3- Autovalores e Autovetores.

3.1- Autovetores e Autovalores de uma Matriz.

3.2- Métodos para encontrar os Autovalores e Autovetores de uma Matriz.

3.1- Autovetores e Autovalores de uma Matriz

Dada a matriz $\mathbf{A}_{n\times n}$ considere a transformação linear: $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$

onde $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ são vetores de um espaço *n*-dimensional.

Definição: Um vetor $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ é dito ser autovetor da matriz $\mathbf{A}_{n\times n}$ se a transformação linear deste vetor é colinear a este vetor. Ou seja, se $\mathbf{A}_{n\times n}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. O escalar λ é chamado de autovalor da matriz $\mathbf{A}_{n\times n}$ correspondente ao autovetor $\mathbf{x}$.

Teorema: Toda transformação linear (matriz) em um espaço vetorial complexo tem, pelo menos, um autovetor (real ou complexo).

Note que $(\mathbf{A}_{n\times n} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ esta equação tem solução diferentes da nula ($\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$) se e somente se, seu determinante é zero

$\det(\mathbf{A}_{n\times n} - \lambda\mathbf{E}) = \mathbf{0}$ (1). Esta equação é chamada equação característica e o polinômio em λ definido por ela se chama polinômio característico. As raízes deste polinômio são os

3.1- Autovetores e Autovalores de uma Matriz

autovalores da matriz $\mathbf{A}_{n\times n}$ e o conjunto de autovalores se chama espectro da matriz. As soluções não nulas de (1) para cada autovalor λ_i são os autovetores que correspondem a este autovalor $(\mathbf{A}_{n\times n} - \lambda_i \mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Pode ser provado que o número linearmente independente de autovetores correspondentes a um autovalor não pode ser maior que a multiplicidade deste autovalor (raiz do polinômio característico). Consequentemente, se todos os autovalores são distintos (não tem multiplicidade), então a cada autovalor corresponde apenas um único autovetor, sendo as outras possíveis soluções de $(\mathbf{A}_{n\times n} - \lambda_i \mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ linearmente dependente deste único autovetor.

Teorema: Os autovetores de uma matriz correspondentes a dois autovalores distintos são linearmente independente.

3.1- Autovetores e Autovalores de uma Matriz

Corolário: Se todos os autovalores de uma matriz de ordem *n* são diferentes, então os correspondentes autovetores desta matriz formam uma base no espaço *n*-dimensional.

Exemplo: Encontre os autovalores e autovetores da matriz

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ Primeiro devemos encontrar os autovalores solução do polinômio característico: $\det(\mathbf{A}_{n\times n} - \lambda \mathbf{E}) = \mathbf{0}$

$$\det\begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow (2-\lambda)^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1 \text{ e } \lambda_2 = 3$$

Dados os autovalores, os autovetores devem ser encontrados subtituindo cada autovalor na equação: $(\mathbf{A}_{n\times n} - \lambda_i \mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0}$

Para $\lambda_1 = 1$ segue $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 = 0$ ou $x_2 = -x_1$ onde

$x_1 = c \neq 0$ é uma constante arbitrária. O autovetor $\mathbf{x}^1$ correspondente a λ_1

3.1- Autovetores e Autovalores de uma Matriz

é $\mathbf{x}^1 = \begin{bmatrix} c \\ -c \end{bmatrix} = c\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ se $c = 1.$

Para $\lambda_2 = 3$ segue $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow x_1 - x_2 = 0$ ou $x_2 = x_1$ onde

$x_1 = c \neq 0$ é uma constante arbitrária. O autovetor $\mathbf{x}^2$ correspondente a λ_2

é $\mathbf{x}^2 = \begin{bmatrix} c \\ c \end{bmatrix} = c\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ se $c = 1.$

Note que $\mathbf{x}^1$ e $\mathbf{x}^2$ são linearmente independente e formam uma base no espaço vetorial bidimensional.

Duas matrizes são dita ser similares se elas pode ser obtidas a partir da outra, através de uma transformação efetuada por alguma matriz não singular.

$$\mathbf{A} = \mathbf{SBS}^{-1} \Leftrightarrow \mathbf{B} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{AS}, \quad \text{onde } \det(\mathbf{S}) \neq 0$$

3.1- Autovetores e Autovalores de uma Matriz

Teorema: Matrizes similares possuem o mesmo polinômio característico.

Corolário: Matrizes similares possuem os mesmos autovalores incluindo a multiplicidade deles.

Corolário: Um vetor é autovetor de uma transformação linear independentemente da escolha da base.

Teorema: Se uma matriz quadrada de ordem *n* $\mathbf{A}_{n\times n}$ tem *n* autovetores linearmente independente, então escolhendo estes autovetores como base obtemos uma matriz diagonal similar à matriz $\mathbf{A}_{n\times n}$.

Corolário: Toda matriz quadrada com autovalores distintos pode ser reduzida a uma matriz diagonal através da transformação de similaridade.

$$\mathbf{\Lambda}_{3\times 3} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

3.1- Autovetores e Autovalores de uma Matriz

Exemplo: Reduza a matriz $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$ a sua forma diagonal.

Já conhecemos os autovalores e autovetores desta matriz.

$$\lambda_1=1 \rightarrow \mathbf{x}^1=\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}\rightarrow \mathbf{A}\mathbf{x}^1=\lambda_1\mathbf{x}^1$$

$$\lambda_2=3 \rightarrow \mathbf{x}^2=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}\rightarrow \mathbf{A}\mathbf{x}^2=\lambda_2\mathbf{x}^2$$

$$\mathbf{\Lambda}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix} \text{ é similar a } \mathbf{A}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$$

As matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{\Lambda}$ são similares se existe uma matriz $\mathbf{S}$ tal que

$$\mathbf{A}=\mathbf{S}\mathbf{\Lambda}\mathbf{S}^{-1} \Leftrightarrow \mathbf{\Lambda}=\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}, \quad \text{onde } \det(\mathbf{S})\neq 0.$$

Construa $\mathbf{S}$ com os autovetores de $\mathbf{A}$, $\mathbf{S}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\Rightarrow \det\mathbf{S}=2$

$$\text{e } \mathbf{S}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\Rightarrow \mathbf{A}\mathbf{S}=\begin{bmatrix}1 & 3\\ -1 & 3\end{bmatrix}\Rightarrow \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}=\mathbf{\Lambda}.$$

3.1- Autovetores e Autovalores de uma Matriz

Chamamos forma bi-linear da matriz real quadrada $\mathbf{A}_{n\times n}$ ao produto escalar:

$$\left(\mathbf{A}_{n\times n}\mathbf{x},\mathbf{y}\right)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{jk}x_k y_j^*=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{kj}x_j y_k^*,\ \ \mathbf{x},\mathbf{y}\in\begin{cases}\text{ao espaço complexo}\\ n\ \text{dimensional}\end{cases}$$

Corolário: Se $\mathbf{A}_{n\times n}$ é real e simétrica ($\mathbf{A}=\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$), então

$$\left(\mathbf{A}_{n\times n}\mathbf{x},\mathbf{y}\right)=\left(\mathbf{x},\mathbf{A}_{n\times n}\mathbf{y}\right).$$

Teorema: Todos os autovalores de uma matriz real simétrica são reais.

Ou seja, as raízes da equação característica de uma matriz real simétrica são todas reais.

Teorema: Os autovetores correspondentes a distintos autovalores de uma matriz real simétrica são ortogonais entre si mesmos. $\left(\mathbf{x}^i,\mathbf{x}^j\right)=0,\ \text{onde}\ \lambda_i\to\mathbf{x}^i,\ \lambda_j\to\mathbf{x}^j\ \text{e}\ \lambda_i\neq\lambda_j$

3.1- Autovetores e Autovalores de uma Matriz

Os autovetores de uma matriz real simétrica podem ser assumidos reais.

Teorema: Toda matriz real simétrica pode ser reduzida a sua forma diagonal através de transformações de similaridade.

Corolário: Para toda transformação linear definida por uma matriz real simétrica existe uma base ortogonal na qual a matriz de transformação é diagonal.

Note que a base ortogonal é formada pelos auovetores da matriz e que todos são reais.

Corolário: Se a matriz é simétrica, então a todo autovalor está associado um número de autovetores linearmente independente igual à multiplicidade deste autovalor.

3.1- Autovetores e Autovalores de uma Matriz

Teorema (propriedade extremal dos autovalores): Seja $\mathbf{A}_{n\times n}$ uma matriz real simétrica e todos seus autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$. Seja $\lambda_m = \min(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ e $\lambda_M = \max(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$, então para todo vetor $\mathbf{x}$ se verifica: $\lambda_m (\mathbf{x}, \mathbf{x}) \leq (\mathbf{A}_{n\times n}\mathbf{x}, \mathbf{x}) \leq \lambda_M (\mathbf{x}, \mathbf{x})$.

Corolário: O menor e o maior autovalor de uma matriz real simétrica $\mathbf{A}_{n\times n}$, são respectivamente o menor e maior valor da forma quadrática $u = (\mathbf{A}_{n\times n}\mathbf{x}, \mathbf{x})$ na esfera unitária $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 1$.

Uma matriz real simétrica é chamada positiva definida se sua correspondente forma quadrática é positiva definida. Isto é,

$$\text{se } \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}, \quad u = (\mathbf{A}_{n\times n}\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j^* > 0.$$

Teorema: Uma matriz real simétrica é definida positiva se e somente se todos seus autovalores são positivos.

3.1- Autovetores e Autovalores de uma Matriz

Para uma matriz real quadrada de ordem *n* os coeficientes do polinômio característico são reais. Em geral, as raízes $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ (autovalores) deste polinômio são conjugados em pares, se eles são complexos. Ou seja, dado um autovalor seu conjugado é também autovalor da matriz com a mesma multiplicidade.

Pode ser que uma matriz real quadrada não tenha nenhum autovalor real. Entretanto, se todos os elementos da matriz são positivos $a_{ij} > 0$, então existe pelo menos um autovalor real (o maior numericamente) e o autovetor associado a ele é formado por coordenadas positivas.

A seguir, métodos para encontrar autovalores e autovetores!

3.2- Métodos para encontrar os Autovalores e Autovetores de uma Matriz

Dividimos o problema em duas partes:

1- Encontrar os autovalores de uma matriz $\mathbf{A}_{n\times n}$ consiste em determinar as raízes do polinômio característico:

$$\det(\mathbf{A}_{n\times n} - \lambda\mathbf{E}) = 0.$$

2- Encontrar os autovetores associados a cada autovalor consiste em determinar os vetores $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ que são solução do sistema linear homogêneo:

$$(\mathbf{A}_{n\times n} - \lambda_i\mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Abordaremos duas técnicas para resolver a primeira parte:

1.1- expandir o determinante $P_n(\lambda) = \det(\mathbf{A}_{n\times n} - \lambda\mathbf{E}) = 0$ em polinômios de grau *n* e encontramos suas raízes usando algum método aproximado,

3.2- Métodos para encontrar os Autovalores e Autovetores de uma Matriz

1.2- aproximar as raízes da equação característica pelo Método da Iteração sem expandir o determinante.

Técnica 1.1- Expansão do determinante em polinômios

$$P_n(\lambda) = \det(\mathbf{A}_{n\times n} - \lambda \mathbf{E}) = \begin{vmatrix} (a_{11}-\lambda) & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & (a_{22}-\lambda) & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & (a_{nn}-\lambda) \end{vmatrix} = 0$$

$$P_n(\lambda) = (-1)^n \left[\lambda^n - \sigma_1 \lambda^{n-1} + \sigma_2 \lambda^{n-2} - \sigma_3 \lambda^{n-3} + \cdots + (-1)^n \sigma_n \lambda^{n-n} \right] = 0$$

Determinar os coeficientes σ_i é equivalente a calcular determinantes de varias ordens, que é uma tarefa trabalhosa quando *n* é grande. Existem métodos (Danilevsky, Krylov, Leverrier, etc) que contornam o calculo destes determinantes. O método de Danilevsky exige menos operações aritméticas.

3.2- Métodos para encontrar os Autovalores e Autovetores de uma Matriz

Técnica 1.2- Encontrar aproximadamente o maior autovalor em valor absoluto e seu autovetor sem expandir o determinante

Caso 1. Entre todos os autovalores existe apenas um (**sem multiplicidade**) com maior valor absoluto. Suponha que é o primeiro: $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$. Lembre que para uma matriz real com todos os elementos positivos seu maior autovalor é real.

Seja $\mathbf{y}$ um vetor arbitrário representado como combinação linear da base formada pelos autovetores da matriz $\mathbf{A}_{n\times n}$:

$$\mathbf{y} = \sum_{j=1}^{n} c_j \mathbf{x}^j, \text{ onde } \mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \cdots, \mathbf{x}^n \text{ são autovetores de } \mathbf{A}_{n\times n}$$

e c_j são coeficientes constantes.

3.2- Métodos para encontrar os Autovalores e Autovetores de uma Matriz

Já que $(\mathbf{A}_{n\times n} - \lambda_j \mathbf{E})\mathbf{x}^j = \mathbf{0}$ segue $\mathbf{A}_{n\times n}\mathbf{y} = \sum_{j=1}^{n} c_j \mathbf{A}\mathbf{x}^j = \sum_{j=1}^{n} c_j \lambda_j \mathbf{x}^j.$

Chamamos $\mathbf{Ay}$ de uma iteração do vetor $\mathbf{y}$ e formamos uma sucessão de iterações $\mathbf{Ay}, \mathbf{AAy} = \mathbf{A}^2\mathbf{y}, \mathbf{A}^3\mathbf{y}, \cdots, \mathbf{A}^m\mathbf{y}$, onde

$$\mathbf{y}^m = \mathbf{A}^m\mathbf{y} = \sum_{j=1}^{n} c_j \lambda_j^m \mathbf{x}^j.$$

Escolha uma base $\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \cdots, \mathbf{e}^n$ (não necessariamente unitária) e descomponha os autovetores de $\mathbf{A}$ e o vetor $\mathbf{y}$ nesta base:

$$\mathbf{x}^j = \sum_{i=1}^{n} x_{ij}\mathbf{e}^i \quad \text{e} \quad \mathbf{y}^m = \sum_{i=1}^{n} y_i^m \mathbf{e}^i \quad \text{logo,}$$

$$\mathbf{y}^m = \sum_{j=1}^{n} c_j \lambda_j^m \underbrace{\sum_{i=1}^{n} x_{ij}\mathbf{e}^i}_{\mathbf{x}^j} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{e}^i \sum_{j=1}^{n} c_j x_{ij} \lambda_j^m \quad \text{e} \quad y_i^m = \sum_{j=1}^{n} c_j x_{ij} \lambda_j^m$$

similarmente temos $y_i^{m+1} = \sum_{j=1}^{n} c_j x_{ij} \lambda_j^{m+1}$ e construimos $\dfrac{y_i^{m+1}}{y_i^m}.$

3.2- Métodos para encontrar os Autovalores e Autovetores de uma Matriz

$$\frac{y_i^{m+1}}{y_i^m} = \frac{\sum_{j=1}^{n} c_j x_{ij} \lambda_j^{m+1}}{\sum_{j=1}^{n} c_j x_{ij} \lambda_j^{m}} = \frac{c_1 x_{i1} \lambda_1^{m+1} + \cdots + c_n x_{in} \lambda_n^{m+1}}{c_1 x_{i1} \lambda_1^{m} + \cdots + c_n x_{in} \lambda_n^{m}}$$

$$\frac{y_i^{m+1}}{y_i^m} = \underbrace{\frac{\lambda_1^{m+1}}{\lambda_1^{m}}}_{=\lambda_1} \frac{c_1 x_{i1} + c_2 x_{i2} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{m+1} + \cdots + c_n x_{in} \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^{m+1}}{c_1 x_{i1} + c_2 x_{i2} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{m} \cdots + c_n x_{in} \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^{m}}$$

Se $c_1 \neq 0$ e $x_{i1} \neq 0$ podemos transformar a expressão anterior na forma:

$$\frac{y_i^{m+1}}{y_i^m} = \lambda_1 \frac{1 + \frac{c_2 x_{i2}}{c_1 x_{i1}} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{m+1} + \cdots + \frac{c_n x_{in}}{c_1 x_{i1}} \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^{m+1}}{1 + \frac{c_2 x_{i2}}{c_1 x_{i1}} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{m} \cdots + \frac{c_n x_{in}}{c_1 x_{i1}} \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^{m}}$$

3.2- Métodos para encontrar os Autovalores e Autovetores de uma Matriz

Note que para garantir que $c_1 \neq 0$ e $x_{i1} \neq 0$ é suficiente fazer uma escolha apropriada do vetor $\mathbf{y}$ e da base $\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \cdots, \mathbf{e}^n$. Note que $\left|\dfrac{\lambda_j}{\lambda_1}\right| < 1 \ \forall j > 1$ já que λ_1 e o maior autovalor de $\mathbf{A}$. Logo $\lim\limits_{m\to\infty}\left(\dfrac{\lambda_j}{\lambda_1}\right)^m = 0.$

Consequentemente, se passamos ao limite no processo iterativo obtemos:

$$\lim_{m\to\infty}\frac{y_i^{m+1}}{y_i^m} = \lim_{m\to\infty}\left[\lambda_1 \frac{1+\dfrac{c_2x_{i2}}{c_1x_{i1}}\left(\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{m+1}+\cdots+\dfrac{c_nx_{in}}{c_1x_{i1}}\left(\dfrac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^{m+1}}{1+\dfrac{c_2x_{i2}}{c_1x_{i1}}\left(\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{m}\cdots+\dfrac{c_nx_{in}}{c_1x_{i1}}\left(\dfrac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^{m}}\right] = \lambda_1\,,$$

$$\lambda_1 = \frac{y_i^{m+1}}{y_i^m} + O\left(\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^m\right) \text{ ou } \lambda_1 \approx \frac{y_i^{m+1}}{y_i^m} \quad (i = 1, 2, \cdots, n). \qquad (2)$$

3.2- Métodos para encontrar os Autovalores e Autovetores de uma Matriz

Se o número de iterações *m* é suficientemente grande, o processo iterativo (2) proporciona o autovalor de maior valor absoluto da matriz $\mathbf{A}$, com a precisão desejada. Para fazer isto devemos escolher o vetor inicial $\mathbf{y}$.

Nos casos que a escolha de $\mathbf{y}$ não é adequada o processo iterativo (2) pode não convergir. Esta não convergência pode ser observada quando os valores do cociente oscilam. Neste caso devemos fazer uma nova escolha do vetor inicial $\mathbf{y}$.

Note que o autovetor $\mathbf{x}^1$ associado ao autovalor λ_1 é aproximadamente $\mathbf{x}^1 \approx \mathbf{y}^m = \mathbf{A}^m\mathbf{y}$, já que

$$\mathbf{A}^m\mathbf{y} = \sum_{j=1}^{n} c_j \lambda_j^m \mathbf{x}^j = c_1\lambda_1^m \mathbf{x}^1 + \sum_{j=2}^{n} c_j \lambda_j^m \mathbf{x}^j = c_1\lambda_1^m \left[\mathbf{x}^1 + \sum_{j=2}^{n} \frac{c_j}{c_1} \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1} \right)^m \mathbf{x}^j \right]$$

3.2- Métodos para encontrar os Autovalores e Autovetores de uma Matriz

Como $\lim_{m\to\infty}\left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right)^m = 0 \ \ \forall j > 1$, consequentemente $\mathbf{A}^m\mathbf{y} \approx c_1\lambda_1^m\mathbf{x}^1$.

Ou seja, para uma iteração *m* suficientemente grande $\mathbf{A}^m\mathbf{y}$ se diferencia do autovetor $\mathbf{x}^1$ apenas por um fator (são paralelos).

Lembrando o **Corolário:** Um vetor é autovetor de uma transformação linear independentemente da escolha da base.

Exemplo: Encontre o maior autovalor e seu autovetor da matriz?

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Feito com Excel

Frase do Dia

"Since a general solution must be judged impossible from want of analysis, we must be content with the knowledge of some special cases, and that all the more, since the development of various cases seems to be the only way to bringing us at last to a more perfect knowledge."

Leonhard Euler