# 3- Autovalores e Autovetores.

## 3.1- Autovetores e Autovalores de uma Matriz.

## 3.2- Métodos para encontrar os Autovalores e Autovetores de uma Matriz.

**Continuação da Técnica 1.2- Encontrar aproximadamente o maior autovalor em valor absoluto e seu autovetor sem expandir o determinante.**

# 3.2- Métodos para encontrar os Autovalores e Autovetores de uma Matriz

**Técnica 1.2- Encontrar aproximadamente o maior autovalor em valor absoluto e seu autovetor sem expandir o determinante**

**Caso 1.** Entre todos os autovalores existe apenas um (**sem multiplicidade**) com maior valor absoluto (Aula anterior).

**Caso 2.** O autovalor com maior valor absoluto de $\mathbf{A}_{n\times n}$ tem multiplicidade *s*. $|\lambda_1| = |\lambda_2| = |\lambda_3| = \cdots = |\lambda_s| > |\lambda_{s+1}| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$

De forma similar ao Caso 1, construímos a sucessão de iterações $\mathbf{Ay}, \mathbf{A}^2\mathbf{y}, \cdots, \mathbf{y}^m = \mathbf{A}^m\mathbf{y} = \sum_{j=1}^{n} c_j \lambda_j^m \mathbf{x}^j$ e o cociente $\dfrac{y_i^{m+1}}{y_i^m}$.

$$\frac{y_i^{m+1}}{y_i^m} = \frac{\sum_{j=1}^{n} c_j x_{ij} \lambda_j^{m+1}}{\sum_{j=1}^{n} c_j x_{ij} \lambda_j^{m}} = \frac{c_1 x_{i1} \lambda_1^{m+1} + \cdots + c_n x_{in} \lambda_n^{m+1}}{c_1 x_{i1} \lambda_1^{m} + \cdots + c_n x_{in} \lambda_n^{m}} = \text{ continua}$$

# 3.2- Métodos para encontrar os Autovalores e Autovetores de uma Matriz

$$\frac{y_i^{m+1}}{y_i^m} = \frac{c_1 x_{i1}\lambda_1^{m+1} + \cdots + c_s x_{is}\lambda_1^{m+1} + c_{s+1}x_{is+1n}\lambda_{s+1}^{m+1} + \cdots + c_n x_{in}\lambda_n^{m+1}}{c_1 x_{i1}\lambda_1^{m} + \cdots + c_s x_{is}\lambda_1^{m} + c_{s+1}x_{is+1n}\lambda_{s+1}^{m} + \cdots + c_n x_{in}\lambda_n^{m}}$$

$$\frac{y_i^{m+1}}{y_i^m} = \underbrace{\frac{\lambda_1^{m+1}}{\lambda_1^m}}_{=\lambda_1} \frac{c_1 x_{i1} + \cdots + c_s x_{is} + c_{s+1}x_{is+1}\left(\frac{\lambda_{s+1}}{\lambda_1}\right)^{m+1} + \cdots + c_n x_{in}\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^{m+1}}{c_1 x_{i1} + \cdots + c_s x_{is} + c_{s+1}x_{is+1}\left(\frac{\lambda_{s+1}}{\lambda_1}\right)^{m} \cdots + c_n x_{in}\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^{m}}$$

Se $c_1 x_{i1} + \cdots + c_s x_{is} \neq 0$ podemos transformar a expressão anterior na forma:

$$\frac{y_i^{m+1}}{y_i^m} = \lambda_1 \frac{1 + \frac{c_{s+1}x_{is+1}}{c_1 x_{i1} + \cdots + c_s x_{is}}\left(\frac{\lambda_{s+1}}{\lambda_1}\right)^{m+1} + \cdots + \frac{c_n x_{in}}{c_1 x_{i1} + \cdots + c_s x_{is}}\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^{m+1}}{1 + \frac{c_{s+1}x_{is+1}}{c_1 x_{i1} + \cdots + c_s x_{is}}\left(\frac{\lambda_{s+1}}{\lambda_1}\right)^{m} \cdots + \frac{c_n x_{in}}{c_1 x_{i1} + \cdots + c_s x_{is}}\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^{m}}$$

# 3.2- Métodos para encontrar os Autovalores e Autovetores de uma Matriz

Lembrando que $\lim_{m\to\infty}\left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right)^m = 0$ porque

$\left|\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right| < 1 \ \forall j > s$ já que $\lambda_1$ e o maior autovalor de **A**.

Consequentemente, se passamos ao limite no processo iterativo obtemos:

$$\lim_{m\to\infty}\frac{y_i^{m+1}}{y_i^m} = \lim_{m\to\infty}\left[\lambda_1\,\frac{1+\dfrac{c_{s+1}x_{is+1}}{c_1x_{i1}+\cdots+c_sx_{is}}\left(\dfrac{\lambda_{s+1}}{\lambda_1}\right)^{m+1}+\cdots+\dfrac{c_nx_{in}}{c_1x_{i1}+\cdots+c_sx_{is}}\left(\dfrac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^{m+1}}{1+\dfrac{c_{s+1}x_{is+1}}{c_1x_{i1}+\cdots+c_sx_{is}}\left(\dfrac{\lambda_{s+1}}{\lambda_1}\right)^{m}\cdots+\dfrac{c_nx_{in}}{c_1x_{i1}+\cdots+c_sx_{is}}\left(\dfrac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^{m}}\right] = \lambda_1,$$

$$\lambda_1 = \frac{y_i^{m+1}}{y_i^m} + O\left(\left(\frac{\lambda_{s+1}}{\lambda_1}\right)^m\right) \text{ ou } \lambda_1 \approx \frac{y_i^{m+1}}{y_i^m} \quad (i = 1, 2, \cdots, n). \qquad (2)$$

# 3.2- Métodos para encontrar os Autovalores e Autovetores de uma Matriz

Se o número de iterações *m* é suficientemente grande, o processo iterativo (2) proporciona o autovalor de maior valor absoluto da matriz $\mathbf{A}$, com a precisão desejada. Para fazer isto devemos escolher o vetor inicial $\mathbf{y}$.

Nos casos que a escolha de $\mathbf{y}$ não é adequada o processo iterativo (2) pode não convergir. Esta não convergência pode ser observada quando os valores do cociente oscilam. Neste caso devemos fazer uma nova escolha do vetor inicial $\mathbf{y}$.

Note que a este autovalor $\lambda_1$ com multiplicidade *s* estão associados *s* autovetores linearmente independentes. Um destes autovetores pode ser aproximado por $\mathbf{x}^1 \approx \mathbf{y}^m = \mathbf{A}^m \mathbf{y}$. Em geral, se mudamos o vetor inicial $\mathbf{y}$ podemos obter diferentes vetores linearmente independentes associados ao autovalor $\lambda_1$. Entretanto, esta técnica não garante que devemos encontrar o conjunto de todos os *s* autovetores asscociados ao autovalor $\lambda_1$.

# 3.2- Métodos para encontrar os Autovalores e Autovetores de uma Matriz

$$\mathbf{A}^m\mathbf{y} = \sum_{j=1}^{n} c_j \lambda_j^m \mathbf{x}^j = \sum_{j=1}^{s} c_j \lambda_1^m \mathbf{x}^j + \sum_{j=s+1}^{n} c_j \lambda_j^m \mathbf{x}^j$$

$$\mathbf{A}^m\mathbf{y} = c_1\lambda_1^m\mathbf{x}^1 + c_2\lambda_1^m\mathbf{x}^2 + \cdots + c_s\lambda_1^m\mathbf{x}^s + \sum_{j=s+1}^{n} c_j \lambda_j^m \mathbf{x}^j$$

$$\mathbf{A}^m\mathbf{y} = c_1\lambda_1^m\left[\mathbf{x}^1 + \frac{c_2}{c_1}\mathbf{x}^2 + \cdots + \frac{c_s}{c_1}\mathbf{x}^s + \sum_{j=s+1}^{n}\frac{c_j}{c_1}\left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right)^m \mathbf{x}^j\right]$$

Como $\lim_{m\to\infty}\left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right)^m = 0 \;\; \forall j > 1 \Rightarrow \lim_{m\to\infty}\mathbf{A}^m\mathbf{y} = c_1\lambda_1^m\left[\mathbf{x}^1 + \frac{c_2}{c_1}\mathbf{x}^2 + \cdots + \frac{c_s}{c_1}\mathbf{x}^s\right]$

ou $\mathbf{A}^m\mathbf{y} \approx c_1\lambda_1^m\left[\mathbf{x}^1 + \frac{c_2}{c_1}\mathbf{x}^2 + \cdots + \frac{c_s}{c_1}\mathbf{x}^s\right]$

Ou seja, para uma iteração *m* suficientemente grande $\mathbf{A}^m\mathbf{y}$ pode aproximar um dos autovetores $\left(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \cdots, \mathbf{x}^s\right)$.

# 3.2- Métodos para encontrar os Autovalores e Autovetores de uma Matriz

**Técnica 1.2- Encontrar aproximadamente o segundo maior autovalor em valor absoluto e seu autovetor sem expandir o determinante**

**Caso 3.** Os dois autovalores com maior valor absoluto não tem multiplicidade. $|\lambda_1| > |\lambda_2| > |\lambda_3| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$

**Caso 4.** O segundo maior autovalor tem multiplicidade. O método que será estudado a seguir para o caso 3 pode ser estendido para o caso 4. $|\lambda_1| > |\lambda_2| = |\lambda_3| = \cdots = |\lambda_s| > |\lambda_{s+1}| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$

Suponha o **caso 3**, ou seja, os dois maiores autovalores da matriz $\mathbf{A}$ são diferentes. Usaremos um método semelhante ao usado no **caso 1**. Construímos uma seqüência de iterações tais que:

$$\mathbf{y}^m = \mathbf{A}^m \mathbf{y} = \sum_{j=1}^{n} c_j \lambda_j^m \mathbf{x}^j = c_1 \lambda_1^m \mathbf{x}^1 + c_2 \lambda_2^m \mathbf{x}^2 + \cdots + c_n \lambda_n^m \mathbf{x}^n \qquad (3)$$

# 3.2- Métodos para encontrar os Autovalores e Autovetores de uma Matriz

e $\mathbf{y}^{m+1} = \mathbf{A}^{m+1}\mathbf{y} = \sum_{j=1}^{n} c_j \lambda_j^{m+1} \mathbf{x}^j = c_1\lambda_1^{m+1}\mathbf{x}^1 + c_2\lambda_2^{m+1}\mathbf{x}^2 + \cdots + c_n\lambda_n^{m+1}\mathbf{x}^n.$ (4)

Eliminando destas duas equações o termo que possui $\lambda_1$ segue:

$$(4) - \lambda_1 (3) \Rightarrow \mathbf{A}^{m+1}\mathbf{y} - \lambda_1 \mathbf{A}^m\mathbf{y} = c_2\lambda_2^m(\lambda_2 - \lambda_1)\mathbf{x}^2 + \cdots + c_n\lambda_n^m(\lambda_n - \lambda_1)\mathbf{x}^n$$

Similarmente temos

$$\mathbf{y}^m - \lambda_1 \mathbf{y}^{m-1} = \mathbf{A}^m\mathbf{y} - \lambda_1 \mathbf{A}^{m-1}\mathbf{y} = c_2\lambda_2^{m-1}(\lambda_2 - \lambda_1)\mathbf{x}^2 + \cdots + c_n\lambda_n^{m-1}(\lambda_n - \lambda_1)\mathbf{x}^n$$

Construindo o cociente para cada componente do vetor $\mathbf{y}^m$

$$\frac{y_i^{m+1} - \lambda_1 y_i^m}{y_i^m - \lambda_1 y_i^{m-1}} = \frac{c_2\lambda_2^m(\lambda_2 - \lambda_1)(\mathbf{x}^2)_i + \cdots + c_n\lambda_n^m(\lambda_n - \lambda_1)(\mathbf{x}^n)_i}{c_2\lambda_2^{m-1}(\lambda_2 - \lambda_1)(\mathbf{x}^2)_i + \cdots + c_n\lambda_n^{m-1}(\lambda_n - \lambda_1)(\mathbf{x}^n)_i}$$

Se $c_2 \neq 0$, $(\lambda_2 - \lambda_1) \neq 0$ e as componentes do autovetor 2 $(\mathbf{x}^2)_i \neq 0$ lembrando que $\lim_{m\to\infty}\left(\frac{\lambda_j}{\lambda_2}\right)^m = 0 \quad \forall j > 2$ obtemos:

# 3.2- Métodos para encontrar os Autovalores e Autovetores de uma Matriz

$$\frac{y_i^{m+1}-\lambda_1 y_i^m}{y_i^m-\lambda_1 y_i^{m-1}}=\lambda_2\,\frac{1+\dfrac{c_3(\lambda_3-\lambda_1)(\mathbf{x}^3)_i}{c_2(\lambda_2-\lambda_1)(\mathbf{x}^2)_i}\left(\dfrac{\lambda_3}{\lambda_2}\right)^m+\cdots+\dfrac{c_n(\lambda_n-\lambda_1)(\mathbf{x}^n)_i}{c_2(\lambda_2-\lambda_1)(\mathbf{x}^2)_i}\left(\dfrac{\lambda_n}{\lambda_2}\right)^m}{1+\dfrac{c_3(\lambda_3-\lambda_1)(\mathbf{x}^3)_i}{c_2(\lambda_2-\lambda_1)(\mathbf{x}^2)_i}\left(\dfrac{\lambda_3}{\lambda_2}\right)^{m-1}+\cdots+\dfrac{c_n(\lambda_n-\lambda_1)(\mathbf{x}^n)_i}{c_2(\lambda_2-\lambda_1)(\mathbf{x}^2)_i}\left(\dfrac{\lambda_n}{\lambda_2}\right)^{m-1}}\approx\lambda_2 \quad (5)$$

Com (5) podemos encontrar aproximadamente o segundo maior autovalor da matriz $\mathbf{A}$ (aproximação grosseira do autovalor).

Na pratica, se deve escolher o número de iterações para encontrar o segundo autovalor inferior ao número de iterações usadas para determinar o primeiro autovalor (ao fazer a diferença entre números muito próximos podemos perder precisão).

Em geral, se em valor absoluto todos os autovalores da matriz são diferentes podemos usar um algoritmo similar a (5) para encontrar todos os autovalores.

# 3.2- Métodos para encontrar os Autovalores e Autovetores de uma Matriz

O autovetor $\mathbf{x}^2$ correspondente ao autovalor $\lambda_2$ pode ser aproximado como

$$\mathbf{x}^2 \approx \mathbf{y}^{m+1} - \lambda_1 \mathbf{y}^m = c_2 \lambda_2^m (\lambda_2 - \lambda_1) \left[ \mathbf{x}^2 + \cdots + \frac{c_n(\lambda_n - \lambda_1)}{c_2(\lambda_2 - \lambda_1)} \left( \frac{\lambda_n}{\lambda_2} \right)^m \mathbf{x}^n \right]$$

$$\lambda_3 \approx \frac{\left(y_i^{m+1} - \lambda_1 y_i^m\right) - \lambda_2 \left(y_i^m - \lambda_1 y_i^{m-1}\right)}{\left(y_i^m - \lambda_1 y_i^{m-1}\right) - \lambda_2 \left(y_i^{m-1} - \lambda_1 y_i^{m-2}\right)}$$ e assim sucessivamente!

Entretanto os resultados deste método podem ser bastante imprecisos. Existem outros métodos mais precisos para determinar autovalores sem que seja necessário expandir o determinante. Entre eles mencionamos o Método da Exaustão, ver no Livro de Texto Demidovich.

# 3.2- Métodos para encontrar os Autovalores e Autovetores de uma Matriz

Note que $\lambda_1 = \tilde{\lambda}_1 + \Delta\lambda_1$ e consequentemente $\dfrac{y_i^{m+1} - \tilde{\lambda}_1 y_i^m}{y_i^m - \tilde{\lambda}_1 y_i^{m-1}} =$

$$\frac{c_1\lambda_1^m \underbrace{(\lambda_1 - \tilde{\lambda}_1)}_{\Delta\lambda \neq 0}(\mathbf{x}^1)_i + c_2\lambda_2^m(\lambda_2 - \tilde{\lambda}_1)(\mathbf{x}^2)_i + \cdots + c_n\lambda_n^m(\lambda_n - \tilde{\lambda}_1)(\mathbf{x}^n)_i}{c_1\lambda_1^{m-1}(\lambda_1 - \tilde{\lambda}_1)(\mathbf{x}^1)_i + c_2\lambda_2^{m-1}(\lambda_2 - \tilde{\lambda}_1)(\mathbf{x}^2)_i + \cdots + c_n\lambda_n^{m-1}(\lambda_n - \tilde{\lambda}_1)(\mathbf{x}^n)_i} =$$

$$\lambda_1 \frac{1 + \dfrac{c_2(\lambda_2 - \tilde{\lambda}_1)(\mathbf{x}^2)_i}{c_1(\lambda_1 - \tilde{\lambda}_1)(\mathbf{x}^1)_i}\left(\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^m + \cdots + \dfrac{c_n(\lambda_n - \tilde{\lambda}_1)(\mathbf{x}^n)_i}{c_1(\lambda_1 - \tilde{\lambda}_1)(\mathbf{x}^1)_i}\left(\dfrac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^m}{1 + \dfrac{c_2(\lambda_2 - \tilde{\lambda}_1)(\mathbf{x}^2)_i}{c_1(\lambda_1 - \tilde{\lambda}_1)(\mathbf{x}^1)_i}\left(\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{m-1} + \cdots + \dfrac{c_n(\lambda_n - \tilde{\lambda}_1)(\mathbf{x}^n)_i}{c_1(\lambda_1 - \tilde{\lambda}_1)(\mathbf{x}^1)_i}\left(\dfrac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^{m-1}} =$$

$$\lambda_2 \frac{\dfrac{c_1(\lambda_1 - \tilde{\lambda}_1)(\mathbf{x}^1)_i}{c_2(\lambda_2 - \tilde{\lambda}_1)(\mathbf{x}^2)_i}\left(\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^m + 1 + \cdots + \dfrac{c_n(\lambda_n - \tilde{\lambda}_1)(\mathbf{x}^n)_i}{c_2(\lambda_2 - \tilde{\lambda}_1)(\mathbf{x}^2)_i}\left(\dfrac{\lambda_n}{\lambda_2}\right)^m}{\dfrac{c_1(\lambda_1 - \tilde{\lambda}_1)(\mathbf{x}^1)_i}{c_2(\lambda_2 - \tilde{\lambda}_1)(\mathbf{x}^2)_i}\left(\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{m-1} + 1 + \cdots + \dfrac{c_n(\lambda_n - \tilde{\lambda}_1)(\mathbf{x}^n)_i}{c_2(\lambda_2 - \tilde{\lambda}_1)(\mathbf{x}^2)_i}\left(\dfrac{\lambda_n}{\lambda_2}\right)^{m-1}}$$

# 3.2- Métodos para encontrar os Autovalores e Autovetores de uma Matriz

**Exemplo:** (Pag. 441 Demidovich) Encontre os autovalores e autovetores da matriz $(\mathbf{A}_{n\times n} - \lambda_i \mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0}.$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Solução Aproximada:

$$\begin{cases} \lambda_1 \approx 4.46 \rightarrow \mathrm{x}^1 = [0.90 \quad 0.42 \quad 0.12]^{\mathrm{T}} \\ \lambda_2 \approx 1.59 \rightarrow \mathrm{x}^2 = [0.33 \quad -0.76 \quad -0.56]^{\mathrm{T}} \\ \lambda_3 \approx 0.95 \rightarrow \mathrm{x}^3 = [-0.14 \quad 0.53 \quad -0.81]^{\mathrm{T}} \end{cases}$$

# 3.2- Métodos para encontrar os Autovalores e Autovetores de uma Matriz

**Técnica 1.2- Encontrar aproximadamente os autovalores e autovetores de uma matriz simétrica positiva definida**

Para este caso sabemos que:

1- as raízes da equação característica são números reais positivos.

2- os autovetores podem ser reais e são ortogonais entre si.

$$\left(\mathbf{x}^i,\mathbf{x}^j\right)=0=\sum_{k=1}^{n} x_k^i x_k^j,\ \text{onde}\ \lambda_i \rightarrow \mathbf{x}^i,\ \lambda_j \rightarrow \mathbf{x}^j\ \text{e}\ \lambda_i \neq \lambda_j$$

O sistema para determinar o primeiro autovetor é

$$(\mathbf{A}_{n\times n}-\lambda_1\mathbf{E})\mathbf{x}^1=\mathbf{0}$$

ou na forma expandida:

# 3.2- Métodos para encontrar os Autovalores e Autovetores de uma Matriz

O sistema para determinar o primeiro autovetor é

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda_1) x_1^1 + a_{12} x_2^1 + \cdots + a_{1n} x_n^1 = 0 \\ a_{21} x_1^1 + (a_{22} - \lambda_1) x_2^1 + \cdots + a_{2n} x_n^1 = 0 \\ \cdots \; \cdots \; \cdots \; \cdots \; \cdots \; \cdots \; \cdots \; \cdots \; \cdots \; \cdots \; \cdots \; \cdots \; \cdots \\ a_{n1} x_1^1 + a_{n2} x_2^1 + \cdots + (a_{nn} - \lambda_1) x_n^1 = 0 \end{cases}$$

$$\text{ou} \; (6) \; \begin{cases} x_1^1 = \dfrac{1}{\lambda_1}(a_{11} x_1^1 + a_{12} x_2^1 + \cdots + a_{1n} x_n^1) \\ x_2^1 = \dfrac{1}{\lambda_1}(a_{21} x_1^1 + a_{22} x_2^1 + \cdots + a_{2n} x_n^1) \\ \cdots \; \cdots \; \cdots \; \cdots \; \cdots \; \cdots \; \cdots \; \cdots \; \cdots \; \cdots \; \cdots \; \cdots \; \cdots \; \cdots \; \cdots \\ x_{n-1}^1 = \dfrac{1}{\lambda_1}(a_{n-11} x_1^1 + a_{n-12} x_2^1 + \cdots + a_{n-1n} x_n^1) \\ \lambda_1 = \dfrac{1}{x_n^1}(a_{n1} x_1^1 + a_{n2} x_2^1 + \cdots + a_{nn} x_n^1) \end{cases}$$

# 3.2- Métodos para encontrar os Autovalores e Autovetores de uma Matriz

Como as coordenadas dos autovetores são determinadas a menos de um fator de proporcionalidade constante, então uma das coordenadas poderá ter valor arbitrário que podemos fixar. Por exemplo, $x_n^1 = 1$. O sistema (6) pode ser resolvido pelo Método da Iteração escolhendo adequadamente um valor inicial para $x_i^{1,0}$, $\lambda_1^0$ e fixando $x_n^1 = 1$ o processo iterativo para (6) é:

$$\begin{cases} x_i^{1,k+1} = \dfrac{1}{\lambda_1^k}\left(\displaystyle\sum_{j=1}^{n-1} a_{ij} x_j^{1,k} + a_{in}\right) & (i = 1, 2, \cdots, n-1) \\ \lambda_1^{k+1} = \left(\displaystyle\sum_{j=1}^{n-1} a_{nj} x_j^{1,k+1} + a_{nn}\right) & (k = 0, 1, 2, \cdots) \end{cases}$$

Logo $\lambda_1 \approx \lambda_1^k$ e $\mathbf{x}^1 \approx \begin{bmatrix} x_1^{1,k} & x_2^{1,k} & \cdots & x_{n-1}^{1,k} & 1 \end{bmatrix}^T$

Pode ser usado o Método de Seidel!

# 3.2- Métodos para encontrar os Autovalores e Autovetores de uma Matriz

Para determinar o segundo autovalor e o segundo autovetor escrevemos o sistema $(\mathbf{A}_{n\times n} - \lambda_2 \mathbf{E})\mathbf{x}^2 = \mathbf{0}$ ou

$$\left\{ \lambda_2 x_i^2 = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^2 + a_{in} \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \right. \qquad (7)$$

E usamos a propriedade de ortogonalidade entre os autovetores para eliminar uma das coordenadas do segundo autovetor. Por exemplo, $x_n^2$ .

$$\left(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2\right) = 0 = \sum_{k=1}^{n} x_k^1 x_k^2, \text{ onde } \lambda_1 \to \mathbf{x}^1, \lambda_2 \to \mathbf{x}^2 \text{ e } \lambda_1 \neq \lambda_2 \qquad (8)$$

Com (7) e (8) obtemos o sistema

$$(9) \quad \begin{cases} x_i^2 = \dfrac{1}{\lambda_2} \displaystyle\sum_{j=1}^{n-1} a_{ij}^2 x_j^2 \quad (i = 1, 2, \cdots, n-2) \\ \lambda_2 = \dfrac{1}{x_{n-1}^2} \displaystyle\sum_{j=1}^{n-1} a_{n-1\,j}^2 x_j^2 \end{cases}$$

# 3.2- Métodos para encontrar os Autovalores e Autovetores de uma Matriz

Fixando $x_{n-1}^{2} = 1$ podemos resolver (9) pelo Método da Iteração.

$$(10)\quad \begin{cases} x_i^{2,k+1} = \dfrac{1}{\lambda_2^k}\left(\displaystyle\sum_{j=1}^{n-1} a_{ij}^2 x_j^{2,k}\right) & (i = 1, 2, \cdots, n-2) \\ \lambda_2^{k+1} = \dfrac{1}{x_{n-1}^2}\left(\displaystyle\sum_{j=1}^{n-1} a_{n-1\,j}^2 x_j^{2,k+1}\right) & (k = 0, 1, 2, \cdots) \end{cases}$$

Assim determinamos aproximadamente $\lambda_2$ e $\mathbf{x}^2$, onde $x_n^2$ é determinada da condição de ortogonalidade (8).

As restantes raízes $\lambda_j \ (j = 3, \cdots, n)$ e seus correspondentes autovetores $\mathbf{x}^j$ podem ser encontrado de maneira similar.

# 3.2- Métodos para encontrar os Autovalores e Autovetores de uma Matriz

**Exemplo:** Pag. 447 Demidovich

Encontre os autovalores e autovetores da matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix}$

$$(\mathbf{A}_{n\times n} - \lambda_i \mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Esta matriz é definida positiva

$$\text{se } \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}, \quad u = \left(\mathbf{A}_{n\times n}\mathbf{x}, \mathbf{x}\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j^* > 0.$$

e é simétrica.

Solução Aproximada:

$$\begin{cases} \lambda_1 \approx 8.3874 \rightarrow \mathbf{x}^1 = \begin{bmatrix} 0.8077 & 0.7720 & 1 \end{bmatrix}^{\mathbf{T}} \\ \lambda_2 \approx 4.4867 \rightarrow \mathbf{x}^2 = \begin{bmatrix} 0.2170 & 1 & -0.9473 \end{bmatrix}^{\mathbf{T}} \\ \lambda_3 \approx 2.1260 \rightarrow \mathbf{x}^3 = \begin{bmatrix} 1 & -0.5673 & -0.3698 \end{bmatrix}^{\mathbf{T}} \end{cases}$$

# Frase do Dia

"Although to penetrate into the intimate mysteries of nature and thence to learn the true causes of phenomena is not allowed to us, nevertheless it can happen that a certain fictive hypothesis may suffice for explaining many phenomena."

Leonhard Euler