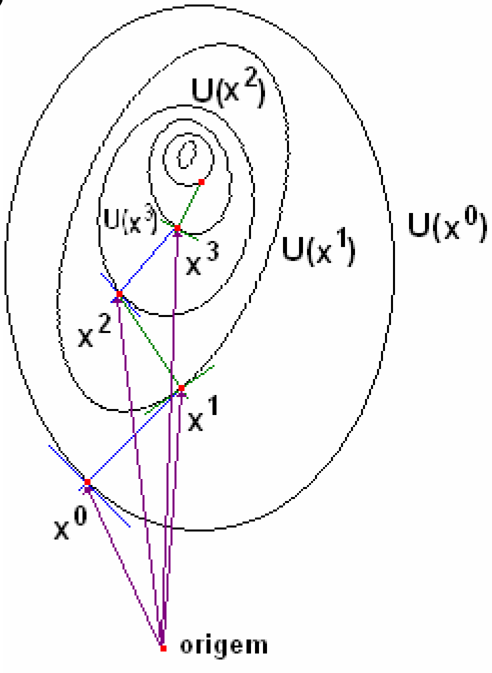
2.3 – Método do Gradiente (Descida mais Íngreme)

Seja $\mathbf{x}^*$ a raiz de (3) e $\mathbf{x}^0$ a aproximação inicial. Construa uma superfície de nível para $U(\mathbf{x})$ em $\mathbf{x}^0$. Se $\mathbf{x}^0$ está suficientemente perto de $\mathbf{x}^*$ esta superfície de nível $U(\mathbf{x}) = U(\mathbf{x}^0)$ deve se assemelhar a um elipsóide. Parta de $\mathbf{x}^0$ na direção da normal da superfície $U(\mathbf{x}) = U(\mathbf{x}^0)$ até tocar alguma outras superfície de nível tal que $U(\mathbf{x}) = U(\mathbf{x}^1) < U(\mathbf{x}^0)$. Parta de $\mathbf{x}^1$ na direção da normal da superfície $U(\mathbf{x}) = U(\mathbf{x}^1)$ até tocar alguma outras superfície de nível tal que $U(\mathbf{x}) = U(\mathbf{x}^2) < U(\mathbf{x}^1)$.

A repetição deste processo nos leva ao ponto

de menor valor de $U(\mathbf{x})$, que corresponde

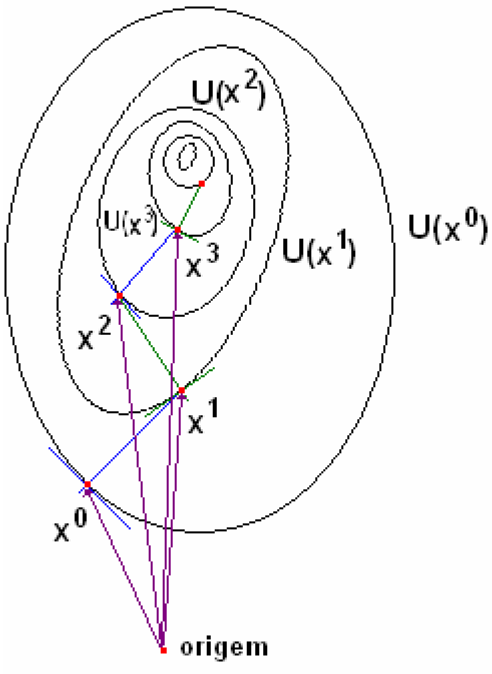
à raiz do sistema (3).



2.3 – Método do Gradiente (Descida mais Íngreme)

Lembrando que o gradiente da função $U(\mathbf{x})$ tem a direção da normal $\mathbf{n}$ da superfície de nível em cada ponto $\mathbf{x}^k$.

$$\nabla U(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial U}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial U}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial U}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$



Logo $\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k - \lambda^k \nabla U(\mathbf{x}^k) \quad (k = 0, 1, \cdots)$. Resta determinar λ^k para cada passo. Para isto considere a função que descreve a variação contínua da superfície de nível entre o ponto $\mathbf{x}^k$ e $\mathbf{x}^{k+1}$:

$$\Phi(\lambda) = U(\mathbf{x}^k - \lambda \nabla U(\mathbf{x}^k))$$

2.3 – Método do Gradiente (Descida mais Íngreme)

O parâmetro $\lambda = \lambda^k$ deve ser escolhido para que $\Phi(\lambda)$ tenha um mínimo. Ou seja,

$$\frac{\partial \Phi(\lambda)}{\partial \lambda} = 0 = \frac{\partial U(\mathbf{x}^k - \lambda \nabla U(\mathbf{x}^k))}{\partial \lambda} = \frac{\partial \sum_{i=1}^{n} [f_i(\mathbf{x}^k - \lambda \nabla U(\mathbf{x}^k))]^2}{\partial \lambda} \qquad (5)$$

Em geral, esta equação deve ser resolvida por métodos numéricos. Aqui apresentamos um método para determinar de forma aproximada o parâmetro λ^k. Para isto suponha que λ é pequeno e que potencias deste parâmetro podem ser desprezadas se comparada com a parte linear. Logo expandindo as funções f_i em potencias de λ e retendo apenas o termo linear segue

$$f_i(\mathbf{x}(\lambda)) = f_i(\mathbf{x}^k - \lambda \nabla U(\mathbf{x}^k)) \approx f_i(\mathbf{x}(0)) + \left.\frac{\partial f_i}{\partial \lambda}\right|_{\lambda=0} \lambda =$$

$$f_i(\mathbf{x}^k) + \lambda \frac{\partial f_i(\mathbf{x}^k)}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \lambda} = f_i(\mathbf{x}^k) - \lambda \frac{\partial f_i(\mathbf{x}^k)}{\partial \mathbf{x}} \nabla U(\mathbf{x}^k)$$

2.3 – Método do Gradiente (Descida mais Íngreme)

Note que na equação anterior deve ser entendido por

$$\frac{\partial f_i(\mathbf{x}^k)}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_i(\mathbf{x}^k)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_i(\mathbf{x}^k)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_i(\mathbf{x}^k)}{\partial x_n} \end{bmatrix} \text{ (um vetor)}$$

Logo $\Phi(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} \left(f_i(\mathbf{x}^k) - \lambda \frac{\partial f_i(\mathbf{x}^k)}{\partial \mathbf{x}} \nabla U(\mathbf{x}^k) \right)^2$ e

$$\frac{\partial \Phi(\lambda)}{\partial \lambda} = 0 = -2\sum_{i=1}^{n} \left(f_i(\mathbf{x}^k) - \lambda \frac{\partial f_i(\mathbf{x}^k)}{\partial \mathbf{x}} \nabla U(\mathbf{x}^k) \right) \left(\frac{\partial f_i(\mathbf{x}^k)}{\partial \mathbf{x}} \nabla U(\mathbf{x}^k) \right)$$

ou

$$\lambda^k = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i(\mathbf{x}^k) \left(\frac{\partial f_i(\mathbf{x}^k)}{\partial \mathbf{x}} \nabla U(\mathbf{x}^k) \right)}{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f_i(\mathbf{x}^k)}{\partial \mathbf{x}} \nabla U(\mathbf{x}^k) \right)^2}$$

2.3 – Método do Gradiente (Descida mais Íngreme)

Como $U(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} [f_i(\mathbf{x})]^2$ segue que

$$\nabla U(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial U}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial U}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial U}{\partial x_n} \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial x_1} f_i(\mathbf{x}) \\ \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial x_2} f_i(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial x_n} f_i(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = 2 \underbrace{\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}}_{[\mathbf{W}(\mathbf{x})]^T} \underbrace{\begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_n(\mathbf{x}) \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}(\mathbf{x})}$$

onde $\mathbf{W}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$ é a Jacobiana da função vetor $\mathbf{f}(\mathbf{x})$

2.3 – Método do Gradiente (Descida mais Íngreme)

Logo $\nabla U(\mathbf{x}^k) = 2[\mathbf{W}(\mathbf{x}^k)]^{\mathrm{T}}\mathbf{f}(\mathbf{x}^k)$ e

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(\mathbf{x}^k)\left(\frac{\partial f_i(\mathbf{x}^k)}{\partial \mathbf{x}}\nabla U(\mathbf{x}^k)\right) = [\mathbf{f}(\mathbf{x}^k)]^{\mathrm{T}}\mathbf{W}(\mathbf{x}^k)2[\mathbf{W}(\mathbf{x}^k)]^{\mathrm{T}}\mathbf{f}(\mathbf{x}^k)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f_i(\mathbf{x}^k)}{\partial \mathbf{x}}\nabla U(\mathbf{x}^k)\right)^2 =$$

$$\left[2\mathbf{W}(\mathbf{x}^k)[\mathbf{W}(\mathbf{x}^k)]^{\mathrm{T}}\mathbf{f}(\mathbf{x}^k)\right]^{\mathrm{T}}\left[2\mathbf{W}(\mathbf{x}^k)[\mathbf{W}(\mathbf{x}^k)]^{\mathrm{T}}\mathbf{f}(\mathbf{x}^k)\right]$$

Portanto

$$\lambda^k = \frac{[\mathbf{f}(\mathbf{x}^k)]^{\mathrm{T}}\mathbf{W}(\mathbf{x}^k)[\mathbf{W}(\mathbf{x}^k)]^{\mathrm{T}}\mathbf{f}(\mathbf{x}^k)}{2\left[\mathbf{W}(\mathbf{x}^k)[\mathbf{W}(\mathbf{x}^k)]^{\mathrm{T}}\mathbf{f}(\mathbf{x}^k)\right]^{\mathrm{T}}\left[\mathbf{W}(\mathbf{x}^k)[\mathbf{W}(\mathbf{x}^k)]^{\mathrm{T}}\mathbf{f}(\mathbf{x}^k)\right]}$$

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k - \mu^k[\mathbf{W}(\mathbf{x}^k)]^{\mathrm{T}}\mathbf{f}(\mathbf{x}^k) \quad \text{onde} \quad \mu^k = 2\lambda^k \qquad (6)$$

Note que o parâmetro μ^k deve ser calculado para cada passo.

2.3 – Método do Gradiente (Descida mais Íngreme)

Resumindo o método, já que $\boxed{[\mathbf{W}(\mathbf{x}^k)]^{\mathrm{T}}\mathbf{f}(\mathbf{x}^k) = \left[[\mathbf{f}(\mathbf{x}^k)]^{\mathrm{T}}\mathbf{W}(\mathbf{x}^k)\right]^{\mathrm{T}}}$

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k - \mu^k[\mathbf{W}(\mathbf{x}^k)]^{\mathrm{T}}\mathbf{f}(\mathbf{x}^k)$$

$$\mu^k = \frac{[\mathbf{f}(\mathbf{x}^k)]^{\mathrm{T}}\mathbf{W}(\mathbf{x}^k)[\mathbf{W}(\mathbf{x}^k)]^{\mathrm{T}}\mathbf{f}(\mathbf{x}^k)}{\left[\mathbf{W}(\mathbf{x}^k)[\mathbf{W}(\mathbf{x}^k)]^{\mathrm{T}}\mathbf{f}(\mathbf{x}^k)\right]^{\mathrm{T}}\left[\mathbf{W}(\mathbf{x}^k)[\mathbf{W}(\mathbf{x}^k)]^{\mathrm{T}}\mathbf{f}(\mathbf{x}^k)\right]}$$

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k - \frac{\left[[\mathbf{W}(\mathbf{x}^k)]^{\mathrm{T}}\mathbf{f}(\mathbf{x}^k)\right]^{\mathrm{T}}\left[[\mathbf{W}(\mathbf{x}^k)]^{\mathrm{T}}\mathbf{f}(\mathbf{x}^k)\right][\mathbf{W}(\mathbf{x}^k)]^{\mathrm{T}}\mathbf{f}(\mathbf{x}^k)}{\left[\mathbf{W}(\mathbf{x}^k)[\mathbf{W}(\mathbf{x}^k)]^{\mathrm{T}}\mathbf{f}(\mathbf{x}^k)\right]^{\mathrm{T}}\left[\mathbf{W}(\mathbf{x}^k)[\mathbf{W}(\mathbf{x}^k)]^{\mathrm{T}}\mathbf{f}(\mathbf{x}^k)\right]}$$

Observe que para otimizar o tempo de computo é conveniente para cada passo fazer os cálculos na seguinte ordem:

1- Calcule $\mathbf{f}(\mathbf{x}^k)$, $\mathbf{W}(\mathbf{x}^k)$ ou $[\mathbf{W}(\mathbf{x}^k)]^{\mathrm{T}}$

2- Calcule $[\mathbf{W}(\mathbf{x}^k)]^{\mathrm{T}}\mathbf{f}(\mathbf{x}^k)$ e termine as outras operações

2.1.3- Exemplo 2 pag. 462 do Demidovich

Use o Método da Iteração e do Gradiente para encontrar a solução aproximada positiva do sistema de equações:

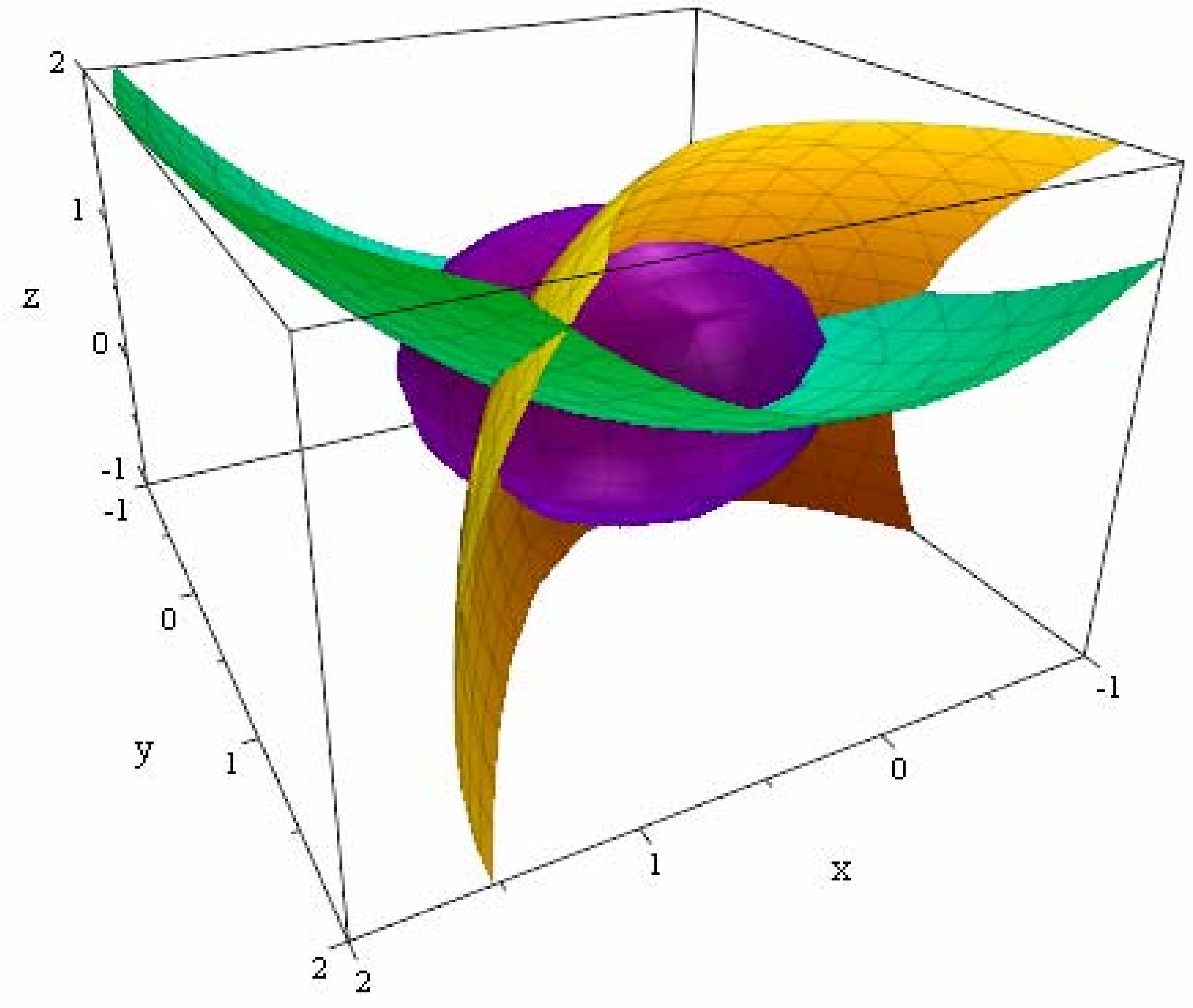
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ 2x^2 + y^2 - 4z = 0 \\ 3x^2 - 4y + z^2 = 0 \end{cases}$$

começando com a aproximação inicial $x_0 = y_0 = z_0 = 0.5.$

Visualização gráfica do problema na próxima tela.

2.1.3- Exemplo 2 pag. 462 do Demidovich

Visualização gráfica do problema



Frase do Dia

"... the progress of physics will to a large extent depend on the progress of nonlinear mathematics, of method to solve nonlinear equations ... and therefore we can learn by comparing different nonlinear problems."

Werner Heisenberg