DESAFIOS EM ELEMNTOS FINITOS:
PARTE II – EQUAÇÃO DE HELMHOLTZ

Prof. Gustavo Benitez Alvarez

Departamento de Ciências Exatas EEIMVR/UFF, Brasil

benitez.gustavo@gmail.com

AGENDA ACADÊMICA 2010

UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

O SEMINÁRIO

- O Problema
- O Desafio
- A Equação de Helmholt
  (Formulação Forte, Fraca e Aproximação)
- Método de Elementos Finito de Galerkin
- Método de Elementos Finito de Galerkin Mínimos Quadrados GLS
- Método de Elementos Finito de

O PROBLEMA!

- Equações em Derivadas Parciais (EDP) lineares de segunda ordem modelam uma variedade de fenômenos físicos e problemas que aparecem na engenharia.

- A equação de Helmholtz é um exemplo de EDP que modela os harmônicos temporais de fenômenos de propagação e dispersão de ondas acústicas, elásticas e eletromagnéticas.

$$-\nabla \cdot \nabla u - k^2 u = f \quad \text{em } \Omega, \text{ onde } k \text{ é o número de onda}$$

- Usualmente, o método de elementos finito clássico (MEF) ou método de Galerkin é usado para obter soluções numéricas destes problemas.

- Apenas para problemas puramente difusivos a solução do método de Galerkin é ótima.

$$\underbrace{-\nabla \cdot D \nabla \phi}_{\text{Difusão}} = \underbrace{f}_{\text{Fonte}} \quad \text{em } \Omega$$

O DESAFIO!

- Há mais de três décadas se sabe que o método de Galerkin é instável e impreciso para alguns problemas descritos por EDP lineares de segunda ordem. Sua solução apresenta oscilações espúrias que não correspondem com a solução exata do problema.

- Brooks, A. N. and Hughes, T. J. R., Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 32:199-259, 1982.

- A equação de Helmholtz é outro exemplo representativo do deterioro das propriedades de estabilidade e precisão do método de Galerkin.

$$|e_h|_1 \leq C_1 kh + C_2 k^3 h^2, \quad kh < 1 \quad \text{e } C_1, C_2 \quad \text{independem de } k \text{ e } h$$

- Bayliss, C.I. Goldstein, E. Turkel, On accuracy conditions for the numerical computation of waves, J. Comp. Phys. 59 (1985) 396–404.
- A.K. Aziz, R.B. Kellogg, A.B. Stephens, A two point boundary value problem with a rapidly oscillating solution, Numer. Math. 53 (1988) 107–121.
- C.I. Goldstein, The weak element method applied to Helmholtz type equations, Appl. Numer. Math. 2 (1986) 409–426.

- Como alternativa a este método tem surgido varias estratégias dentro do contexto de elementos finitos (GLS, QSFEM, DGB, GPR, etc).

- Desenvolver um MEF cuja solução numérica seja estável e precisa para esta equação continua sendo um grande desafio para os pesquisadores nesta área do conhecimento.

- A Equação de Helmholtz é o modelo matemático linear que descreve os harmônicos temporais de ondas acústicas, elásticas e eletromagnéticas.

Exemplos:

Equação da onda para potencial escalar (acústica)

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - c^2 \Delta \varphi = \frac{c^2 \rho}{\varepsilon_0}$$

$$\varphi(x,t) = \mathrm{Re}(\hat{\varphi}(x) e^{-iwt})$$

$$\Delta \hat{\varphi} + k^2 \hat{\varphi} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$k = w/c$$ número de onda

Harmônico temporal das equações de Mazwell (electromagnética)

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{E}(x,t) &= \mathrm{Re}(\hat{\mathbf{E}}(x) e^{-iwt}) \\ \mathbf{D}(x,t) &= \mathrm{Re}(\hat{\mathbf{D}}(x) e^{-iwt}) \end{aligned}\right\} \text{campo elétrico}$$

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{H}(x,t) &= \mathrm{Re}(\hat{\mathbf{H}}(x) e^{-iwt}) \\ \mathbf{B}(x,t) &= \mathrm{Re}(\hat{\mathbf{B}}(x) e^{-iwt}) \end{aligned}\right\} \text{campo magnético}$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - c^2 \Delta \mathbf{E} = 0$$

$$\Delta \hat{\mathbf{E}} + k^2 \hat{\mathbf{E}} = 0$$

número de onda $k = w/c$

Equação da onda para potencial vetorial (elástica)

$$\mathbf{A}(x,t) = \mathrm{Re}(\hat{\mathbf{A}}(x) e^{-iwt})$$

$$\mathbf{J}(x,t) = \mathrm{Re}(\hat{\mathbf{J}}(x) e^{-iwt})$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - c^2 \Delta \mathbf{A} = \mu_0 c^2 \mathbf{J}$$

$$\Delta \hat{\mathbf{A}} + k^2 \hat{\mathbf{A}} = -\mu_0 \hat{\mathbf{J}}$$

número de onda $k = w/c$

EQUAÇÃO DE HELMHOLTZ

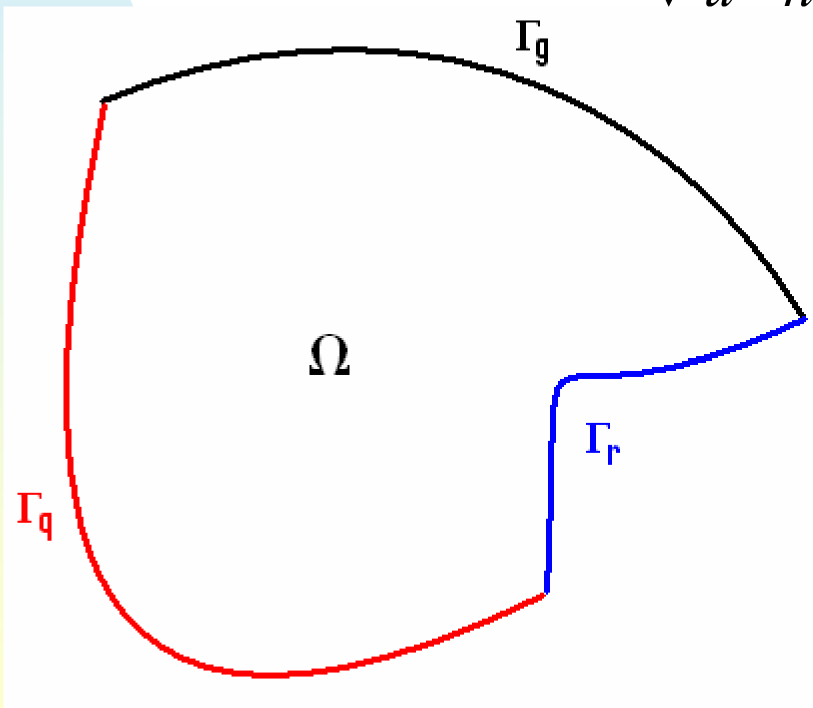
- **Problema de Valor de Contorno:**

$$L(u) \equiv -\nabla \cdot \nabla u - k^2 u = f \quad \text{em } \Omega$$

$$u = g \quad \text{em } \Gamma_g$$

$$\nabla u \cdot \hat{n} = q \quad \text{em } \Gamma_q$$

$$\nabla u \cdot \hat{n} + \alpha u = r \quad \text{em } \Gamma_r$$



Formulação Forte do Problema

ou

Equação Diferencial Parcial

(EDP)

EQUAÇÃO DE HELMHOLTZ

- **Como passar de uma formulação forte do problema para outra formulação mais fraca? (menos exigências para as funções envolvidas no problema)**

Formulação Forte ←→ Formulação Fraca

ou

Equação Diferencial Parcial ←→ Equação Variacional

Passo 1: Multiplicar a EDP por funções admissíveis (teste $\eta \in C_0^\infty(\Omega)$) e integrando a equação sobre todo o domínio Ω.

Passo 2: Integração por partes (ou usar a formula de Green) para reduzir o maior ordem das derivadas parciais presentes na EDP.

$$\int_\Omega \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \eta \, d\Omega = -\int_\Omega \phi \frac{\partial \eta}{\partial x_i} d\Omega + \int_\Gamma \phi \, \eta \, \mathbf{n}_i \, d\Gamma$$

Passo 3: Usando a condição de que as funções teste se anulam no contorno o termo de contorno da formula de Green é eliminado.

EQUAÇÃO DE HELMHOLTZ

Formulação Variacional: Encontrar $u \in S$ que satisfaz a equação:

$$A(u,v) \equiv \int_{\Omega} [\nabla u \cdot \nabla v - k^2 u v] \, d\Omega + \int_{\Gamma_r} \alpha u v \, d\Gamma$$

$$= \int_{\Omega} f v \, d\Omega + \int_{\Gamma_q} q v \, d\Gamma + \int_{\Gamma_r} r v \, d\Gamma \equiv F(v) \qquad \forall \; v \in V$$

$$S = \left\{ u \in H^1(\Omega) : u = g \text{ em } \Gamma_g \right\} \qquad V = \left\{ v \in H^1(\Omega) : v = 0 \text{ em } \Gamma_g \right\}$$

Os espaços de funções S e V são de dimensão infinita. Ou seja, a solução exata deste problema depende de encontrar "infinitas incógnitas", que nem sempre é possível. Galerkin (1871-1945) estudo a solução aproximada do problema em espaços de funções de dimensão finita. O método de Galerkin é baseado em seqüência de subespaços de dimensão finita $\{V_n\}_{n=1}^{\infty} \subset V$, $V_n \subset V_{n+1}$, que converge para o espaço V no limite. Pode ser provado, sob certas condições, que a seqüência de soluções aproximadas $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\phi_n \in S_n$ converge para a solução exata do problema.

EQUAÇÃO DE HELMHOLTZ

- **Formulação Variacional Aproximada Correspondente:** Encontrar $u_n \in S_n$ que satisfaz

$$A(u_n, v_m) \equiv \int_{\Omega} [\nabla u_n \cdot \nabla v_m - k^2 u_n v_m] \, d\Omega + \int_{\Gamma_r} \alpha u_n v_m \, d\Gamma$$

$$= \int_{\Omega} f v_m \, d\Omega + \int_{\Gamma_q} q v_m \, d\Gamma + \int_{\Gamma_r} r v_m \, d\Gamma \equiv F(v_m) \qquad \forall \; v_m \in V_m$$

- Como os espaços são de dimensão finita N a solução aproximada pode ser escrita como combinação linear das funções bases com coeficientes a determinar

$$u_N = \sum_{i=1}^{N} c_i B_i$$

1 – Base Global ⇔ Método de Galerkin Original

2 – Base Local ⇔ Método de Elementos Finitos de Galerkin

- Como resultado transformamos o problema acima em um sistema linear de equações algébricas

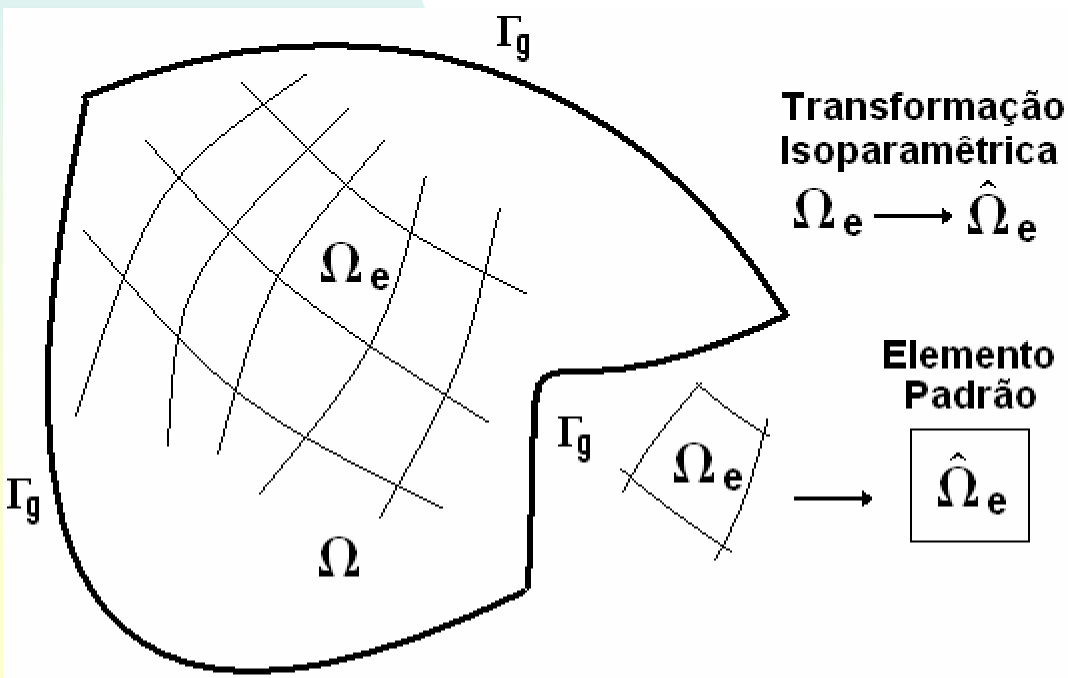
$$\sum_{m=1}^{N} A_{nm} C_m = F_n, \qquad n = 1, \ldots, N \text{ ou } \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{NN} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1N} & \cdots & A_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_N \end{bmatrix}$$

EQUAÇÃO DE HELMHOLTZ

- **O MEF de Galerkin:** Seja $M^h = \{\Omega_1,\ldots,\Omega_{ne}\}$ uma partição de Ω . Encontrar $u^h \in S^{h,l}$ que satisfaz $\forall v^h \in V^{h,l}$:

$$A_G(u^h, v^h) \equiv \sum_{e=1}^{ne} \int_{\Omega_e} [\nabla u_e^h \cdot \nabla v_e^h - k^2 u_e^h v_e^h] d\Omega = \sum_{e=1}^{ne} \int_{\Omega_e} f v_e^h d\Omega \equiv F_G(v^h)$$

$$u_e^h(x,y,z) = \sum_{i=1}^{nne} u_e^h(i)\eta_i(x,y,z), \text{ onde } \eta_i \text{ são os Polinômios de Lagrange}$$



A instabilidade do método de Galerkin se deve a falta de controle no gradiente da solução.

Quando *k>30* o método de Galerkin apresenta oscilações espúrias. Nestes casos o método é instável a menos que a malha seja refinada.

EQUAÇÃO DE HELMHOLTZ

O MEF de Galerkin é inadequado para resolver esta equação porque a solução aproximada apresenta o conhecido efeito de poluição do erro (retardo de fase).

$$|e_h|_1 \leq C_1 kh + C_2 k^3 h^2, \quad kh < 1 \quad \text{e } C_1, C_2 \quad \text{independe de } k \text{ e } h$$

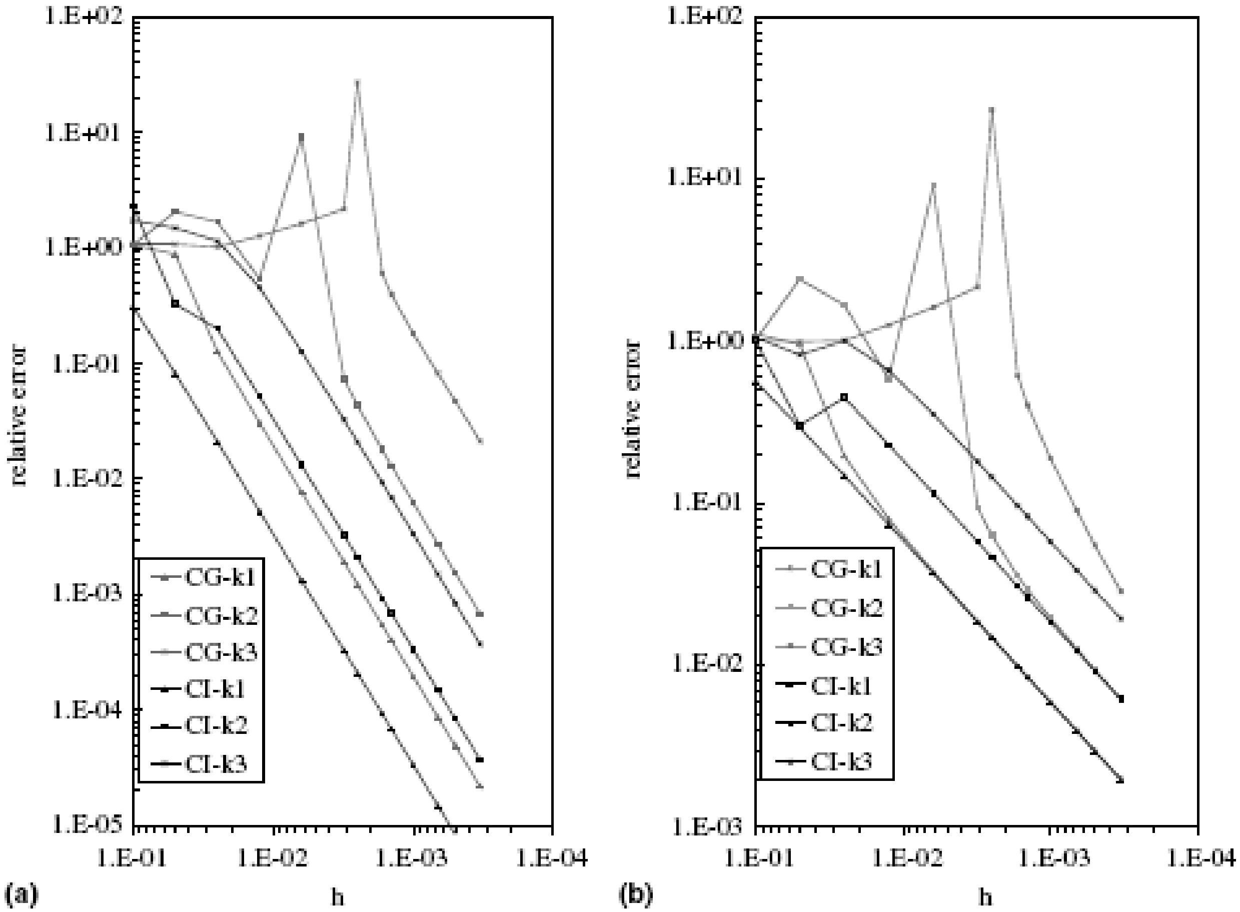
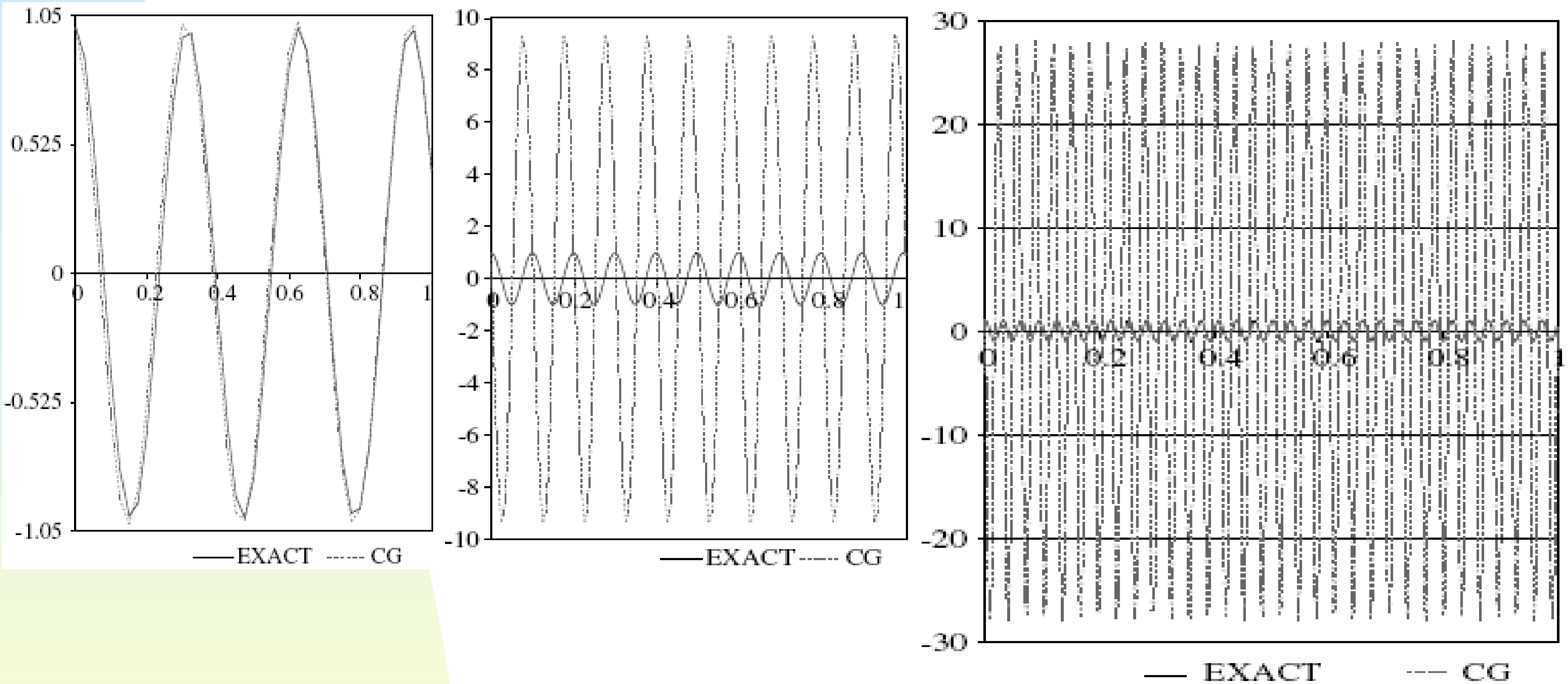


Fig. 4. Convergence behavior of the relative errors of continuous Galerkin method for k^2 equal to 400 (CG-k1), 4000 (CG-k2) and 40,000 (CG-k3) compared to the corresponding error of the continuous interpolant (CI): (a) L^2-norm, (b) H^1_1-seminorm.

EQUAÇÃO DE HELMHOLTZ

O MEF de Galerkin é inadequado para resolver esta equação porque a solução aproximada apresenta o conhecido efeito de poluição do erro (retardo de fase).



Solução do MEF de Galerkin em 1D do problema homogêneo ($k^2=400$ $kh=0.5$), ($k2=4000$ $kh=0.5$), ($k2=40000$ $kh=0.3955$).

- Como alternativa a este método tem surgido varias estratégias dentro do contexto de elementos finitos, por exemplo o método GLS.

EQUAÇÃO DE HELMHOLTZ

- **O MEF Galerkin Mínimos Quadrados GLS:** Encontrar $u^h \in S^{h,l}$ que satisfaz a equação $\forall v^h \in V^{h,l}$

$$A_G(u^h, v^h) + A_{LS}(u^h, v^h) = F_G(v^h) + F_{LS}(v^h)$$

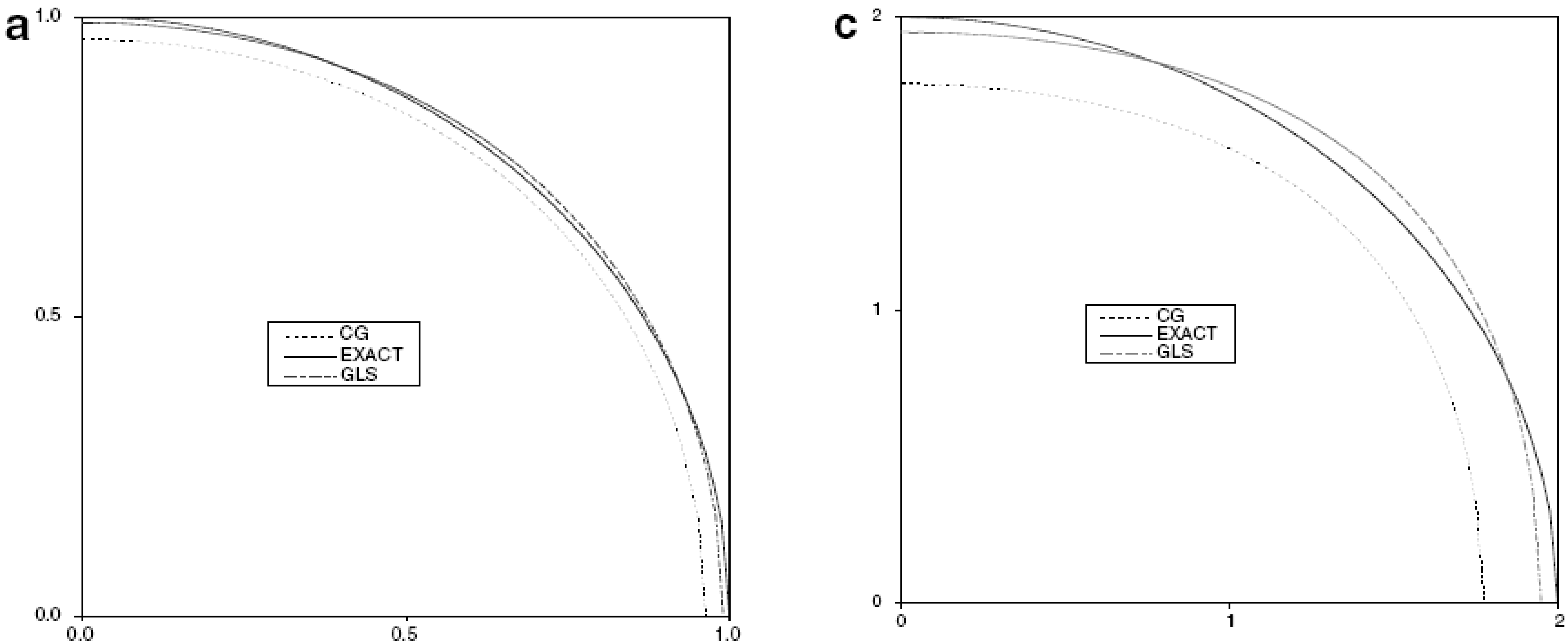
$$A_G = \sum_{e=1}^{ne} \int_{\Omega_e} [\nabla u_e^h \cdot \nabla v_e^h - k^2 u_e^h v_e^h] \, d\Omega, \quad F_G = \sum_{e=1}^{ne} \int_{\Omega_e} f \, v_e^h \, d\Omega$$

$$A_{LS} = \sum_{e=1}^{ne} \int_{\Omega_e} [-\nabla \cdot \nabla u_e^h - k u_e^h] \, p_e^h \, d\Omega_e, \quad F_{LS} = \sum_{e=1}^{ne} \int_{\Omega_e} f_e \, p_e^h \, d\Omega_e$$

$$p_e^h = \tau_e \left[-\nabla \cdot \nabla v_e^h - k v_e^h \right]$$

$$\tau_e = \frac{1}{k^2} \left[1 - 6 \frac{4 - \cos\zeta_1 - \cos\zeta_2 - 2\cos\zeta_1 \cos\zeta_2}{(2 + \cos\zeta_1)(2 + \cos\zeta_2) k^2 h^2} \right], \quad \zeta_1 = kh\cos\theta, \quad \zeta_2 = kh\sin\theta$$

- Problemas 1D a solução do método GLS coincide com a solução exata.
- Problemas 2D e 3D o método GLS se mostra instável e impreciso quando k>30 e a onda plana tem direção diferente de teta.
- Para problemas 2D e 3D não existe um método de elemento finito com funções base lineares livre de poluição para todas as possíveis direções da onda plana.



Relação de dispersão para *kh=1* e *kh=2*, Galerkin Continuo (CG), Galerkin Mínimo Quadrado (GLS) e Exata em problemas 2D.

$$(\xi_1)^2 + (\xi_2)^2 = (kh)^2, \quad \xi_1 = \tilde{k}h\cos\theta \quad \text{e} \quad \xi_2 = \tilde{k}h\sin\theta \quad \text{Exata}$$

$$1 + \cos(\xi_1)\cos(\xi_2) + \cos(\xi_1) + \cos(\xi_2) = 0, \quad \text{Galerkin}$$

$$1 + \tau[\cos(\xi_1)\cos(\xi_2) + \cos(\xi_1) + \cos(\xi_2)] = 0, \quad \text{Galerkin Mínimo Quadrado}$$

O GLS elimina a poluição (retardo de fase) apenas na direção de onda $\theta = \frac{\pi}{8}$

- I. Harari, T.J.R. Hughes, Galerkin/least squares finite element methods for the reduced wave equation with non-reflecting boundary conditions in unbounded domains, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 98 (1992) 411–454.

- I. Babuska, F. Ihlenburg, E.T. Paik, S.A. Sauter, A generalized finite element method for solving the Helmholtz equation in two dimensions with minimal pollution, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 128 (1995) 325–359.

O método Quasi Stabilized FEM (QSFEM) minimiza a poluição do erro. Porém, é um método sem formulação variacional, ou seja, baseado em diferenças finitas. Sua relação de dispersão é:

$$1+\tau_1[\cos(\xi_1)\cos(\xi_2)]+\tau_2[\cos(\xi_1)+\cos(\xi_2)]=0, \quad \text{QSFEM}$$

$$\tau_1=\frac{(r_1-r_2)}{(r_2w_1-r_1w_2)} \qquad r_1=\cos(kh\cos\tfrac{\pi}{16})\cos(kh\sin\tfrac{\pi}{16})$$

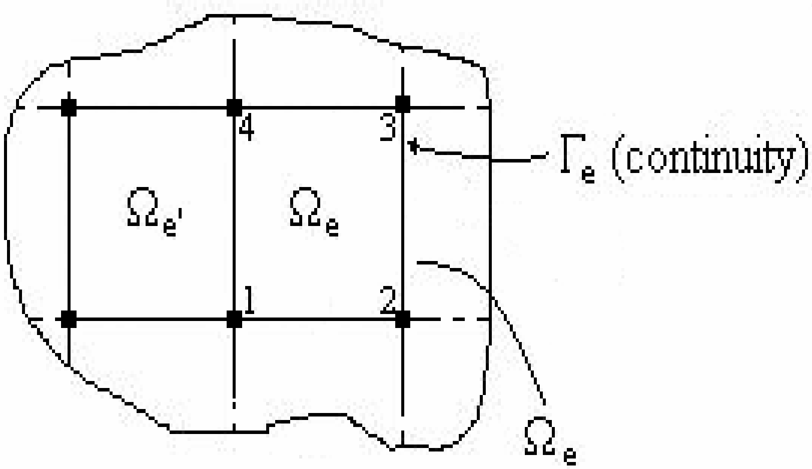
$$r_2=\cos(kh\cos\tfrac{3\pi}{16})\cos(kh\sin\tfrac{3\pi}{16})$$

$$\tau_2=\frac{(w_2-w_1)}{(r_2w_1-r_1w_2)} \qquad w_1=\cos(kh\cos\tfrac{\pi}{16})+\cos(kh\sin\tfrac{\pi}{16})$$

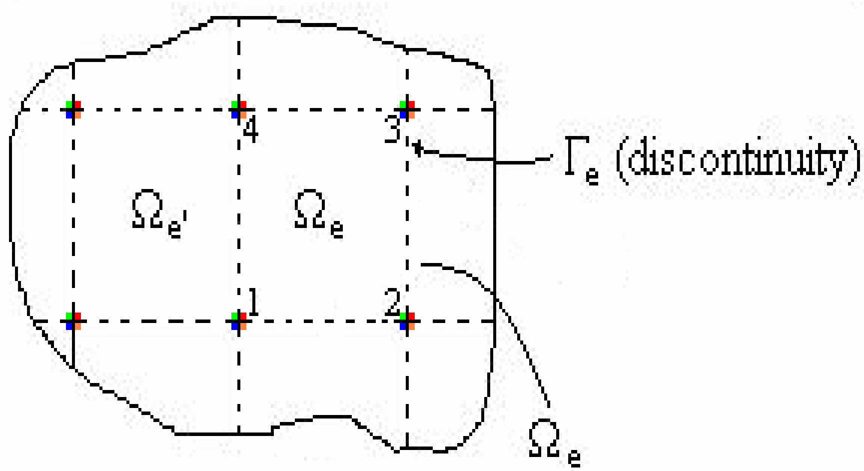
$$w_2=\cos(kh\cos\tfrac{3\pi}{16})+\cos(kh\sin\tfrac{3\pi}{16})$$

- G.B. Alvarez, A.F.D. Loula, E.G. Dutra do Carmo, F.A. Rochinha, A discontinuous finite element formulation for the Helmholtz equation, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 195 (2006) 4018–4035.

O método Galerkin Discontinuo FEM (DG) minimiza a poluição do erro. Porém, o método surge de uma formulação variacional, ou seja, baseado em elementos finitos. Entretanto, o método introduz mais graus de liberdade que os métodos contínuos.



Completely continuous FEM



Completely discontinuous FEM

EQUAÇÃO DE HELMHOLTZ

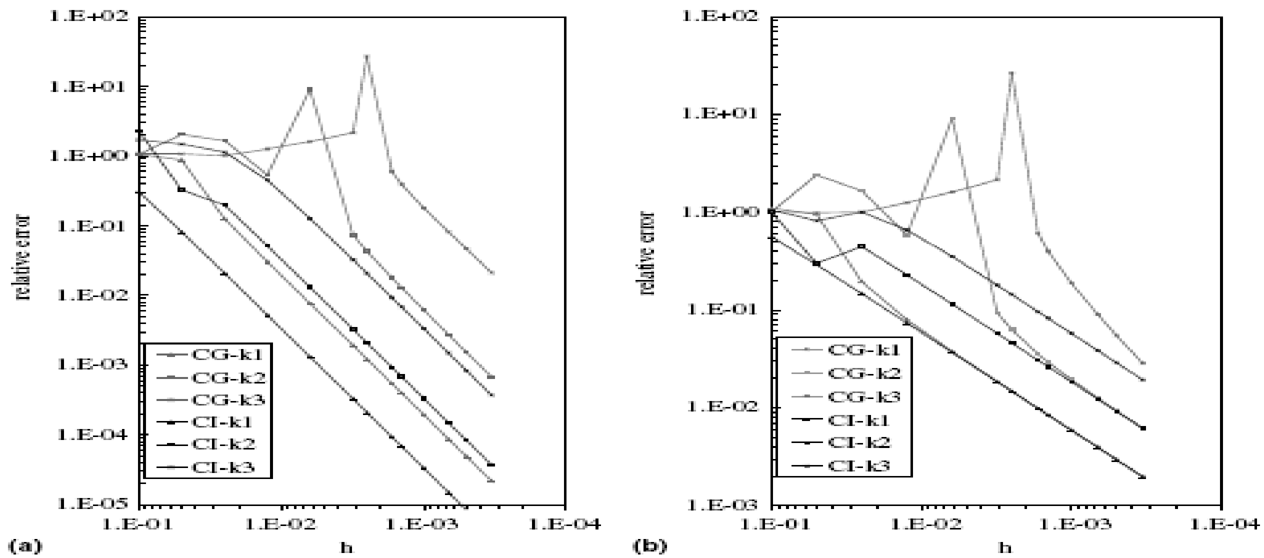


Fig. 4. Convergence behavior of the relative errors of continuous Galerkin method for k^2 equal to 400 (CG-k1), 4000 (CG-k2) and 40,000 (CG-k3) compared to the corresponding error of the continuous interpolant (CI): (a) L^2-norm, (b) H^1-seminorm.

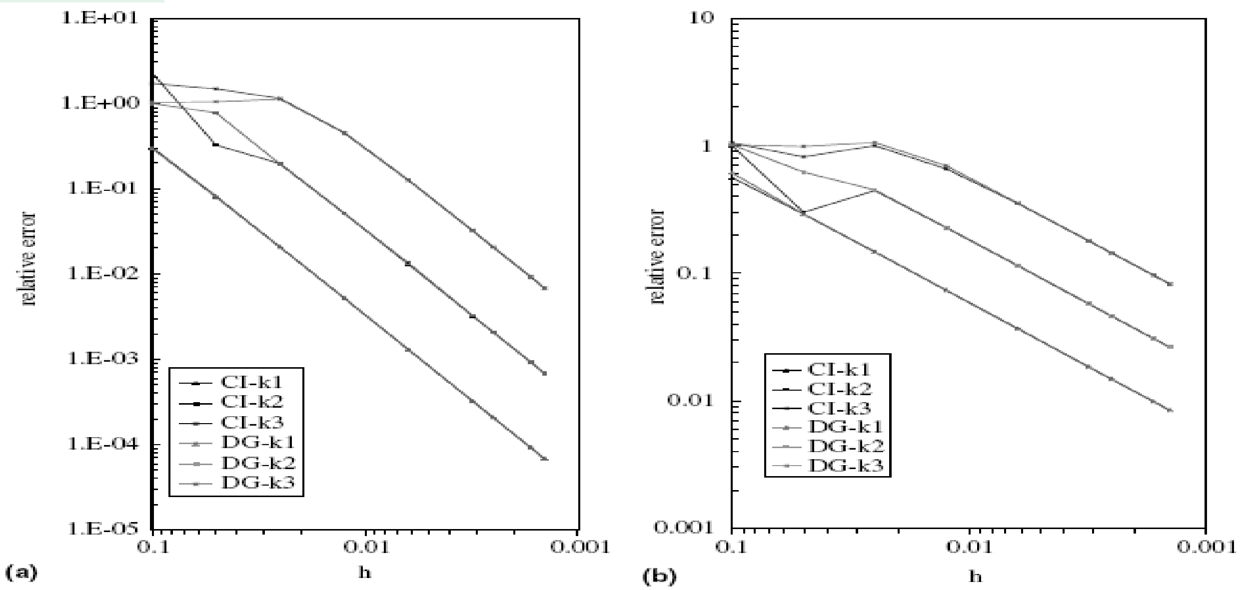


Fig. 5. Convergence behavior of the relative errors of discontinuous Galerkin method for k^2 equal to 400 (DG-k1), 4000 (DG-k2) and 40,000 (DG-k3) compared to the corresponding error of the continuous interpolant (CI): (a) L^2-norm, (b) H^1-seminorm.

EQUAÇÃO DE HELMHOLTZ

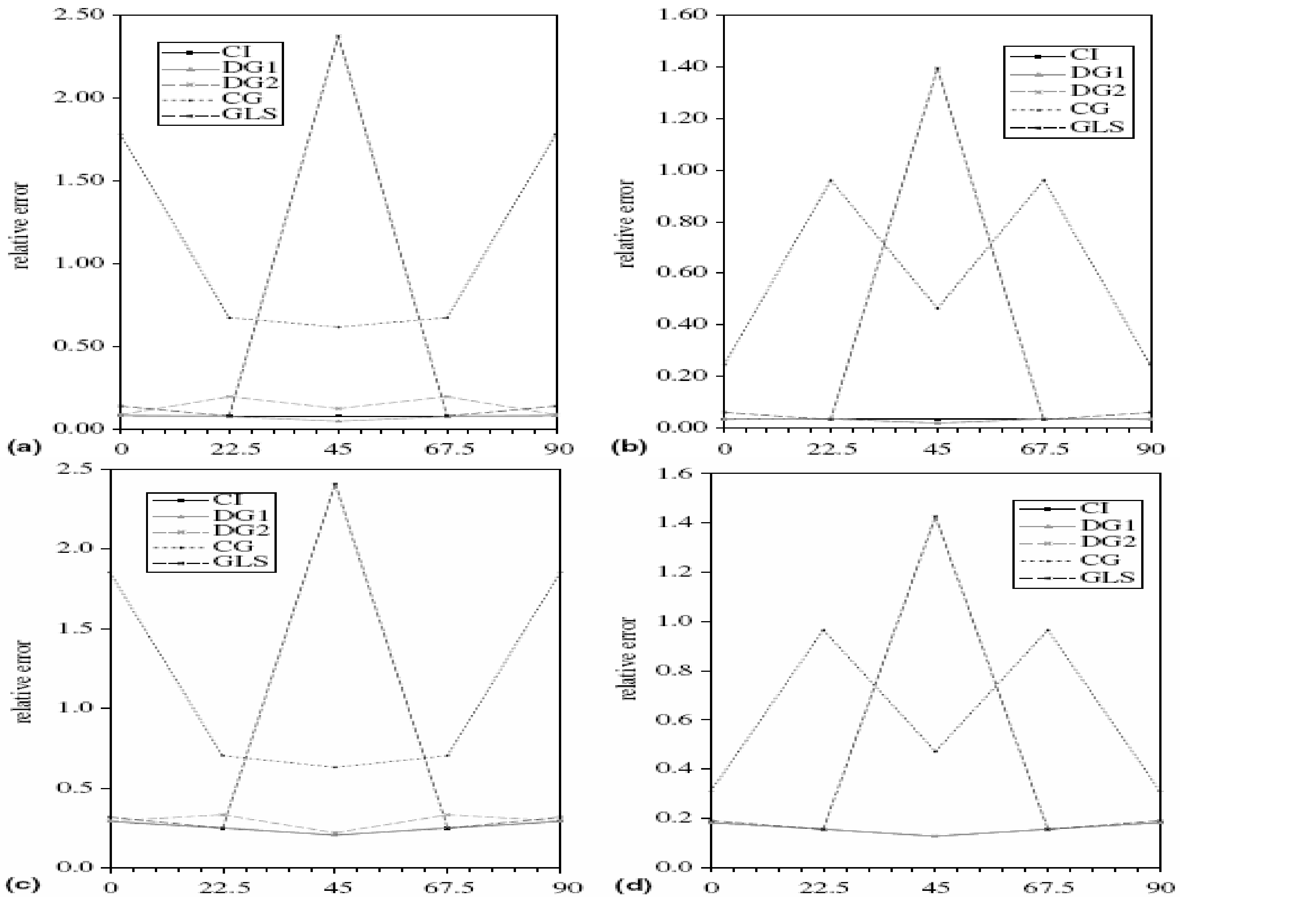


Fig. 16. Relative error of the discontinuous Galerkin solution (DG) compared to the continuous interpolant (CI), continuous Galerkin (CG) and (GLS) in L^2-norm (a, b) and H^1_J-norm (c, d) as a function of θ-direction: $k^2 = 400$, (a, c) $kh = 1$, coarse mesh, (b, d) $kh = 0.62$, resolvable mesh.

EQUAÇÃO DE HELMHOLTZ

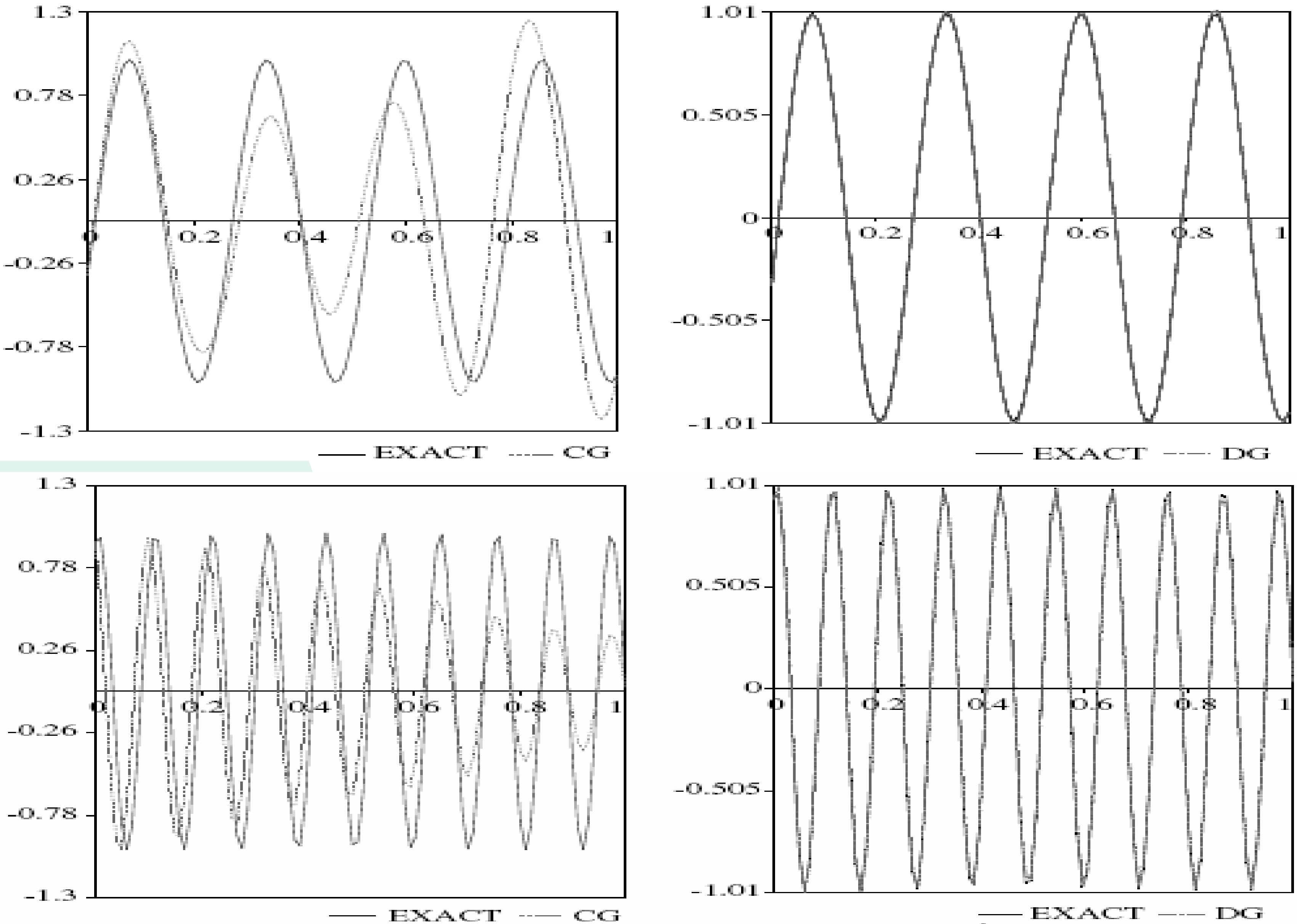
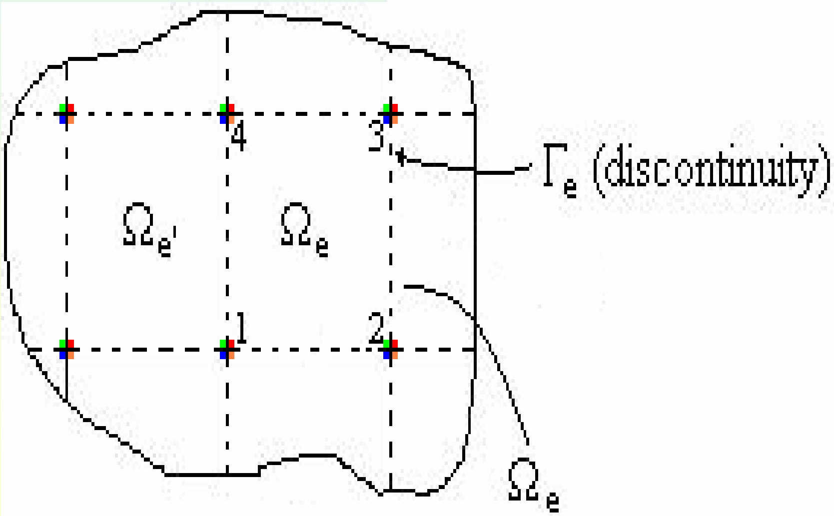


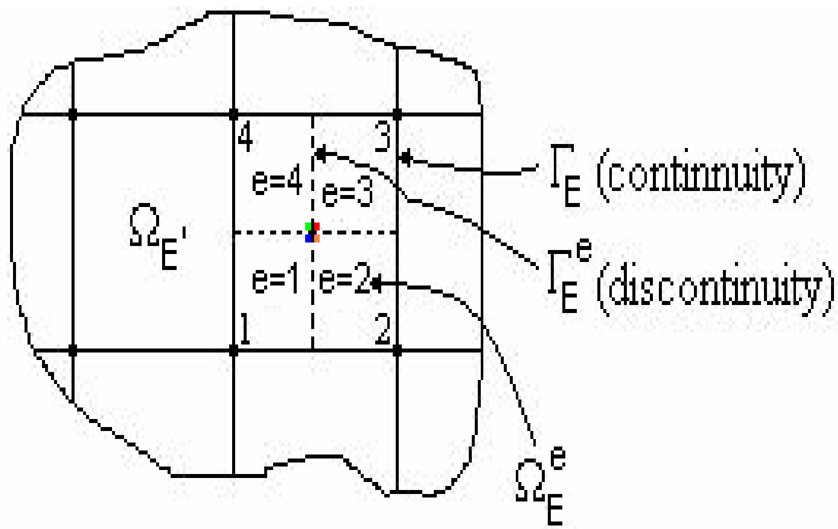
Fig. 18. Solution of homogeneous problem in two dimension at $x = 0.505$ (top) and $y = 0.505$ (bottom) for $k^2 = 4000$ and $\theta = \frac{3\pi}{8}$. Continuous Galerkin (left) and discontinuous Galerkin (right).

- A.F.D. Loula, G.B. Alvarez, E.G. Dutra do Carmo, F.A. Rochinha, A discontinuous finite element method at element level for Helmholtz equation, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 196 (2007) 867–878.

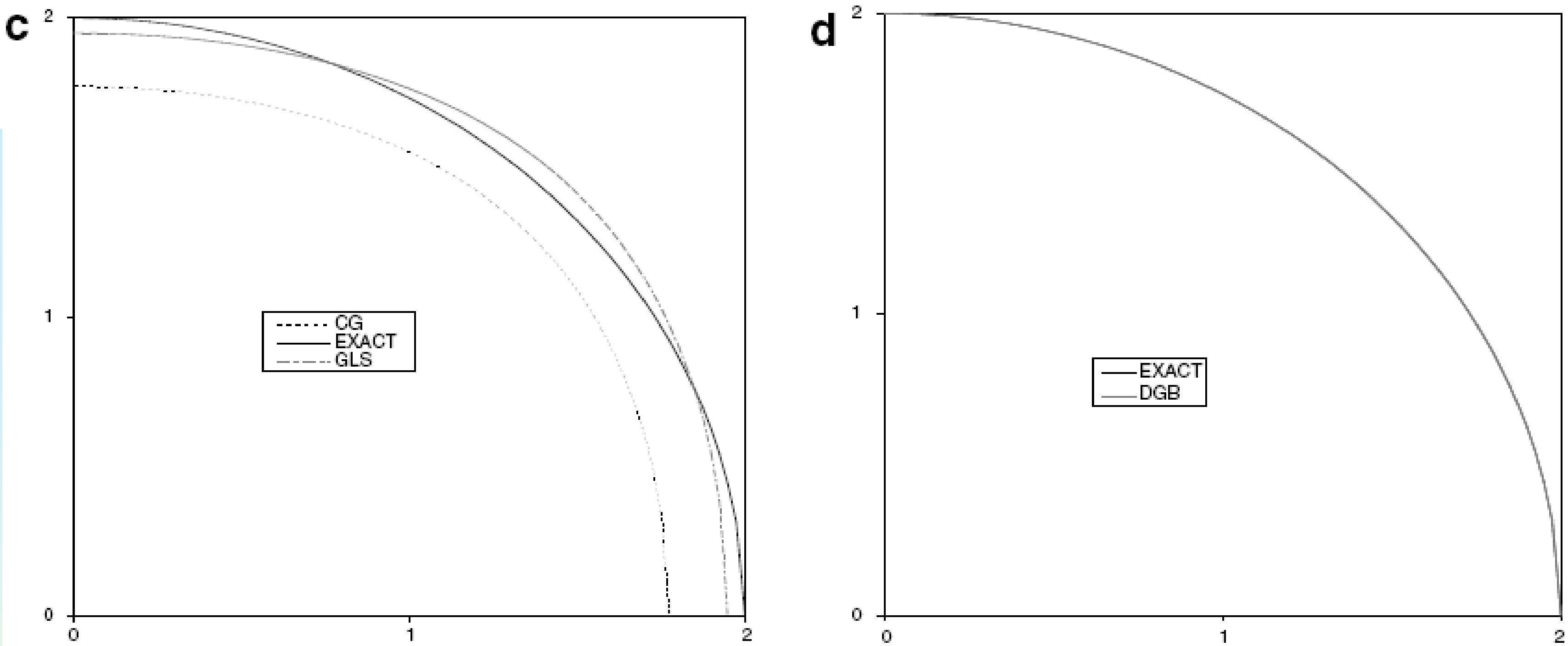
O método Galerkin Descontinuo com Bolha (DGB) minimiza a poluição do erro, surge de uma formulação variacional (baseado em elementos finitos). Sua relação de dispersão é equivalente à QSFEM, ou seja, minimiza a poluição do erro. O método introduz menos graus de liberdade que o método DG e equivalente aos métodos contínuos. Porém, precisa do uso da técnica de Condensação Estática dos graus de liberdades correspondentes às descontinuidades.



Completely discontinuous FEM



Discontinuous FEM at element level



Relação de dispersão para *kh=2*, Galerkin Continuo (CG), Galerkin Mínimo Quadrado (GLS), Exata e DGB em problemas 2D.

$$(\xi_1)^2 + (\xi_2)^2 = (kh)^2, \quad \xi_1 = \tilde{k}h\cos\theta \quad \text{e} \quad \xi_2 = \tilde{k}h\sin\theta \quad \text{Exata}$$

$$1 + \cos(\xi_1)\cos(\xi_2) + \cos(\xi_1) + \cos(\xi_2) = 0, \quad \text{Galerkin}$$

$$1 + \tau[\cos(\xi_1)\cos(\xi_2) + \cos(\xi_1) + \cos(\xi_2)] = 0, \quad \text{GLS}$$

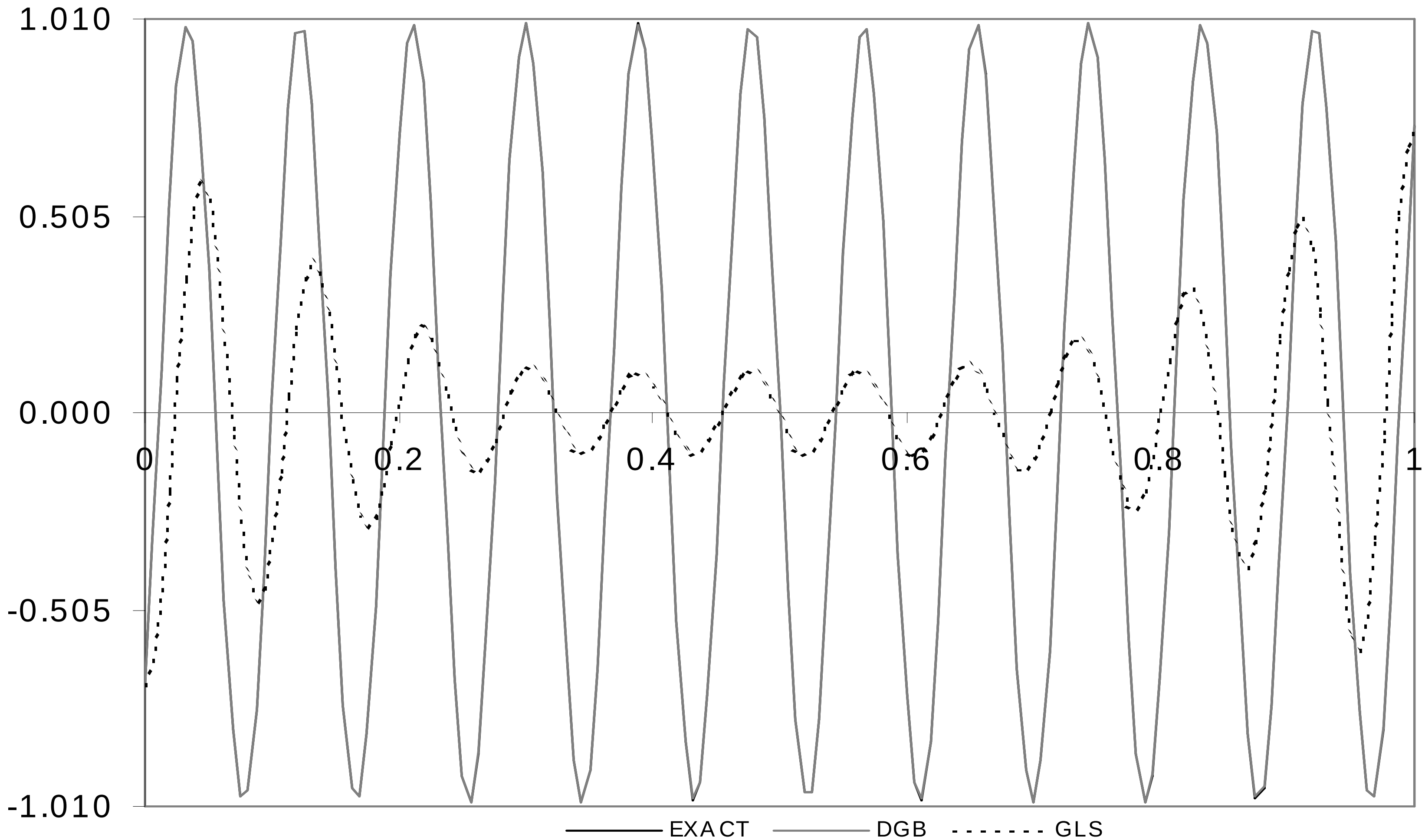
$$1 + \tau_1[\cos(\xi_1)\cos(\xi_2)] + \tau_2[\cos(\xi_1) + \cos(\xi_2)] = 0, \quad \text{QSFEM e DGB}$$

EQUAÇÃO DE HELMHOLTZ

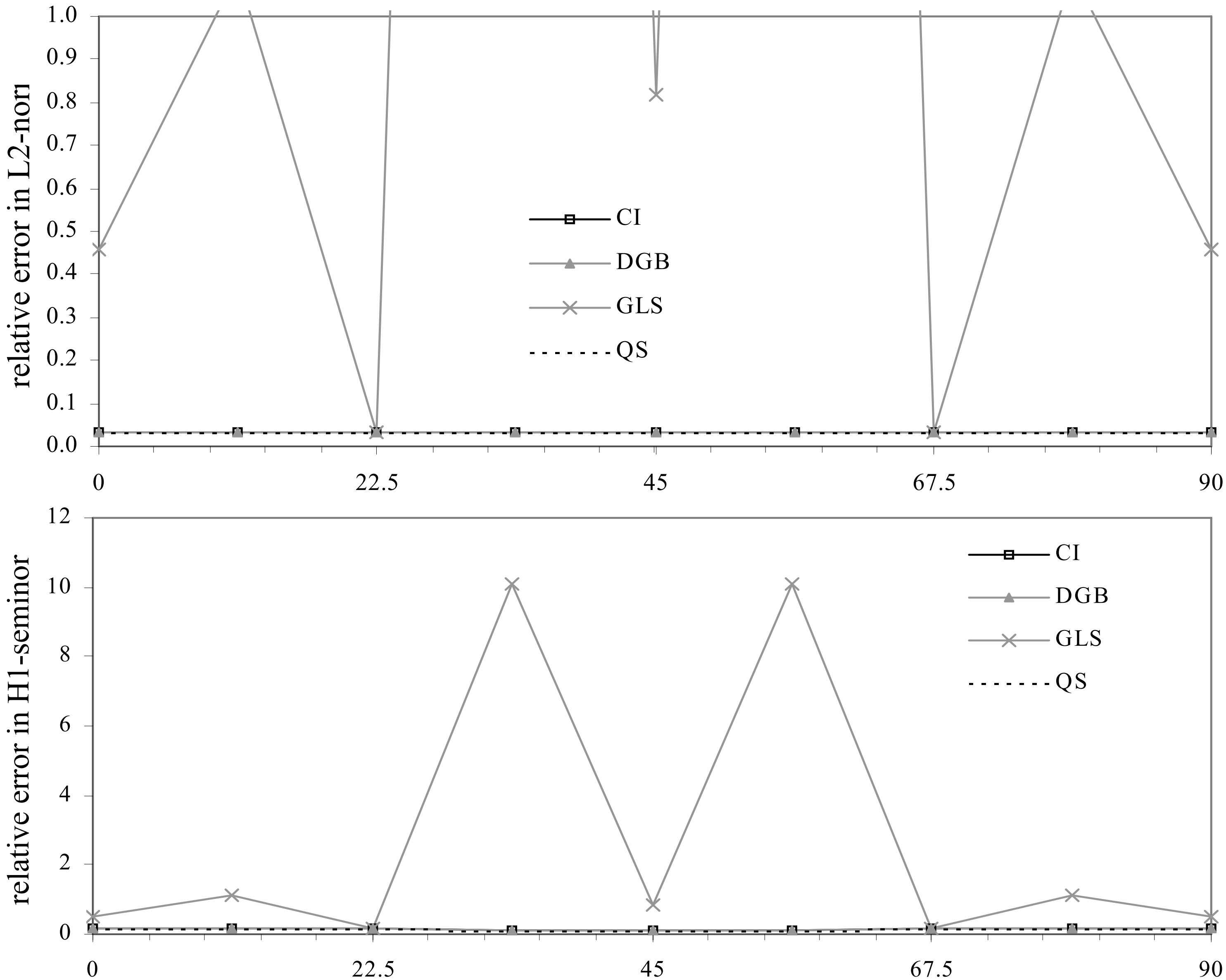
- E.G. Dutra do Carmo, G.B. Alvarez, A.F.D. Loula, F.A. Rochinha, A nearly optimal Galerkin projected residual finite element method for Helmholtz problem, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 197 (2008) 1362–1375.
- O método GPR minimiza a poluição do erro,
- Surge de uma formulação variacional continua (baseado em elementos finitos),
- Sua relação de dispersão é equivalente à QSFEM (minimiza a poluição do erro),
- O método tem os mesmos graus de liberdade que os métodos contínuos.
- Considerando um teorema de Babuska, que indica que é impossível construir um método de elementos finitos contínuos com funções bases lineares livre de poluição do erro, o melhor que se pode ter é um método linear continuo que minimize a poluição do erro. O método GPR faz isto.

Resultados Numéricos em 2D

Considere a equação de Helmholtz num domínio quadrado de lados unitários, $f=0$ e condições de contorno de Dirichlet, tais que a solução exata é $u=\cos[k(x\cos\theta+y\sin\theta)]$.



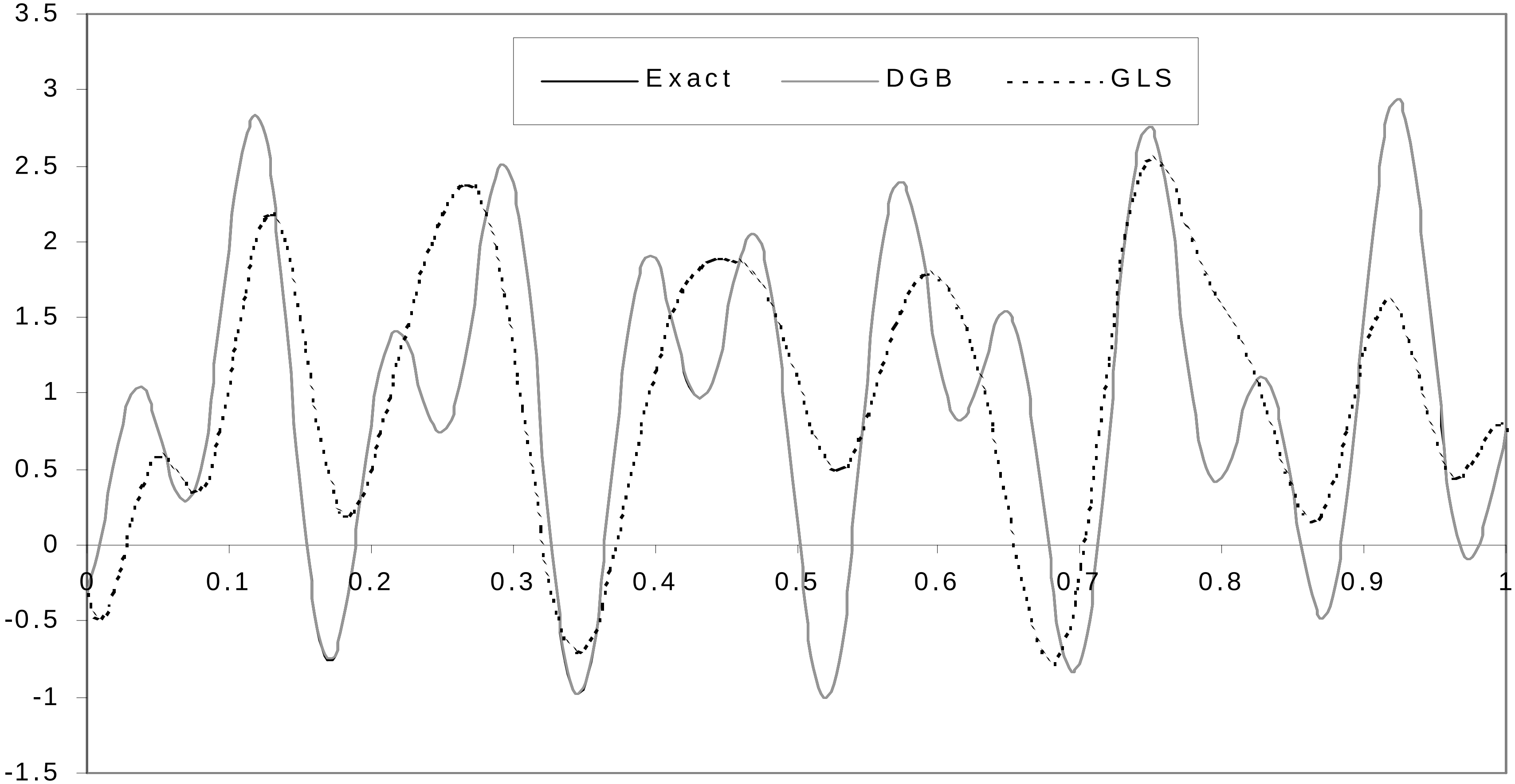
Soluções DGB/GPR e GLS do problema homogêneo em duas dimensões na seção $x=0.5$, $k=100$ com malha $160x160$, $\theta=(\pi/4)$.



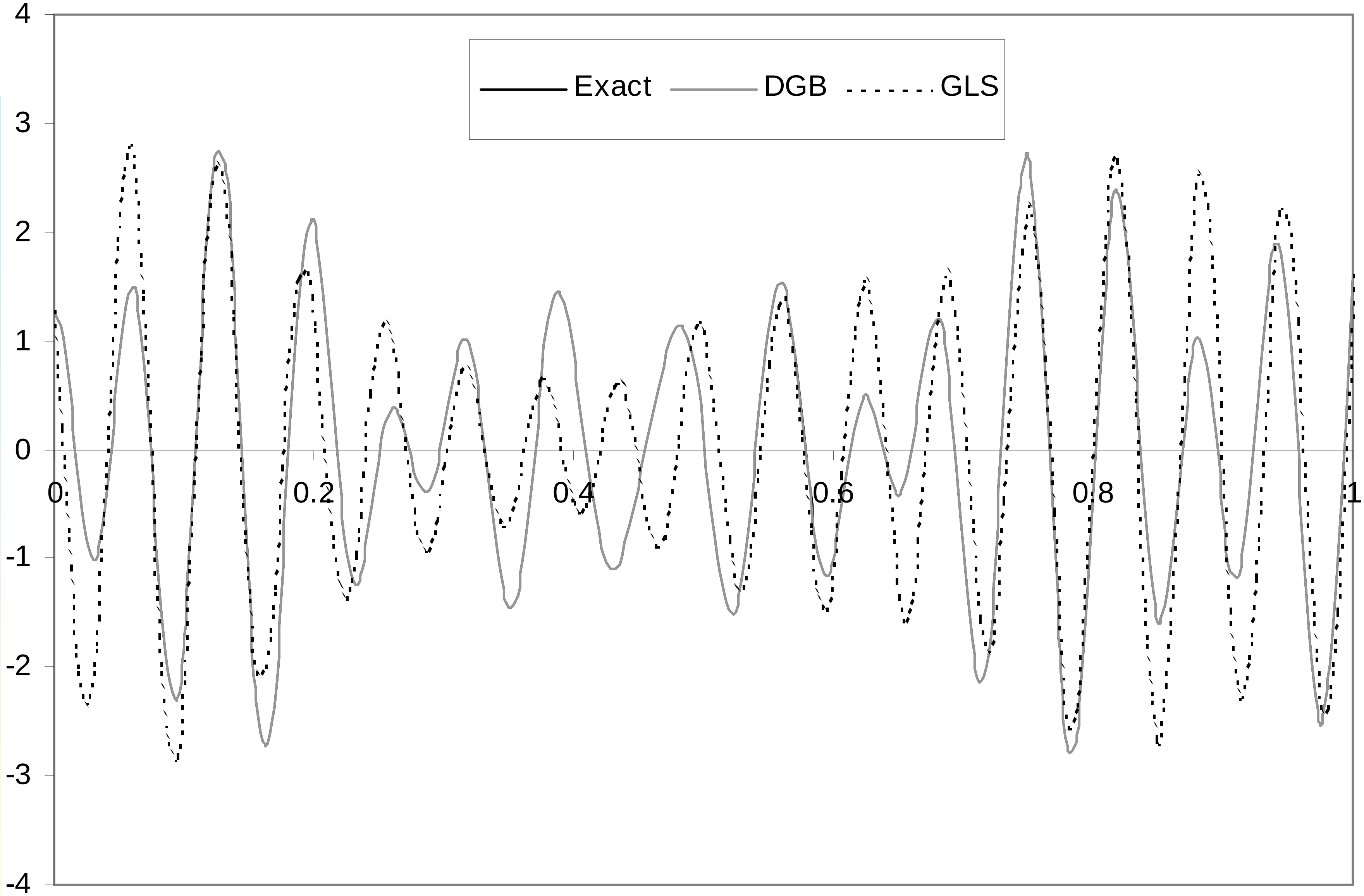
kh=0.625

Erro relativo das soluções DGB/GPR comparado com o interpolante continuo (CI), GLS e Quasi Stabilized Finite Element Method (QS) na norma L^2 e seminorma H^1 como função da direção θ para $k=100$ com malha *160x160*.

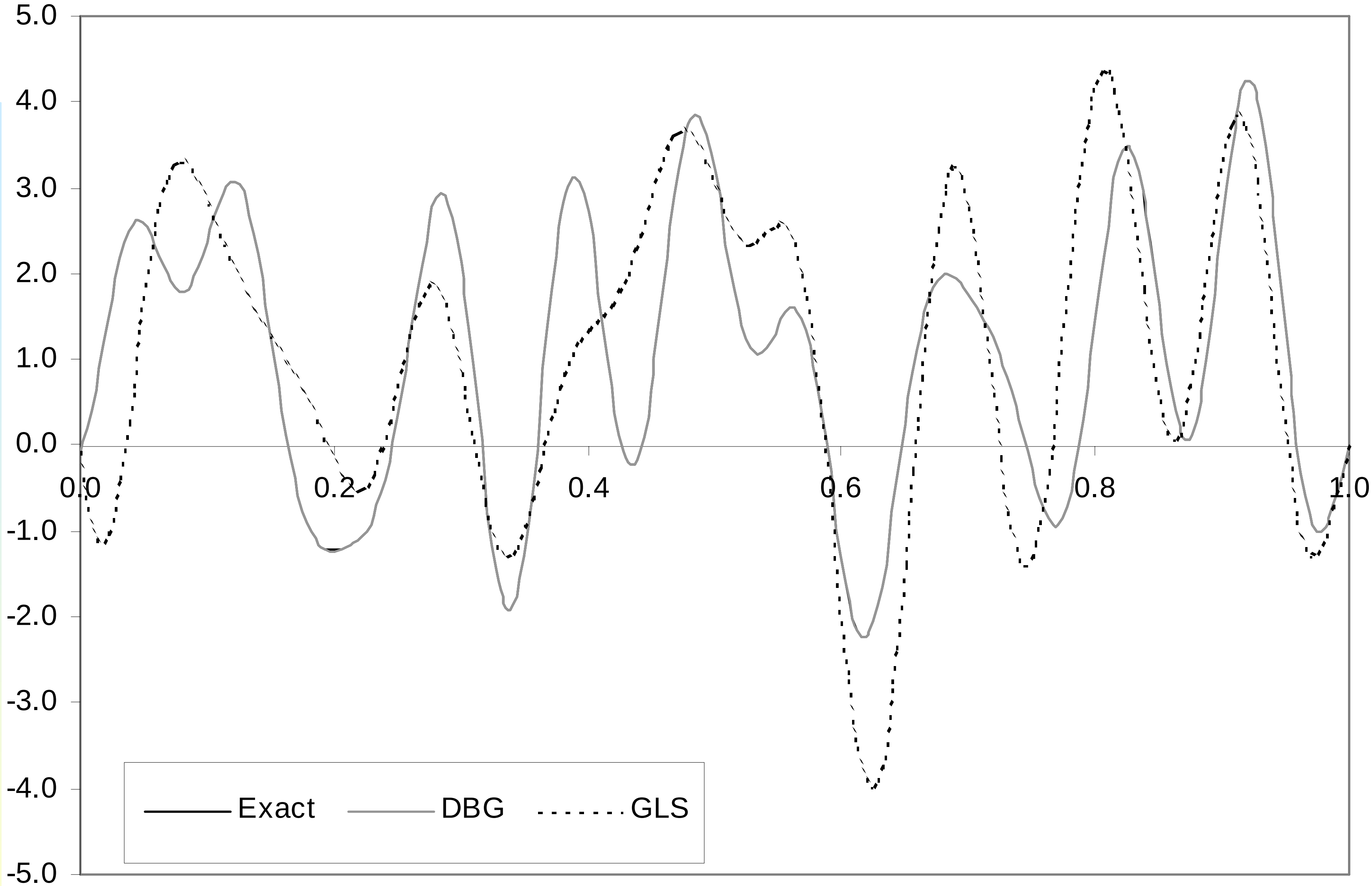
Exemplo similar ao anterior, mas agora a solução exata é dada por uma superposição de *n* ondas planas monoenergéticas que se propagam em *n* direções diferentes θ: $u(x,y)=\sum_{i=1}^{n}\cos(k(x\cos\theta_i + y\sin\theta_i))$.



Soluções DGB/GPR e GLS do problema homogêneo em duas dimensões na seção *x=0.5*, *k=100* com malha *160x160*, três ondas planas que se propagam nas direções $\theta_1 = 0,\ \theta_2 = \frac{\pi}{8},\ \theta_3 = \frac{\pi}{4}$.

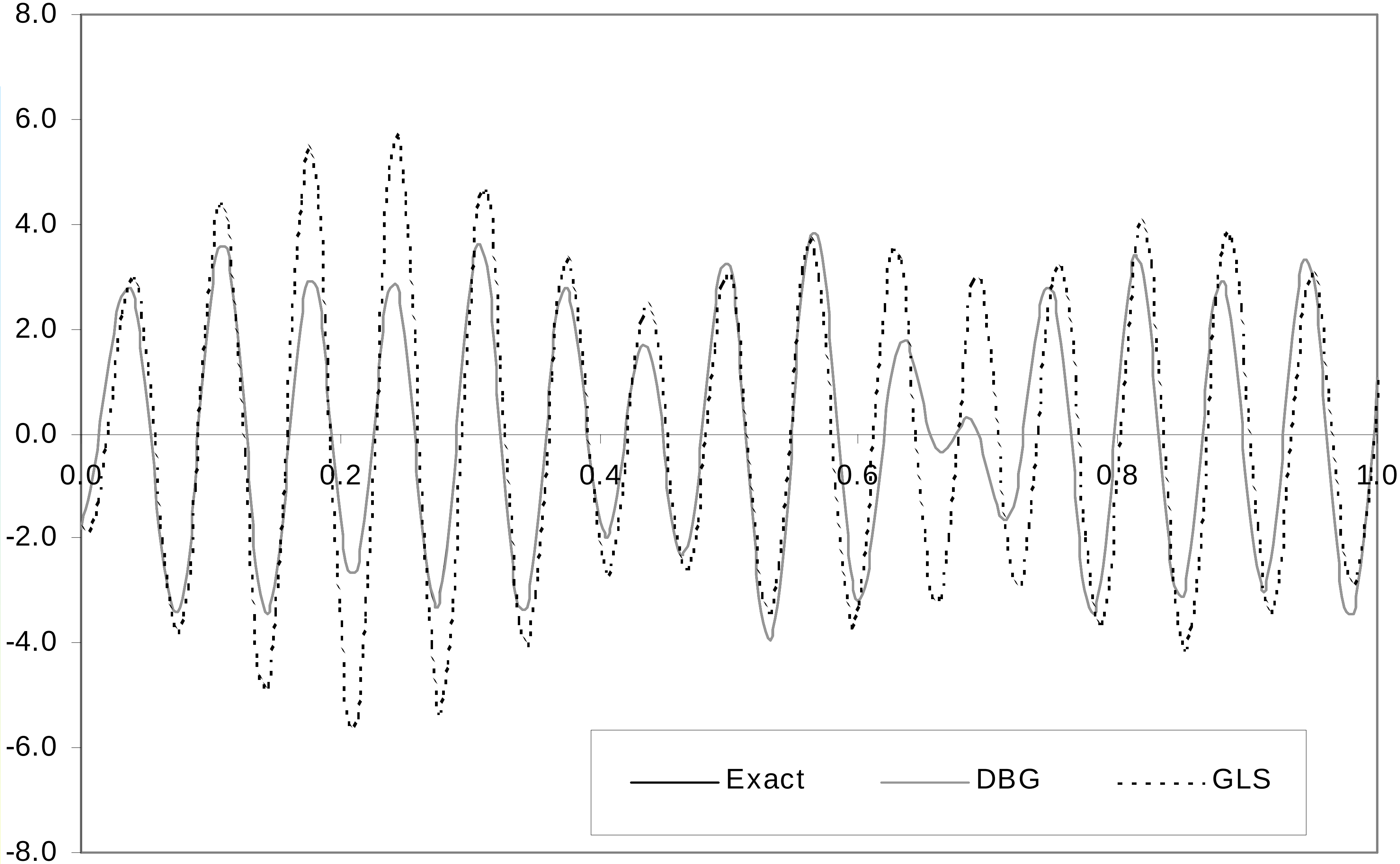


Soluções DGB/GPR e GLS do problema homogêneo em duas dimensões na seção *y=0.5*, *k=100* com malha *160x160*, três ondas planas que se propagam nas direções $\theta_1 = 0,\ \theta_2 = \frac{\pi}{8},\ \theta_3 = \frac{\pi}{4}$.



Soluções DGB/GPR e GLS do problema homogêneo em duas dimensões na seção *x=0.5*, *k=100* com malha *160x160*, seis ondas planas que se propagam nas direções

$$\theta_1 = 0,\ \theta_2 = \tfrac{\pi}{20},\ \theta_3 = \tfrac{\pi}{10},\ \theta_4 = \tfrac{3\pi}{20},\ \theta_5 = \tfrac{\pi}{5},\ \theta_6 = \tfrac{\pi}{4}$$



Soluções DGB/GPR e GLS do problema homogêneo em duas dimensões na seção *y=0.5*, *k=100* com malha *160x160*, seis ondas planas que se propagam nas direções

$$\theta_1 = 0,\ \theta_2 = \tfrac{\pi}{20},\ \theta_3 = \tfrac{\pi}{10},\ \theta_4 = \tfrac{3\pi}{20},\ \theta_5 = \tfrac{\pi}{5},\ \theta_6 = \tfrac{\pi}{4}$$

O DESAFIO!

- Desenvolver um Método de Elementos Finitos para a Equação de Helmholtz que seja linear ou não, contínuo ou não:

  - estável para número de onda médio e alto (freqüência media e baixa),

  - preciso para número de onda médio e alto (freqüência media e baixa).

- Este desafio, para os pesquisadores nesta área do conhecimento, é um problema que continua em aberto atualmente. Prova disto são a grande

Alguns Artigos Científicos

- L.L. Thompson, P.M. Pinsky, in: E. Stein, R. de Borst, T.J.R. Hughes (Eds.), Acoustics: Encyclopedia of Computational Mechanics, John Wiley & Sons, Ltd, 2004.
- A.F.D. Loula, G.B. Alvarez, E.G. Dutra do Carmo, F.A. Rochinha, A discontinuous finite element method at element level for Helmholtz equation, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 196 (2007) 867–878.
- F.A. Rochinha, G.B. Alvarez, E.G. Dutra do Carmo, A.F.D. Loula, A locally discontinuous enriched finite element formulation for acoustics, Commun. Numer. Methods Engrg. 23 (2007) 623–637.
- I. Harari, K. Gosteev, Bubble-based stabilization for the Helmholtz equation, Int. J. Numer. Methods Engrg. 70 (2007) 1241–1260.
- Theofanis Strouboulis, Ivo Babusˇka, Realino Hidajat, The generalized finite element method for Helmholtz equation: theory, computation, and open problems, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 195 (2006) 4711–4731.
- S. Marburg, B. Nolte Editors, Computactional Acoustics of Noise Propagation in Fluids: Finite and Boundary Elements Methods. Springer 2008, ISBN 978-3-540-77447-1.

Algumas Teses e Dissertações

- Mondher BENJEMAA, Étude et simulation numérique de la rupture dynamique des séismes par des méthodes d'éléments finis discontinus, Docteur en Sciences de l'Université de Nice-Sophia Antipolis - Spécialité: Mathématiques appliquées, UNIVERSITÉ DE NICE-SOPHIA ANTIPOLIS - UFR Sciences, École Doctorale Sciences Fondamentales et Appliquées, 2008.

- Daniel Thomes Fernandes, Métodos de Elementos Finitos e Diferenças Finitas para o Problema de Helmholtz, Doutor em Modelagem Computacional, Laboratório Nacional de Computação Científica, 2009.

- Quem se interessar por, Métodos estabilizados de elementos finitos para a equação de Helmholtz, Mestre em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia, EEIMVR/UFF, Previsão de Defesa 2 anos.

Conclusão

- Apresentamos para a Equação de Helmholtz os MEF de Galerkin, GLS – Galerkin Mínimos Quadrados e outros métodos estabilizados.

- Métodos de Galerkin, GLS e GPR são contínuos, enquanto métodos estabilizados como DG, DGB são descontínuos.

- Métodos contínuos demandam menos esforço computacional que métodos descontínuos.

- É impossível eliminar a poluição do erro com funções bases lineares e formulação contínua.

- O método GPR minimiza a poluição do erro e mostra grande potencial para problemas 3D.

Muito Obrigado.

– ***Agradecimentos***

O autor agradece à Agência Brasileira de Fomento à Pesquisa FAPERJ pelo suporte a este trabalho.