

Universidade Federal Fluminense

JEFERSON OSMAR DE ALMEIDA

**Solução Numérica por Diferenças Finitas em Malha
Estruturada Multibloco das Equações de
Navier-Stokes para Escoamento Compressível**

Volta Redonda

2015

JEFERSON OSMAR DE ALMEIDA

**Solução Numérica por Diferenças Finitas em Malha
Estruturada Multibloco das Equações de
Navier-Stokes para Escoamento Compressível**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia da Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia. Área de Concentração: Modelagem Computacional.

Orientador:

Prof. Diomar Cesar Lobão, Ph.D.

Coorientador:

Prof. Cleyton Senior Stampa, D.Sc.
Prof. Gustavo Benitez Alvarez, D.Sc.

UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

Volta Redonda

2015

A447 Almeida, Jeferson Osmar de.

Solução numérica por diferenças finitas em malha estruturada multibloco de equações de Navier-Stokes para escoamento compressível. / Jeferson Osmar de Almeida. – Volta Redonda, 2015.

80 f.

Dissertação (Mestrado em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia) – Universidade Federal Fluminense.

Orientador: Diomar Cesar Lobão.

Coorientador: Cleyton Senior Stampa; Gustavo Benitez Alvarez.

1. Equações de Navier-Stokes. 2. Coordenadas generalizadas. 3. Malhas estruturadas multibloco. 4. Método explícito de MacCormack. 5. Dinâmica dos fluidos computacional. I. Lobão, Diomar Cesar. II. Stampa, Cleyton Senior. III. Alvarez, Gustavo Benitez. IV. Título.

CDD 004

Solução Numérica por Diferenças Finitas em Malha Estruturada Multibloco das
Equações de Navier-Stokes para Escoamento Compressível

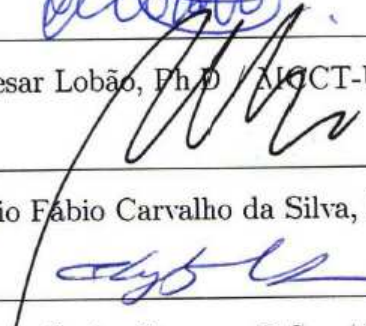
Jeferson Osmar de Almeida

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia da Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia. Área de Concentração: Modelagem Computacional.

Aprovada por:



Prof. Diomar Cesar Lobão, Ph.D / MCCT-UFF (Presidente)



Prof. Antonio Fabio Carvalho da Silva, D.Sc / UFSC



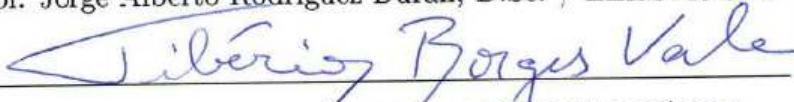
Prof. Cleyton Senior Stampa, D.Sc. / MCCT-UFF



Prof. Juan Diego Cardoso Brêttas, D.Sc. / EEIMVR-UFF



Prof. Jorge Alberto Rodriguez Durán, D.Sc. / EEIMVR-UFF



Prof. Tibério Borges Vale, D.Sc. / MCCT-UFF-PÁDUA

Volta Redonda, 3 de julho de 2015.

Dedicatoria. Aos meus pais e família

Agradecimentos

A minha família, em especial aos meus pais Lúcia e Antônio, ao meu irmão Anderson e minha irmã Jéssica.

A todos meus familiares que sempre ajudaram, apoiaram e acreditaram, em especial aos meus tios Carlos (Carlinhos) e Arminda (Cidinha), João, Terezinha, Renato, Danusa e Fátima (Fatinha) e a minha avó Belarminda.

Aos meus orientadores Prof. Lobão e Prof. Gustavo, que desde a graduação vem ajudando, ensinando e me orientando profissionalmente.

Ao Prof. Cleyton pelos ensinamentos em fenômenos de transporte.

A todos os professores da EEIMVR-UFF pelos ensinamentos.

A todos meus amigos da UFF, que sempre estiveram presentes colaborando, apoiando e incentivando.

Aos meus amigos de Arantina/MG e do montanhismo, que sempre apoiaram e acreditaram em mim, principalmente nos momentos em que não pude estar presente.

A UFF e a todos os seus funcionários.

A CAPES pelo suporte financeiro através da bolsa de mestrado.

Enfim, a todas as pessoas que ajudaram, apoiaram e acreditaram em mim durante a graduação e mestrado.

Resumo

As equações de Navier-Stokes modelam um grande número de problemas práticos, principalmente em projetos e sistemas de engenharia. Somente em casos muito simples é possível obter soluções analíticas para estas equações. Para a maioria dos problemas reais envolvendo o escoamento de fluidos, essas equações devem ser resolvidas através da dinâmica dos fluidos computacional. Portanto, é importante que o tratamento numérico utilizado seja confiável e que gere soluções numéricas satisfatórias.

A implementação de códigos computacionais para solução das equações de Navier-Stokes para escoamento compressível ainda apresenta grandes desafios no que se refere a discretização e implementação dessas equações em coordenadas generalizadas para escoamento em geometrias complexas.

Portanto, o objetivo deste trabalho foi implementar um código computacional capaz de resolver as equações de Navier-Stokes em coordenadas generalizadas para escoamento compressível transiente e permanente em regime subsônico e supersônico em geometrias complexas bidimensionais. A solução numérica foi através do método de diferenças finitas explícito de MacCormack e com a utilização de malha estruturada multibloco.

Através dessa metodologia foi possível obter soluções numéricas satisfatórias, onde inicialmente o código computacional foi validado através do escoamento laminar em um canal, do escoamento laminar sobre um degrau descendente (*backward facing step*) e do escoamento sobre uma rampa curva. Após esse processo de validação, foi implementado um código computacional capaz de obter soluções para o escoamento compressível em uma geometria complexa bidimensional utilizando a técnica de multibloco.

Abstract

The Navier-Stokes equations model a big number of practical problems, mainly in projects and engineering systems. Only in very simple cases it is possible to get analytical solutions for these equations. For most real problems involving fluid flow, these equations should be resolved through computational fluid dynamics. Therefore, it is important that the numeric treatment utilized is reliable and that generates satisfactory numerical solutions.

The implementation of computational codes for the solution of Navier-Stokes equations for compressible flow still contains challenges regarding to the discretization and implementation of these equations in generalized coordinates to flow in complex geometries.

Therefore, the goal of this work was to implement a computational code able to solve the Navier-Stokes equations in generalized coordinates for transient and permanent compressible flow in subsonic and supersonic regime in two-dimensional complex geometries. The numeric solution was through explicit finite difference method of MacCormack and with a use of multiblock structured mesh.

Through this methodology was possible to obtain satisfactory numerical solutions, where initially the computational code was validated through the laminar flow in a channel, and the flow over a backward facing step and flow over a curved ramp. After this process of validation, we implemented a computational code able to get solutions for compressible flow in two-dimensional complex geometry making usage of multi-block technique.

Palavras-chave

1. Equações de Navier-Stokes
2. Coordenadas Generalizadas
3. Malhas Estruturadas Multibloco
4. Método Explícito de MacCormack
5. Dinâmica dos Fluidos Computacional

Glossário

- CFD : Computational Fluid Dynamics
- CFL : Número de Courant-Friedrichs-Lewy
- MDF : Método das Diferenças Finitas
- MEF : Método dos Elementos Finitos
- MVF : Método dos Volumes Finitos

Sumário

Lista de Símbolos	x
1 Introdução	13
1.1 Justificativas	14
1.2 Objetivo Geral	16
1.3 Objetivos Específicos	16
1.4 Metodologia	17
1.5 Organização do trabalho	17
2 As Equações de Navier-Stokes para Escoamento Compressível	19
2.1 Leis de Conservação	19
2.1.1 Princípio da Conservação da Massa	19
2.1.2 Princípio de Conservação da Quantidade de Movimento	20
2.1.3 Princípio da Conservação de Energia	21
2.2 Forma Conservativa das Equações de Navier-Stokes para Escoamento Compressível	23
2.3 Classificação do Escoamento Compressível	26
2.4 Escoamento sobre uma geometria irregular	27
3 Solução Numérica	29
3.1 Aproximação por Diferenças Finitas	29
3.2 Coordenadas Generalizadas	32
3.3 Geração de Malhas	37

3.4	Malhas estruturadas multibloco	40
3.5	Equações de Navier-Stokes em coordenadas generalizadas	42
3.6	Método Original de MacCormack	44
3.7	Condição CFL e o passo de tempo	45
3.8	Condições de Contorno	46
3.9	Diagrama do algoritmo computacional	49
4	Resultados e Discussões	51
4.1	Escoamento laminar em um canal	51
4.2	Escoamento sobre um degrau descendente	57
4.3	Escoamento sobre uma rampa curva	62
4.4	Escoamento sobre uma geometria irregular	68
5	Conclusões e Trabalhos Futuros	77
5.1	Conclusões	77
5.2	Trabalhos Futuros	78
	Referências	79

Lista de Símbolos

A, B matriz jacobiana de transformação de coordenadas;

a_j, b_i, c_j, d_i termos da equação dos termos fontes;

c velocidade do som;

CFL número de Courant-Friedrichs-Lewy;

e energia interna por unidade de volume;

E_t energia total por unidade de volume;

E_{inv}, F_{inv} vetores de fluxo não-viscoso;

E_{vis}, F_{vis} vetores de fluxo viscoso;

$\hat{E}_{inv}, \hat{F}_{inv}$ vetores de fluxo não-viscoso em coordenadas generalizadas;

$\hat{E}_{vis}, \hat{F}_{vis}$ vetores de fluxo viscoso em coordenadas generalizadas;

f função contínua;

f força de corpo;

$g_{i,j}$ tensor métrico;

g força da gravidade;

h altura do canal a montante;

H altura do degrau;

J jacobiano da transformação;

l comprimento de referência;

L comprimento do tubo;

L_d comprimento do canal a jusante;

L_u comprimento do canal a montante;

M número de Mach;

O erro de truncamento;

p pressão;

P, Q termos fontes;

q fluxo de calor;

Q vetor das variáveis conservadas;

\hat{Q} vetor das variáveis conservadas em coordenadas generalizadas;

r raio interno do canal de entrada;

Re número de Reynolds;

S altura do canal a jusante;

t tempo;

U_b velocidade mensurada;

U_{max} velocidade máxima de entrada;

u, v, w componentes cartesianas da velocidade;

U, V componentes da velocidade contravariante;

\hat{V} vetor velocidade;

W largura do canal;

x_r comprimento de recirculação;

x, y, z coordenadas cartesianas;

ξ, η coordenadas generalizadas;

ρ densidade do fluido;

μ coeficiente de viscosidade dinâmica;

ν coeficiente de viscosidade cinemática;

γ relação entre calores específicos;

δ_{ij} Delta de Kronecker;

τ_{ij} componentes viscosas do tensor tensão;

Π_{ij} tensor tensão de Cauchy;

∇ vetor gradiente;

Δ diferença ou intervalo;

Δt passo de tempo;

SUBSCRITOS E SUPERESCRITOS:

$\mathbf{0}$ condição inicial;

$\mathbf{B1}, \mathbf{B2}$ bloco 1, bloco 2;

$*$ variável adimensional;

∞ quantidade de fluxo livre;

i, j índices da malha estruturada;

inv, vis índices para termos viscosos e não-viscosos;

x, y, z componentes nas direções x, y , domínio cartesiano;

ξ, η componentes nas direções ξ e η , domínio generalizado;

F domínio físico;

M, N M-ésima e N-ésima iteração;

n passo de tempo;

T domínio transformado ou computacional;

Capítulo 1

Introdução

O escoamento de fluidos tem uma grande aplicação prática, estando presente em diversas áreas, principalmente na engenharia. Possui aplicações na indústria aeronáutica e aeroespacial, nos diversos processos de produção de energia, na dispersão de poluentes, na indústria de petróleo e em outras, etc [1]. O escoamento de fluidos é modelado pelas equações da dinâmica dos fluidos, que é um sistema de equações que inclui a equação da continuidade (*Princípio de Conservação de Massa*), as equações de quantidade de movimento (*Segunda Lei de Newton*) e a equação da energia (*Princípio de Conservação de Energia*), onde é possível, a partir deste sistema, determinar a velocidade, a densidade, a pressão e a energia interna em qualquer ponto do domínio do escoamento. Entretanto, para a solução deste sistema de equações é necessário que o número de incógnitas seja no máximo igual ao de equações. Então, é necessária a utilização de uma relação de estado das propriedades termodinâmicas para completar esse sistema de equações.

As chamadas equações de Navier-Stokes são formadas pelo sistema de equações de quantidade de movimento. Entretanto, é comum incluir nesse sistema a equação da continuidade, a equação de energia e uma equação de estado [2].

A maioria dos projetos de engenharia que envolvem o escoamento de fluidos podem ser analisados de duas maneiras, através da experimentação e de cálculo numérico. A primeira alternativa geralmente envolve a construção de protótipos, enquanto a segunda é através da solução analítica ou computacional das equações diferenciais [3].

Neste trabalho, a abordagem será através do cálculo numérico, utilizando a Dinâmica dos Fluidos Computacional (*CFD - Computational Fluid Dynamics*), que é a área de estudos dedicada a solução computacional das equações da dinâmica dos fluidos por meio de métodos numéricos.

1.1 Justificativas

As equações de Navier-Stokes são equações diferenciais parciais não lineares e as soluções analíticas só são obtidas para casos mais simples, geralmente com escoamento de fluidos de baixa velocidade, fluxo laminar e estado estacionário. Para a maioria dos problemas práticos, a obtenção das soluções são difíceis ou ainda impossíveis [3].

Portanto, para casos mais complexos, onde ainda não é possível obter as soluções das equações analiticamente ou o estudo experimental é impossível ou de custo muito elevado, o uso da dinâmica dos fluidos computacional para obtenção das soluções é uma ótima alternativa, pois pode gerar ótimos resultados para muitos problemas práticos.

Existem vários métodos numéricos bastante eficientes em dinâmica dos fluidos computacional e, dentre eles, os mais utilizados são o método das diferenças finitas (MDF), o método dos elementos finitos (MEF) e o método dos volumes finitos (MVF). Entretanto, apesar da eficiência destes métodos numéricos, os resultados obtidos podem apresentar problemas devido a vários fatores, tais como erro na modelagem matemática, geração inadequada da malha e aplicação incorreta das condições de contorno e dos parâmetros do escoamento.

Para simulação numérica de problemas de escoamento de fluidos é muito comum a utilização do método das diferenças finitas. Entretanto, a utilização deste método para a solução das equações de Navier-Stokes ainda apresenta diversos desafios, como na discretização e implementação das equações em coordenadas generalizadas e na geração e adaptação de malhas para geometrias mais complexas através da utilização da técnica de multibloco [4] [5].

A aplicação do método das diferenças finitas para solução de problemas de escoamento de fluidos em geometrias complexas utilizando coordenadas ortogonais apresenta diversas dificuldades, especialmente devido a aplicação das condições de contorno [1]. Com o uso das coordenadas generalizadas é possível aplicar o método das diferenças finitas a escoamento de fluidos em geometrias complexas de maneira muito mais simples.

A geração da malha é uma etapa de grande importância na solução de problemas em dinâmica dos fluidos computacional, pois uma malha de baixa qualidade pode levar a uma solução fisicamente incorreta [1]. Para a obtenção de resultados satisfatórios através da simulação numérica é necessário que a malha seja de alta qualidade, sendo o mais ortogonal possível e com um refinamento apropriado em todo o domínio.

As malhas podem ser estruturadas e não-estruturadas. As malhas estruturadas tem a vantagem de possuírem uma regra de ordenação em seus elementos, o que simplifica a implementação do código computacional, diferentemente do que ocorre com as malhas não-estruturadas, que apesar de serem mais versáteis, não possuem uma regra de ordenação, havendo a necessidade da matriz de conectividade [1].

A geração de malhas estruturadas pode ser realizada por métodos manuais ou automáticos. O método manual é mais simples, entretanto pode ser muito trabalhoso e inviável para muitos casos, principalmente em malhas tridimensionais. Então, os métodos automáticos de geração de malhas são requeridos em muitos casos, sendo classificados em algébricos e diferenciais. A geração de malhas através dos métodos diferenciais são mais gerais, sendo o que utiliza as equações diferenciais elípticas um dos mais utilizados em problemas bidimensionais, pois este possibilita o ajuste de linhas nos locais de maior interesse [1] [4].

Apesar das vantagens na geração de malhas estruturadas através das equações diferenciais elípticas, em muitos casos somente o uso desta técnica não é suficiente para obter um refinamento apropriado da malha em todo o domínio, principalmente em geometrias mais complexas. Então, para melhorar a qualidade da malha, pode ser utilizada a técnica de multiblocos, que consiste em dividir o domínio em subdomínios e, dentro de cada subdomínio, gerar uma malha estruturada através das equações diferenciais elípticas. Assim, através da utilização desta técnica de multibloco é possível obter uma malha de alta qualidade para diversas geometrias complexas [4] [5].

Mesmo com as facilidades e o baixo custo das simulações numéricas quando comparado com os métodos experimentais, tais como os ensaios em túneis de vento, os resultados experimentais ainda são muito utilizados principalmente para validação de códigos computacionais, onde as análises experimentais e a dinâmica dos fluidos computacional se complementam [3]. Assim, sempre que possível os resultados obtidos computacionalmente devem ser comparados com os resultados experimentais.

Porém, quando não é possível realizar uma comparação entre os resultados computacionais e experimentais, o código computacional deve ser submetido a um processo de validação através da utilização de casos testes que possuem similaridades com o problema a ser resolvido. Além das similaridades, os casos testes também precisam possuir soluções analíticas ou uma boa quantidade de resultados experimentais e numéricos.

1.2 Objetivo Geral

O objetivo geral deste trabalho é desenvolver um código computacional capaz de resolver as equações de Navier-Stokes para escoamento compressível transiente e permanente em regime subsônico e supersônico em geometrias complexas bidimensionais.

1.3 Objetivos Específicos

Existem diversos métodos capazes de resolver as equações de Navier-Stokes para escoamento compressível em geometrias complexas bidimensionais. Para a escolha do método numérico, pode-se optar pelo método das diferenças finitas, pelo método dos elementos finitos e pelo método dos volumes finitos. Já para a escolha do tipo de malha, pode-se optar pelo tipo estruturada ou não-estruturada, podendo ainda a malha ser gerada por métodos manuais ou automáticos. Além disso, pode-se optar por utilizar coordenadas ortogonais ou generalizadas.

Como pode ser observado, existem diversas opções para a implementação computacional das equações. Dentre estas diversas opções, serão utilizadas as melhores em termos de facilidade e eficiência, sendo então divididas em objetivos específicos do presente trabalho, como segue abaixo:

1. Equacionamento bidimensional das equações de Navier-Stokes em coordenadas generalizadas;
2. Discretização pelo método das diferenças finitas;
3. Geração de malhas estruturadas multibloco;
4. Implementação do código computacional em coordenadas generalizadas para malhas estruturadas multibloco;
5. Validação do código computacional através de casos testes.

Para atingir estes objetivos específicos e conseqüentemente o objetivo geral, que é a solução numérica das equações de Navier-Stokes para escoamento compressível em geometrias complexas bidimensionais, será estudado e discutido diversas opções numéricas para a implementação computacional das equações da dinâmica dos fluidos.

1.4 Metodologia

Para solução numérica das equações de Navier-Stokes para escoamento compressível será utilizado o Método Original de MacCormack de segunda ordem no espaço e no tempo [6]. É um método explícito de dois estágios que utiliza o método das diferenças finitas, sendo de implementação mais simples e com critérios de estabilidades mais restritivos quando comparado com os métodos implícitos [2].

Por aplicar o método das diferenças finitas para solução das equações, para facilitar a implementação do código computacional, a discretização será coincidente com a fronteira e a solução das equações diferenciais elípticas de geração de malha e das equações da dinâmica dos fluidos serão resolvidas no domínio computacional, isto é, no sistema de coordenadas generalizadas [1] [4]. Para obtenção de uma malha de boa qualidade, será utilizada a técnica de multiblocos, permitindo um refinamento de qualidade em todo o domínio da malha.

A validação do código computacional será realizada através do escoamento laminar em um canal [5], do escoamento sobre um degrau descendente [7] [8] [9] [10] e do escoamento sobre uma rampa curva [11] [12] [13], que são casos testes utilizados na literatura para validação de códigos computacionais. O primeiro e o segundo caso teste são escoamentos subsônicos, enquanto o terceiro é supersônico.

Após a validação do código computacional, este será aplicado na solução de um problema de escoamento de fluido em uma geometria irregular, onde será possível entender a necessidade de geração da malha através da solução das equações diferenciais elípticas e da utilização da técnica de multiblocos para obtenção de uma solução de qualidade.

1.5 Organização do trabalho

Este trabalho está dividido em cinco capítulos, onde neste primeiro capítulo é realizada uma introdução da Dinâmica dos Fluidos Computacional, assim como a importância da solução numérica das equações da dinâmica dos fluidos. Além disso, são introduzidas as diversas técnicas em CFD para obtenção de soluções de qualidade.

No Capítulo 2 tem-se a formulação diferencial das equações de Navier-Stokes em coordenadas cartesianas, onde estas equações são analisadas fisicamente e matematicamente a partir das leis de conservação da mecânica. Após essa análise inicial, as equações são formuladas na forma conservativa. No final do capítulo é introduzido um problema de

escoamento de fluidos em uma geometria complexa a ser resolvido.

O Capítulo 3 é destinado ao desenvolvimento detalhado da metodologia para a solução numérica das equações de Navier-Stokes. Neste capítulo desenvolve-se a transformação de coordenadas cartesianas em generalizadas. Após a transformação, são formuladas as equações de Navier-Stokes e as equações diferenciais elípticas de geração de malhas em coordenadas generalizadas. Também é explicado com mais detalhes a técnica de multibloco. Finalmente, é apresentado o método explícito de MacCormack com suas vantagens e desvantagens assim como as condições de contorno adotadas.

No Capítulo 4 tem-se inicialmente a validação do código computacional através do escoamento laminar em um canal, do escoamento sobre um degrau descendente e do escoamento sobre uma rampa curva, onde em cada caso teste é realizado uma revisão bibliográfica, uma análise do problema e depois comparações dos resultados deste trabalho com os obtidos na literatura. Após esse processo de validação, é apresentado e analisado o resultado para o escoamento de fluido em uma geometria complexa dado no capítulo 2. Em todos estes casos é apresentado como foi realizada a troca de informações entre os blocos.

As conclusões e propostas de trabalhos futuros são apresentadas no Capítulo 5.

Capítulo 2

As Equações de Navier-Stokes para Escoamento Compressível

As equações da dinâmica dos fluidos modelam um grande número de problemas de escoamento de fluidos de enorme interesse acadêmico e econômico. Conforme algumas características, o escoamento pode ser classificado como interno ou externo, viscoso ou não viscoso, compressível ou incompressível e turbulento ou laminar [2] [3] [14].

Estas equações estabelecem relações entre as taxas de variação das variáveis de interesse, como velocidade, densidade, pressão, temperatura e energia. Uma análise diferencial destas equações diferenciais envolve a aplicação das mesmas em todos os pontos no campo de escoamento sobre uma região chamada de domínio de escoamento. Quando resolvidas, estas equações fornecem detalhes sobre suas variáveis em cada ponto do domínio do escoamento [2] [3] [14].

2.1 Leis de Conservação

As equações diferenciais da dinâmica dos fluidos são equações diferenciais parciais não-lineares e são obtidas através dos princípios básicos da conservação de massa, conservação de quantidade de movimento e conservação de energia.

2.1.1 Princípio da Conservação da Massa

O Princípio da Conservação de Massa pode ser expresso como a variação da quantidade de massa dentro do volume de controle deve ser igual a massa que atravessa o volume de controle durante Δt [3].

Este princípio quando aplicado a um fluido passando através de um volume de controle infinitesimal fixo resulta na Equação da Continuidade [2],

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \hat{\mathbf{V}}) = 0 \quad (2.1)$$

onde ρ é a densidade do fluido e $\hat{\mathbf{V}}$ é o vetor velocidade.

O primeiro termo desta equação representa a taxa de aumento de densidade em um volume de controle e o segundo termo representa a taxa do fluxo de massa passando para fora da superfície de controle por unidade de volume [2].

2.1.2 Princípio de Conservação da Quantidade de Movimento

O Princípio de Conservação da Quantidade de Movimento, que é a Segunda Lei de Newton, pode ser enunciada como a taxa de variação temporal da quantidade de movimento do fluido é igual à força resultante que atua sobre o fluido [3].

Este princípio aplicado a um fluido passando através de um volume de controle infinitesimal fixo gera a Equação de Quantidade de Movimento [2],

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \hat{\mathbf{V}}) + \nabla \cdot \rho \hat{\mathbf{V}} \hat{\mathbf{V}} = \rho \mathbf{f} + \nabla \cdot \Pi_{ij} \quad (2.2)$$

Para a parte esquerda da equação, o primeiro termo representa a taxa de aumento de quantidade de movimento (por unidade de volume) em um volume de controle, enquanto o segundo termo representa a taxa de quantidade de movimento perdida por convecção por unidade de volume através de uma superfície de controle [2].

O primeiro termo da parte direita da equação é a força de corpo por unidade de volume, sendo que em muitos casos práticos esta força de corpo é igual a força da gravidade [2],

$$\rho \mathbf{f} = \rho \mathbf{g} \quad (2.3)$$

onde \mathbf{f} é a aceleração de corpo e \mathbf{g} é a aceleração da gravidade.

O segundo termo da parte direita da equação representa as forças de superfícies por unidade de volume, que são representadas a partir do tensor tensão de Cauchy Π_{ij} [2].

Estas forças de superfície são aplicadas na superfície de um elemento fluido e formam as tensões cisalhantes e as tensões normais, que em conjunto formam o tensor tensão de

Cauchy Π_{ij} . Para fluido newtoniano, pode ser expresso separadamente por [2],

$$\Pi_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij} \quad (2.4)$$

onde τ_{ij} são as componentes do tensor de tensão viscoso, p é a pressão e δ_{ij} é o delta de Kronecker.

Essas componentes viscosas do tensor tensão são geralmente escritas da seguinte forma para o caso tridimensional [2]:

$$\begin{aligned} \tau_{xx} &= \frac{2}{3}\mu \left(2\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\ \tau_{yy} &= \frac{2}{3}\mu \left(2\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\ \tau_{zz} &= \frac{2}{3}\mu \left(2\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ \tau_{xy} &= \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \tau_{yx} \\ \tau_{xz} &= \mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \tau_{zx} \\ \tau_{yz} &= \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = \tau_{zy} \end{aligned} \quad (2.5)$$

onde μ é o coeficiente de viscosidade dinâmica, u , v e w são as componentes do vetor velocidade, τ_{xx} , τ_{yy} e τ_{zz} são as componentes normais do tensor tensão e $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ e $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ são as componentes cisalhantes do tensor tensão.

No presente trabalho as componentes em z são omitidas por tratar de situações bidimensionais.

2.1.3 Princípio da Conservação de Energia

O Princípio da Conservação de Energia, conhecida como Primeira Lei da Termodinâmica, afirma que a energia não pode ser criada e nem destruída durante um processo, ela só pode mudar de forma [3].

Aplicando este princípio a um fluido passando através de um volume de controle

infinitesimal fixo tem-se a Equação da Energia [2],

$$\frac{\partial E_t}{\partial t} + \nabla \cdot E_t \hat{\mathbf{V}} = \frac{\partial Q}{\partial t} - \nabla \cdot \mathbf{q} + \rho \mathbf{f} \cdot \hat{\mathbf{V}} + \nabla \cdot (\Pi_{ij} \cdot \hat{\mathbf{V}}) \quad (2.6)$$

sendo a energia total por unidade de volume E_t dada por

$$E_t = \rho \left(e + \frac{|\hat{\mathbf{V}}|^2}{2} + \text{EnergiaPotencial} + \dots \right) \quad (2.7)$$

e o fluxo de calor \mathbf{q} dado pela Lei de Fourier

$$\mathbf{q} = -k \nabla T \quad (2.8)$$

onde e é a energia interna por unidade de massa, k é o coeficiente de condutividade térmica e T é a temperatura. No presente trabalho $\mathbf{q} = 0$, assumindo escoamento isotérmico.

O primeiro termo da parte esquerda da equação (2.6) representa a taxa de aumento de energia total por unidade de volume em um volume de controle, enquanto o segundo termo representa a taxa de energia total perdida por convecção por unidade de volume através de uma superfície de controle [2].

Na parte direita da equação, o primeiro termo representa a taxa de calor produzida por unidade de volume por agentes externos, o segundo termo é a taxa de calor perdida por condução por unidade de volume através da superfície de controle, enquanto o terceiro termo representa o trabalho realizado por unidade de volume em um volume de controle pelas forças de corpo e o quarto termo representa o trabalho realizado por unidade de volume em um volume de controle pelas forças de superfície [2].

Na equação de energia total por unidade de volume (2.7) a energia potencial é desprezível pois se trata de um escoamento laminar e z não varia significativamente.

Como já mencionado no capítulo anterior, as chamadas equações de Navier-Stokes se referem ao sistema de equações de quantidade de movimento. Entretanto é comum incluir as equações da continuidade, a equação de energia e uma equação de estado nesse sistema de equações de quantidade de movimento [2].

2.2 Forma Conservativa das Equações de Navier-Stokes para Escoamento Compressível

Para facilitar a implementação computacional do método numérico para resolução das equações da dinâmica dos fluidos, é conveniente combinar todas as equações em uma forma compacta, isto é, na forma conservativa [2].

As equações de Navier-Stokes para escoamento compressível bidimensional em coordenadas cartesianas sem forças de corpo ou adição externa de calor podem ser escritas na forma conservativa da seguinte forma [15]:

$$\partial_t \mathbf{Q} + \partial_x \mathbf{E}_{inv} + \partial_y \mathbf{F}_{inv} = Re^{-1}(\partial_x \mathbf{E}_{vis} + \partial_y \mathbf{F}_{vis}) \quad (2.9)$$

onde

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E_t \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

$$\mathbf{E}_{inv} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ u(E_t + p) \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

$$\mathbf{F}_{inv} = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ v(E_t + p) \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

$$\mathbf{E}_{vis} = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{xy} \\ u\tau_{xx} + v\tau_{xy} \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

$$\mathbf{F}_{vis} = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yy} \\ u\tau_{xy} + v\tau_{yy} \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

onde as tensões viscosas são

$$\begin{cases} \tau_{xx} = \mu \left(4 \frac{\partial u}{\partial x} - 2 \frac{\partial v}{\partial y} \right) / 3 \\ \tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \tau_{yy} = \mu \left(-2 \frac{\partial u}{\partial x} + 4 \frac{\partial v}{\partial y} \right) / 3 \end{cases} \quad (2.15)$$

Nas equações (2.10) a (2.14), a primeira linha do vetor corresponde a equação da continuidade, a segunda e terceira linha correspondem as equações de quantidade de movimento e a quarta linha à equação de energia.

Este sistema de equações está escrito com os termos não viscosos separados dos termos viscosos, onde os termos com subscrito *inv* denotam os termos não viscosos (ou invíscidos), enquanto os termos com o subscrito *vis* denotam os termos viscosos. Como será visto posteriormente, esta separação torna mais fácil a implementação computacional do método numérico para obtenção das soluções numéricas.

Para fechar o sistema de equações da dinâmica dos fluidos, é necessário estabelecer uma relação entre as variáveis termodinâmicas com as variáveis de transporte, pois se tem quatro equações com cinco incógnitas (ρ, u, v, E_t, p).

Neste caso, assumindo que o fluido segue as leis dos gases ideais, estabelece a seguinte equação de estado [2]:

$$p = (\gamma - 1)\rho e \quad (2.16)$$

logo,

$$p = (\gamma - 1) \left(E_t - \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2) \right) \quad (2.17)$$

onde γ é a relação entre calores específicos.

Com a equação de estado (2.16), completa-se o sistema de equações da dinâmica dos fluidos, tornando possível a sua solução numérica.

Algumas relações também são bastante importantes no tratamento numérico das equações da dinâmica dos fluidos. Trata-se da velocidade do som, do número de Mach e do número de Reynolds.

A velocidade do som em um gás ideal pode ser dada por:

$$c = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}} \quad (2.18)$$

O número de Reynolds Re e o número de Mach M são dados, respectivamente, por

$$Re = \frac{\rho l u}{\mu} \quad (2.19)$$

$$M = \frac{u}{c} \quad (2.20)$$

onde u é a velocidade na direção do escoamento e l é um comprimento de referência.

Para escoamentos não viscoso, os termos viscosos \mathbf{E}_{vis} e \mathbf{F}_{vis} são excluídos das equações. Este sistema de equações (2.10) a (2.16), sem os termos viscosos, é conhecido como as Equações de Euler.

A adimensionalização das variáveis é realizada para eliminar os problemas de ordem de escala e são adimensionalizadas da seguinte forma [2],

- Tempo adimensional:

$$t^* = \frac{t u_\infty}{l_\infty} \quad (2.21)$$

- Densidade adimensional:

$$\rho^* = \frac{\rho}{\rho_\infty} \quad (2.22)$$

- Velocidades adimensionais:

$$u^* = \frac{u}{u_\infty}, \quad v^* = \frac{v}{u_\infty} \quad (2.23)$$

- Pressão adimensional:

$$p^* = \frac{p}{\rho_\infty u_\infty^2} \quad (2.24)$$

- Energia adimensional:

$$E_t^* = \frac{E_t}{\rho_\infty u_\infty^2} \quad (2.25)$$

- Coeficiente de viscosidade adimensional:

$$\mu^* = \frac{\mu}{\mu_\infty} \quad (2.26)$$

- Velocidade do som em um gás ideal:

$$c_\infty = \sqrt{\gamma \frac{p_\infty}{\rho_\infty}} \quad (2.27)$$

- Número de Reynolds:

$$Re = \frac{\rho_\infty l_\infty u_\infty}{\mu_\infty} \quad (2.28)$$

- Número de Mach:

$$M = \frac{u_\infty}{c_\infty} \quad (2.29)$$

Nas expressões acima, o subscrito ∞ se refere a quantidade de fluxo livre e o superescrito $*$ se refere as variáveis adimensionalizadas.

Para simplificar o desenvolvimento das equações, o superescrito $*$ será descartado, pois as equações são invariantes a estas transformações [2].

2.3 Classificação do Escoamento Compressível

O escoamento compressível pode ser classificado em termos de número de Mach M , conforme abaixo [3]:

- Escoamento subsônico: são escoamentos que ocorrem para $M < 1.0$;
- Escoamento supersônico: são escoamentos que ocorrem para $M > 1.0$;
- Escoamento hipersônico: são escoamentos que ocorrem para $M \gg 1.0$.
- Escoamento transônico: são escoamentos que ocorrem para $M \cong 1.0$;

Neste trabalho foram tratados problemas de escoamento subsônico e supersônico.

2.4 Escoamento sobre uma geometria irregular

Para o escoamento de um fluido sobre uma geometria irregular, considere a geometria da Figura 2.1. Como pode ser observado, é uma geometria complexa bidimensional devido a região da base $\overline{ABCDEFG}$. Portanto, deverá ser dada bastante atenção a essa região durante o tratamento numérico.

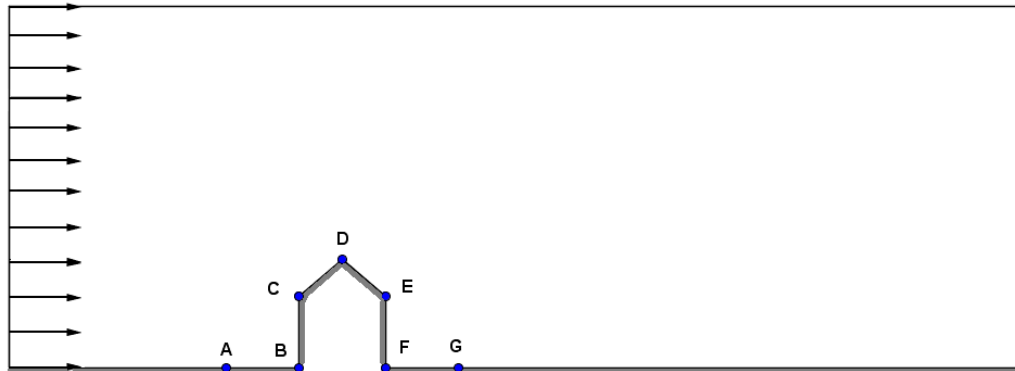


Figura 2.1: Escoamento subsônico sobre uma geometria irregular

O escoamento sobre essa geometria da Figura 2.1 é caracterizado como transiente, laminar, subsônico, não viscoso e sem forças de corpo ou adição de calor, podendo então ser modelado matematicamente pelas equações (2.9) a (2.14) e pela equação de estado (2.16), isto é, pelas equações de Euler.

As condições iniciais são especificadas nas variáveis conservativas do vetor \mathbf{Q} no instante $t = 0$. Para as condições de contorno, observando a Figura 2.1, a base da geometria é sólida, impermeável e sem atrito viscoso, enquanto a parte superior e a saída do escoamento são livres. A entrada de fluido na geometria é constante, onde para a velocidade

do fluido temos $u = u_0$ e $v = v_0 = 0$.

Como será visto nos valores das condições iniciais e através das características das condições de contorno, esse escoamento sobre a geometria irregular se assemelha com um escoamento externo sobre prédios e casas durante uma tempestade (velocidade do ar por volta de $30m/s$). Entretanto não se considera os termos de turbulência.

Para o escoamento sobre essa geometria irregular da Figura 2.1 não foram encontrados trabalhos numéricos ou experimentais para comparação de resultados. Portanto, para garantir que os resultados gerados pelo código computacional são satisfatórios, o código deve ser validado por casos testes semelhantes.

Com as condições citadas nos parágrafos anteriores, é possível iniciar o tratamento numérico para obtenção do campo de escoamento ao longo desta geometria irregular. Toda a metodologia para o tratamento numérico das equações da dinâmica dos fluidos será detalhado nos próximos capítulos.

Capítulo 3

Solução Numérica

Os métodos numéricos são importantes ferramentas utilizadas para obtenção de soluções aproximadas de modelos matemáticos, principalmente de equações diferenciais parciais que modelam diversos fenômenos físicos envolvidos em problemas práticos de engenharia.

Os métodos utilizados para obtenção de soluções das equações diferenciais podem ser classificados em dois tipos: explícitos e implícitos. Os métodos explícitos geralmente são mais simples de serem implementados computacionalmente, entretanto possuem critérios de estabilidade mais restritivos. Já os métodos implícitos são mais difíceis de serem implementados, entretanto são mais estáveis e, portanto, possuem menos restrições com relação aos critérios de estabilidade [2].

Para problemas de escoamento de fluidos, os métodos mais tradicionais para obtenção de soluções numéricas são os métodos das diferenças finitas (MDF) – que será utilizado neste trabalho.

Para as soluções numéricas deste trabalho, será utilizado o Método Explícito de MacCormack de segunda ordem de precisão no tempo e no espaço [6], aproximando as equações de Navier-Stokes por diferenças finitas em coordenadas generalizadas.

3.1 Aproximação por Diferenças Finitas

O método de diferenças finitas consiste em aproximar em cada ponto do domínio as equações diferenciais por expressões algébricas, isto é, discretizar a equação diferencial. Para essa discretização das equações, é necessária a construção de uma malha, que consiste em um conjunto discreto de pontos pertencentes ao domínio.

Segundo [2], a idéia da representação de diferenças finitas para uma derivada contínua pode ser introduzida através da definição da derivada para a função $f(x, y)$ no ponto $x = x_0$ e $y = y_0$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} \quad (3.1)$$

Ainda de acordo com [2], a aproximação das diferenças finitas pode ser obtida de muitas formas, entretanto uma das formas mais utilizadas é através do uso de uma expansão da Série de Taylor. Desenvolvendo-a para $f(x_0 + \Delta x, y_0)$ em (x_0, y_0) , temos:

$$\begin{aligned} f(x_0 + \Delta x, y_0) = & f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_0 \Delta x + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_0 \frac{(\Delta x)^2}{2!} + \dots \\ & + \frac{\partial^{N-1} f}{\partial x^{N-1}} \Big|_0 \frac{(\Delta x)^{N-1}}{(N-1)!} + \frac{\partial^N f}{\partial x^N} \Big|_\xi \frac{(\Delta x)^N}{N!} \quad x_0 \leq \xi \leq (x_0 + \Delta x) \end{aligned} \quad (3.2)$$

onde o último termo pode ser identificado como o resto.

Muitas equações diferenciais parciais que modelam fenômenos da mecânica dos fluidos e transferência de calor envolvem apenas a primeira e segunda derivada parcial e, geralmente, estas derivadas são representadas usando apenas valores de dois ou três pontos da malha [2].

As equações diferenciais parciais utilizadas para a solução numérica das equações de Navier-Stokes podem ser aproximadas por diferenças finitas progressivas, atrasadas e centradas.

As expressões mais usuais para aproximação da primeira derivada de $f(x, y)$ são:

- Diferenças Progressivas:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{i,j} = \frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{i,j} = \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j}}{\Delta y} + O(\Delta y) \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{i,j} = \frac{-3f_{i,j} + 4f_{i+1,j} - f_{i+2,j}}{2\Delta x} + O[(\Delta x)^2] \quad (3.5)$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{i,j} = \frac{-3f_{i,j} + 4f_{i,j+1} - f_{i,j+2}}{2\Delta y} + O[(\Delta y)^2] \quad (3.6)$$

- Diferenças Centradas:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{i,j} = \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2\Delta x} + O[(\Delta x)^2] \quad (3.7)$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{i,j} = \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2\Delta y} + O[(\Delta y)^2] \quad (3.8)$$

- Diferenças Atrasadas:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{i,j} = \frac{f_{i,j} - f_{i-1,j}}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (3.9)$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{i,j} = \frac{f_{i,j} - f_{i,j-1}}{\Delta y} + O(\Delta y) \quad (3.10)$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{i,j} = \frac{3f_{i,j} - 4f_{i-1,j} + f_{i-2,j}}{2\Delta x} + O[(\Delta x)^2] \quad (3.11)$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{i,j} = \frac{3f_{i,j} - 4f_{i,j-1} + f_{i,j-2}}{2\Delta y} + O[(\Delta y)^2] \quad (3.12)$$

Os erros de truncamento são representados por $O(\Delta x)$, $O(\Delta y)$, $O[(\Delta x)^2]$ e $O[(\Delta y)^2]$, que são a diferença entre a derivada parcial e a representação por diferenças finitas.

A segunda derivada parcial também pode ser aproximada por diferenças finitas, onde é mais comum utilizar três pontos para as aproximações,

- Diferenças Progressivas:

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_{i,j} = \frac{f_{i,j} - 2f_{i+1,j} + f_{i+2,j}}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x) \quad (3.13)$$

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right|_{i,j} = \frac{f_{i,j} - 2f_{i,j+1} + f_{i,j+2}}{(\Delta y)^2} + O(\Delta y) \quad (3.14)$$

- Diferenças Centradas:

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_{i,j} = \frac{f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} + O[(\Delta x)^2] \quad (3.15)$$

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right|_{i,j} = \frac{f_{i,j+1} - 2f_{i,j} + f_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} + O[(\Delta y)^2] \quad (3.16)$$

- Diferenças Regressivas:

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_{i,j} = \frac{f_{i,j} - 2f_{i-1,j} + f_{i-2,j}}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x) \quad (3.17)$$

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right|_{i,j} = \frac{f_{i,j} - 2f_{i,j-1} + f_{i,j-2}}{(\Delta y)^2} + O(\Delta y) \quad (3.18)$$

Por meio da manipulação da Série de Taylor, podem-se aproximar as derivadas parciais de ordem superior a dois. Por este processo, também se pode obter aproximações das derivadas parciais mistas de primeira ordem e superiores. Essas aproximações e outras podem ser verificadas em [2].

3.2 Coordenadas Generalizadas

O método das diferenças finitas pode ser aplicado em qualquer tipo de malha, entretanto é mais fácil aplicá-las em um sistema coordenado ortogonal [1]. Porém, a maioria dos problemas reais de engenharia possui geometrias complexas, o que torna a utilização de coordenadas ortogonais limitada. Para solucionar este problema, deve-se utilizar uma discretização coincidente com a fronteira e o sistema coordenado generalizado [4].

Um caso que exemplifica bem a limitação da utilização das coordenadas ortogonais é

o do escoamento ao redor de um cilindro [1]. Com a utilização das coordenadas cartesianas, conforme Figura 3.1(a), não tem-se todos os pontos da malha dentro do domínio de solução, o que exige um trabalho mais complicado de implementação computacional devido as dificuldades na aplicação das condições de contorno sobre a fronteira. Entretanto, conforme a Figura 3.1(b), com a discretização coincidente com a fronteira, isto é, utilizando as coordenadas generalizadas, todos os pontos da malha estão dentro do domínio de solução, o que facilita a aplicação das condições de contorno sobre a fronteira.

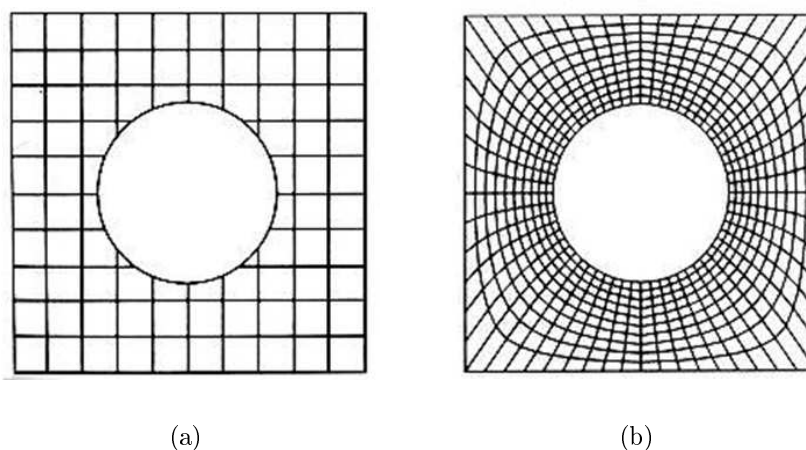


Figura 3.1: Discretização: (a) cartesiana; (b) coincidente com a fronteira [1]

Quando a discretização coincidente com a fronteira é realizada através de um sistema de coordenadas existe uma regra de ordenação na malha e suas células sempre possuem o mesmo número de vizinhos, o que facilita a implementação do código computacional. Estas malhas resultantes da discretização coincidente com a fronteira são chamadas de malhas estruturadas [1].

Além das malhas estruturadas, existem também as malhas não-estruturadas, que são malhas mais versáteis e podem ser usadas em domínios complexos. Entretanto, existe a desvantagem na implementação do código computacional, pois ao contrário das malhas estruturadas, as malhas não-estruturadas não possuem uma regra de ordenação [1] [3].

Analisando as vantagens e desvantagens de cada tipo de malha, pela facilidade de implementação do código computacional e da não necessidade de adaptação da malha, a utilização das malhas estruturadas foi adotada neste trabalho.

Para obtenção das malhas estruturadas bidimensionais no sistema de coordenadas generalizadas é necessário encontrar a transformação do sistema coordenado cartesiano (x, y) para o sistema coordenado generalizado (ξ, η) . Essa transformação permite o mape-

amento de geometrias regulares e irregulares, escritas em (x, y) , numa geometria regular escrita em (ξ, η) . Essa transformação de sistema simplifica muito a implementação do código computacional e a aplicação das condições de contorno.

O sistema coordenado generalizado normalizado, onde $(\Delta\xi = 1, \Delta\eta = 1)$, é o domínio computacional, enquanto o sistema coordenado cartesiano é o domínio físico.

As coordenadas generalizadas (também chamadas de *coordenadas curvilíneas*) de um ponto podem ser relacionadas com as coordenadas cartesianas por duas equações de transformação dadas por [1] [2]:

$$\xi = \xi(x, y) \quad (3.19)$$

$$\eta = \eta(x, y) \quad (3.20)$$

Os diferenciais no domínio computacional são dados por [1] [2]:

$$d\xi = \xi_x dx + \xi_y dy \quad (3.21)$$

$$d\eta = \eta_x dx + \eta_y dy \quad (3.22)$$

onde ξ_x, ξ_y, η_x e η_y são as derivadas de ξ e η nas direções x e y .

Os diferenciais também podem ser relacionados na forma matricial [1] [2],

$$\begin{bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

ou por

$$[d^T] = [A][d^F] \quad (3.24)$$

onde d^T e d^F são os diferenciais no domínio computacional e domínio físico, respectivamente.

Seguindo a mesma idéia para o domínio computacional, os diferenciais no domínio físico também podem ser relacionados na forma matricial,

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_\xi & x_\eta \\ y_\xi & y_\eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

ou por

$$[d^F] = [B][d^T] \quad (3.26)$$

Usando as equações (3.24) e (3.26), tem-se:

$$A = B^{-1} = J \begin{bmatrix} y_\eta & -x_\eta \\ -y_\xi & x_\xi \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

onde o jacobiano da transformação J é definido por:

$$J = \det[A] = \frac{1}{\det[B]} \quad (3.28)$$

ou

$$J = (x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi)^{-1} \quad (3.29)$$

Realizando uma comparação entre $[A]$ e $[B^{-1}]$, tem-se as métricas desta transformação, que representa a transformação do sistema (x, y) para o sistema (ξ, η) [1] [2],

$$\xi_x = J y_\eta \quad (3.30)$$

$$\xi_y = -J x_\eta \quad (3.31)$$

$$\eta_x = -J y_\xi \quad (3.32)$$

$$\eta_y = J x_\xi \quad (3.33)$$

Através do teorema da função inversa pode-se também obter a transformação do sistema (ξ, η) para o sistema (x, y) , dadas por [1] [2]:

$$x = x(\xi, \eta) \quad (3.34)$$

$$y = y(\xi, \eta) \quad (3.35)$$

onde as métricas destas funções são expressas por [1] [2],

$$x_\xi = \frac{1}{J} \eta_y \quad (3.36)$$

$$x_\eta = -\frac{1}{J}\xi_y \quad (3.37)$$

$$y_\xi = -\frac{1}{J}\eta_x \quad (3.38)$$

$$y_\eta = \frac{1}{J}\xi_x \quad (3.39)$$

As derivadas x_ξ , y_ξ , x_η e y_η podem ser aproximadas através do método das diferenças finitas, conforme as equações (3.3) a (3.18). Como o Método Original de MacCormack [6] é de segunda ordem no espaço e no tempo, as derivadas serão aproximadas por diferenças finitas de segunda ordem.

No interior do domínio, as derivadas foram aproximadas por diferenças centradas:

$$(x_\xi)_{i,j} = \frac{x_{i+1,j} - x_{i-1,j}}{2\Delta\xi} \quad (3.40)$$

$$(y_\xi)_{i,j} = \frac{y_{i+1,j} - y_{i-1,j}}{2\Delta\xi} \quad (3.41)$$

$$(x_\eta)_{i,j} = \frac{x_{i,j+1} - x_{i,j-1}}{2\Delta\eta} \quad (3.42)$$

$$(y_\eta)_{i,j} = \frac{y_{i,j+1} - y_{i,j-1}}{2\Delta\eta} \quad (3.43)$$

Para a fronteira de entrada, as derivadas foram aproximadas por diferenças progressivas:

$$(x_\xi)_{i,j} = \frac{3x_{i,j} - 4x_{i+1,j} + x_{i+2,j}}{2\Delta\xi} \quad (3.44)$$

$$(y_\xi)_{i,j} = \frac{3y_{i,j} - 4y_{i+1,j} + y_{i+2,j}}{2\Delta\xi} \quad (3.45)$$

Para a fronteira de saída, as derivadas foram aproximadas por diferenças atrasadas:

$$(x_\xi)_{i,j} = \frac{-3x_{i,j} + 4x_{i-1,j} - x_{i-2,j}}{2\Delta\xi} \quad (3.46)$$

$$(y_\xi)_{i,j} = \frac{-3y_{i,j} + 4y_{i-1,j} - y_{i-2,j}}{2\Delta\xi} \quad (3.47)$$

Para a fronteira inferior, as derivadas foram aproximadas por diferenças progressivas:

$$(x_\eta)_{i,j} = \frac{3x_{i,j} - 4x_{i,j+1} + x_{i,j+2}}{2\Delta\eta} \quad (3.48)$$

$$(y_\eta)_{i,j} = \frac{3y_{i,j} - 4y_{i,j+1} + y_{i,j+2}}{2\Delta\eta} \quad (3.49)$$

Para a fronteira superior, as derivadas foram aproximadas por diferenças atrasadas:

$$(x_\eta)_{i,j} = \frac{-3x_{i,j} + 4x_{i,j-1} - x_{i,j-2}}{2\Delta\eta} \quad (3.50)$$

$$(y_\eta)_{i,j} = \frac{-3y_{i,j} + 4y_{i,j-1} - y_{i,j-2}}{2\Delta\eta} \quad (3.51)$$

A partir destas equações (3.40) a (3.51) é possível obter as métricas ξ_x , ξ_y , η_x e η_y .

3.3 Geração de Malhas

A geração da malha é uma das partes mais importantes na implementação de códigos computacionais em dinâmica dos fluidos computacional. Para se obter resultados satisfatórios nas simulações numéricas é necessário que a malha seja de boa qualidade, isto é, que possua um refinamento apropriado em todo o domínio.

O método mais simples para geração de malha é o manual. Entretanto, em muitos casos este pode ser muito trabalhoso, principalmente em geometrias tridimensionais. Neste caso, é necessário que a geração das malhas seja realizada através de métodos automáticos.

Existem diversos métodos automáticos para a geração de malhas, sendo classificados geralmente como métodos algébricos e diferenciais [1] [4]. A utilização de cada um destes

métodos depende do tipo da geometria e dos requisitos de qualidade da malha.

Um dos métodos mais utilizados na geração de malhas bidimensionais é o método diferencial, principalmente o que utiliza equações diferenciais elípticas. São métodos mais gerais e possuem um maior controle na distribuição das linhas nos locais de maior interesse.

O sistema de equações diferenciais elípticas de geração de malhas é dado por [1] [2] [4]:

$$\nabla^2 \xi = P(\xi, \eta) \quad (3.52)$$

$$\nabla^2 \eta = Q(\xi, \eta) \quad (3.53)$$

onde temos a transformação dada por,

$$\xi = \xi(x, y) \quad (3.54)$$

$$\eta = \eta(x, y) \quad (3.55)$$

sendo ξ e η as variáveis dependentes e x e y as variáveis independentes.

Nas equações (3.52) e (3.53) estão incluídos os termos fontes $P(\xi, \eta)$ e $Q(\xi, \eta)$, estes que permitem fazer ajustes na concentração das linhas na malha.

Existem diversas expressões para P e Q , uma delas é dada de acordo com [1] [2] [4]:

$$\begin{aligned} P(\xi, \eta) = & - \sum_{j=1}^N a_j \text{sign}(\xi - \xi_j) \exp^{-c_j |\xi - \xi_j|} + \dots \\ & - \sum_{i=1}^M b_j \text{sign}(\xi - \xi_i) \exp^{-d_i [(\xi - \xi_i)^2 + (\eta - \eta_i)^2]^{\frac{1}{2}}} \end{aligned} \quad (3.56)$$

$$\begin{aligned} Q(\xi, \eta) = & - \sum_{j=1}^N a_j \text{sign}(\eta - \eta_j) \exp^{-c_j |\eta - \eta_j|} + \dots \\ & - \sum_{i=1}^M b_j \text{sign}(\eta - \eta_i) \exp^{-d_i [(\xi - \xi_i)^2 + (\eta - \eta_i)^2]^{\frac{1}{2}}} \end{aligned} \quad (3.57)$$

onde M e N são, respectivamente, o números de nodos na direção x e y e ξ_i e η_i os respectivos valores nos nodos. Já os parâmetros a_j , b_j , c_j e d_j são dados.

Segundo [1] [4], as soluções das equações geradoras (3.52) e (3.53) são muito difundidas no sistema de coordenadas generalizadas. Portanto, assim como as equações de Navier-Stokes para escoamento compressível, as equações de geração de malha também foram

resolvidas no domínio computacional.

As equações de geração de malhas transformadas bidimensionais são dadas por [1] [2] [4]:

$$\alpha x_{\xi\xi} + \gamma x_{\eta\eta} - 2\beta x_{\xi\eta} + \left(\frac{1}{J^2}\right)(Px_{\xi} + Qx_{\eta}) = 0 \quad (3.58)$$

$$\alpha y_{\xi\xi} + \gamma x_{\eta\eta} - 2\beta y_{\xi\eta} + \left(\frac{1}{J^2}\right)(Py_{\xi} + Qy_{\eta}) = 0 \quad (3.59)$$

onde

$$\alpha = g_{22} = x_{\eta}^2 + y_{\eta}^2 \quad (3.60)$$

$$\gamma = g_{11} = x_{\xi}^2 + y_{\xi}^2 \quad (3.61)$$

$$\beta = g_{12} = g_{21} = x_{\xi}x_{\eta} + y_{\xi}y_{\eta} \quad (3.62)$$

são as componentes do tensor métrico g_{ij} associado à transformação.

É difícil a obtenção das soluções analíticas das equações de geração de malhas transformadas. Porém, as mesmas podem ser resolvidas numericamente através do método das diferenças finitas, utilizando as equações (3.3) a (3.18), semelhante ao que é realizado para obtenção das equações (3.40) a (3.51).

Aproximando as derivadas parciais das equações (3.58) a (3.59) através do método das diferenças finitas é possível obter um sistema de equações algébricas que pode ser resolvido utilizando o método iterativo SOR (Gauss-Seidel com parâmetro de relaxamento). Para a solução, o contorno do domínio físico são as condições de contorno requeridas pelo sistema a ser resolvido e no interior do domínio $[x_{i,j}, y_{i,j}] = 0$. Assim é possível obter os valores de $x_{i,j}$ e $y_{i,j}$ em todo o domínio, resultando em uma malha estruturada.

Apesar da eficiência das equações diferenciais elípticas para a geração das malhas estruturadas, em alguns casos, os fatores P e Q não são suficientes para atrair as linhas coordenadas conforme desejado.

Este problema pode ser observado em geometrias complexas, onde em muitos casos não se consegue um refinamento satisfatório em toda a malha, o que a torna de baixa qualidade. Como já citado anteriormente, a qualidade da solução está diretamente ligada com a qualidade da malha, então novas alternativas devem ser utilizadas para reverter este problema.

O diagrama do algoritmo computacional para a geração da malha através da solução das equações diferenciais elípticas é dado pela Figura 3.2:



Figura 3.2: Algoritmo computacional de geração de malha

3.4 Malhas estruturadas multibloco

Como visto na seção anterior, as soluções numéricas de problemas de escoamento de fluidos em geometrias complexas podem ser de baixa qualidade devido à utilização de malhas estruturadas com um refinamento ruim, principalmente as geradas através das equações diferenciais elípticas, pois os termos fontes P e Q nem sempre são suficientes para gerar um bom refinamento da malha. Entretanto, através da utilização de malhas estruturadas multibloco é possível obter um controle maior do refinamento da malha em todas as regiões do domínio sem aumentar extremamente o custo computacional [16].

A técnica de multibloco consiste em dividir o domínio do problema em subdomínios (ou *blocos*) e, dentro de cada subdomínio, gerar uma malha estruturada. Assim, é possível obter uma malha com refinamento apropriado em todo o domínio, podendo ainda cada bloco possuir um grau de refinamento diferente, o que possibilita um melhor refinamento da malha em regiões específicas, evitando assim aumentar desnecessariamente o número de pontos e conseqüentemente o custo computacional.

Portanto, a técnica de multibloco é uma ótima alternativa para a geração de malhas estruturadas em problemas de escoamento de fluidos em geometrias complexas. Além disso, essa técnica permite que as coordenadas possam ser definidas em i e j , facilitando a implementação do código computacional.

A conexão entre os blocos pode ser realizada através de malhas coincidentes e não coincidentes na fronteira [1] [4] [17], conforme pode ser visto nas Figuras 3.3:

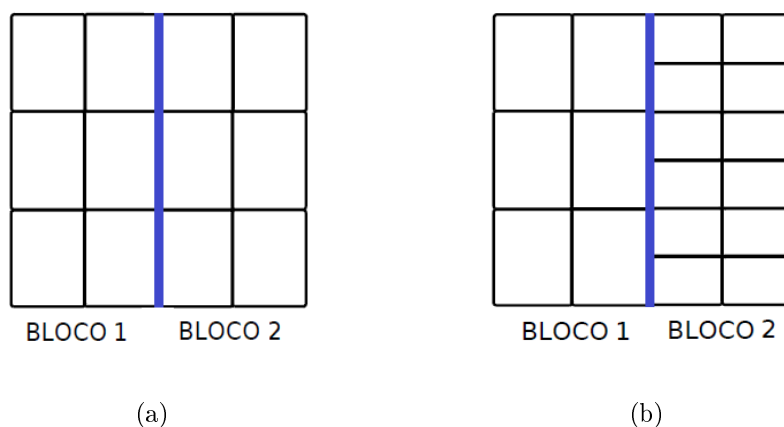


Figura 3.3: Conexão entre malhas multibloco: (a) coincidentes; (b) não coincidentes

A dificuldade da aplicação da técnica de multibloco consiste principalmente no procedimento de troca de informações entre os blocos vizinhos, principalmente quando os blocos apresentam um refinamento diferente, como é o caso das malhas não coincidentes na fronteira. Essa conexão deve ser tratada com bastante atenção, pois a forma com que é realizada a troca de informações entre os blocos vizinhos pode influenciar na convergência do método numérico.

A vantagem das malhas estruturadas multibloco coincidentes na fronteira é a de não necessitar da utilização das funções de interpolação para a conexão entre os blocos. Apesar das malhas estruturadas multibloco não coincidentes na fronteira necessitarem das funções de interpolação, apresentam a vantagem de possibilitar um melhor refinamento da malha

em regiões específicas do domínio [17].

Em escoamento de fluidos a transferência de informações entre blocos vizinhos pode ser realizada através do vetor das variáveis conservadas \mathbf{Q} , conforme equação (2.10). Essa transferência de informações para um determinado bloco é realizada através de uma aplicação de condições de contorno, onde as informações a serem transferidas para este bloco são em função dos valores que estão disponíveis no bloco vizinho [1] [4].

A técnica de multibloco é geralmente utilizada em malhas estruturadas em geometrias complexas, entretanto também pode ser utilizada em malhas não estruturadas [3].

3.5 Equações de Navier-Stokes em coordenadas generalizadas

Em muitas aplicações é desejado que as equações de Navier-Stokes para escoamento compressível bidimensional sejam expressas na forma conservativa e em coordenadas generalizadas, conforme abaixo [2] [15]:

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{Q}}}{\partial t} + \frac{\partial(\hat{\mathbf{E}}_{inv} - \hat{\mathbf{E}}_{vis})}{\partial \xi} + \frac{\partial(\hat{\mathbf{F}}_{inv} - \hat{\mathbf{F}}_{vis})}{\partial \eta} = 0 \quad (3.63)$$

onde

$$\hat{\mathbf{Q}} = J^{-1} \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E_t \end{bmatrix} \quad (3.64)$$

$$\hat{\mathbf{E}}_{inv} = J^{-1} \begin{bmatrix} \rho U \\ \rho u U + \xi_x p \\ \rho v U + \xi_y p \\ U(E_t + p) \end{bmatrix} \quad (3.65)$$

$$\hat{\mathbf{F}}_{inv} = J^{-1} \begin{bmatrix} \rho V \\ \rho u V + \eta_x p \\ \rho v V + \eta_y p \\ V(E_t + p) \end{bmatrix} \quad (3.66)$$

$$\hat{\mathbf{E}}_{vis} = J^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ Re^{-1}(\xi_x \tau_{xx} + \xi_y \tau_{xy}) \\ Re^{-1}(\xi_x \tau_{xy} + \xi_y \tau_{yy}) \\ Re^{-1}[\xi_x(\tau_{xx}u + \tau_{xy}v) + \xi_y(\tau_{xy}u + \tau_{yy}v)] \end{bmatrix} \quad (3.67)$$

$$\hat{\mathbf{E}}_{vis} = J^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ Re^{-1}(\eta_x \tau_{xx} + \eta_y \tau_{xy}) \\ Re^{-1}(\eta_x \tau_{xy} + \eta_y \tau_{yy}) \\ Re^{-1}[\eta_x(\tau_{xx}u + \tau_{xy}v) + \eta_y(\tau_{xy}u + \tau_{yy}v)] \end{bmatrix} \quad (3.68)$$

e o Jacobiano da transformação é dado por,

$$J = (x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi)^{-1} \quad (3.69)$$

As velocidades contravariantes U e V são expressas por:

$$U = \xi_x u + \xi_y v, \quad V = \eta_x u + \eta_y v \quad (3.70)$$

As tensões viscosas τ_{xx} , τ_{xy} e τ_{yy} também são escritas na forma transformada, onde:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_{xx} = \frac{2}{3}\mu[2(\xi_x u_\xi + \eta_x u_\eta) - (\xi_y v_\xi + \eta_y v_\eta)] \\ \tau_{xy} = \mu[\xi_y u_\xi + \eta_y u_\eta + \xi_x v_\xi + \eta_x v_\eta] \\ \tau_{yy} = \frac{2}{3}\mu[2(\xi_y v_\xi + \eta_y v_\eta) - (\xi_x u_\xi + \eta_x u_\eta)] \end{array} \right. \quad (3.71)$$

Quando as equações de Navier-Stokes são escritas no domínio computacional, isto é, no sistema coordenado generalizado, tem-se facilidades na implementação do código computacional. Isto ocorre pois o domínio computacional é fixo e, desde que as regras de mapeamento sejam obedecidas, mudanças no domínio físico podem ser realizadas sem a necessidade de alterações no código computacional. Neste caso, as informações do domínio físico são fornecidas ao código computacional por meio das métricas da transformação que estão inseridas nas equações de Navier-Stokes [1].

As equações de Navier-Stokes para escoamento compressível são equações diferenciais

não-lineares podendo apresentar comportamento variados, tais como hiperbólico, parabólico ou elíptico ou ainda combinações destas dependendo do domínio e condições de escoamento. Existem diversos esquemas de diferenças finitas implícitos e explícitos que são capazes de resolver estas equações [1] [2].

3.6 Método Original de MacCormack

As equações de Navier-Stokes para escoamento compressível são complexas e necessitam de solução numérica para obtenção de resultados. Segundo [2], tanto os métodos explícitos quanto os implícitos de diferenças finitas tem sido usados com uma abordagem dependente do tempo para a solução dessas equações. A maioria destes métodos são de segunda ordem de precisão no espaço e de primeira ou segunda ordem de precisão no tempo.

Devido a esta complexidade das equações, diversos métodos têm aparecido na literatura para obtenção de soluções. Um método bastante utilizado e que é referência para diversos outros métodos atuais é o Método Original de MacCormack [6].

Este método é muito utilizado para obtenção de soluções numéricas de equações diferenciais parciais hiperbólicas e é aplicado para soluções numéricas das equações de Navier-Stokes para escoamento compressível.

Conhecido também como Esquema Predictor-Corrector de MacCormack [6], este método possui diferenças progressivas (ou “*forward*”) para todas derivadas do espaço no passo Predictor, enquanto possui diferenças atrasadas (ou “*backward*”) no passo Corrector. As diferenças progressivas ou atrasadas podem ser alteradas entre o passo Predictor e Corrector [2].

Quando o Método Original de MacCormack [6] é aplicado as equações (3.63), tem-se como resultado o seguinte algoritmo [2]:

- Predictor:

$$\begin{aligned} \hat{Q}_{i,j}^{\overline{n+1}} = \hat{Q}_{i,j}^n &- \frac{\Delta t}{\Delta \xi} \left[(\hat{\mathbf{E}}_{inv})_{i+1,j}^n - (\hat{\mathbf{E}}_{inv})_{i,j}^n \right] - \frac{\Delta t}{\Delta \eta} \left[(\hat{\mathbf{F}}_{inv})_{i,j+1}^n - (\hat{\mathbf{F}}_{inv})_{i,j}^n \right] + \dots \\ &- \frac{\Delta t}{\Delta \xi} \left[(\hat{\mathbf{E}}_{vis})_{i+1,j}^n - (\hat{\mathbf{E}}_{vis})_{i,j}^n \right] - \frac{\Delta t}{\Delta \eta} \left[(\hat{\mathbf{F}}_{vis})_{i,j+1}^n - (\hat{\mathbf{F}}_{vis})_{i,j}^n \right] \end{aligned} \quad (3.72)$$

- Corrector:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{Q}}_{i,j}^{n+1} = & \frac{1}{2} \left(\hat{\mathbf{Q}}_{i,j}^n + \hat{\mathbf{Q}}_{i,j}^{\overline{n+1}} - \frac{\Delta t}{\Delta \xi} \left[(\hat{\mathbf{E}}_{inv})_{i,j}^{\overline{n+1}} - (\hat{\mathbf{E}}_{inv})_{i-1,j}^{\overline{n+1}} \right] + \dots \right. \\ & - \frac{\Delta t}{\Delta \eta} \left[(\hat{\mathbf{F}}_{inv})_{i,j}^{\overline{n+1}} - (\hat{\mathbf{F}}_{inv})_{i,j-1}^{\overline{n+1}} \right] - \frac{\Delta t}{\Delta \xi} \left[(\hat{\mathbf{E}}_{vis})_{i,j}^{\overline{n+1}} - (\hat{\mathbf{E}}_{vis})_{i-1,j}^{\overline{n+1}} \right] + \dots \\ & \left. - \frac{\Delta t}{\Delta \eta} \left[(\hat{\mathbf{F}}_{vis})_{i,j}^{\overline{n+1}} - (\hat{\mathbf{F}}_{vis})_{i,j-1}^{\overline{n+1}} \right] \right) \end{aligned} \quad (3.73)$$

O termo $\hat{\mathbf{Q}}_{i,j}^{\overline{n+1}}$ é um valor predito de $\hat{\mathbf{Q}}$ no passo de tempo $n + 1$ determinado pela equação (3.72) no passo Predictor. Após, no passo Corrector a equação (3.73) fornece o valor final de $\hat{\mathbf{Q}}$ no passo de tempo $n + 1$ [2] [6].

O monitoramento da estabilidade do método é realizado pela observação do resíduo em todos os pontos internos do domínio discretizado, conforme a equação abaixo,

$$residuo = \log_{10} \left[\sum_{i,j=2,2}^{M-1,N-1} \sqrt{\frac{J^2(\hat{\mathbf{Q}}_{i,j}^{n-1} - \hat{\mathbf{Q}}_{i,j}^n)^2}{(M-2)(N-2)}} \right] \quad (3.74)$$

Dentre as variáveis conservadas de $\hat{\mathbf{Q}}$, a utilizada na equação acima para determinação do resíduo é a densidade ρ .

O Método Original de MacCormack [6] é um método numérico explícito. Este não é de difícil implementação computacional quando comparado com os métodos implícitos, entretanto possui condições mais restritivas com relação à estabilidade, onde é necessário utilizar um passo de tempo relativamente pequeno para manter a estabilidade.

3.7 Condição CFL e o passo de tempo

Para manter o esquema numérico estável, o valor do passo de integração temporal pode ser definido pela seguinte fórmula empírica em coordenadas generalizadas [2] [6] [18],

$$\Delta t = \frac{CFL}{\left(\frac{2\nu}{Re} + CFLx + CFLy \right)} \quad (3.75)$$

onde CFL é o número de Courant-Friedrichs-Lewy. Para o método explícito de MacCormack o valor de CFL deve ser menor ou igual a 0,5.

Os valores de $CFLx$ e $CFLy$ da equação acima podem ser determinados através das

seguintes expressões:

$$CFx = |\xi_x u + \xi_y v| + \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} \sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2} \quad (3.76)$$

$$CFy = |\eta_x u + \eta_y v| + \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} \sqrt{\eta_x^2 + \eta_y^2} \quad (3.77)$$

sendo CFx e CFy os máximos valores encontrados no domínio.

3.8 Condições de Contorno

A condição de contorno de Dirichlet é uma das mais fáceis de serem utilizadas e implementadas computacionalmente. Para os códigos computacionais em escoamento de fluido compressível, podem ser do tipo:

- Entrada (*Inlet*):

É a região onde ocorre a injeção de fluido no domínio, onde todas as propriedades são fornecidas.

- Saída (*Outlet*):

É a região que representa a saída do fluido no domínio. As condições de contorno são aproximadas por extrapolação da seguinte forma:

$$\rho_{i,j} = \frac{4\rho_{i-1,j} - \rho_{i-2,j}}{3} \quad (3.78)$$

$$u_{i,j} = \frac{4u_{i-1,j} - u_{i-2,j}}{3} \quad (3.79)$$

$$v_{i,j} = \frac{4v_{i-1,j} - v_{i-2,j}}{3} \quad (3.80)$$

$$p_{i,j} = \frac{4p_{i-1,j} - p_{i-2,j}}{3} \quad (3.81)$$

Com isso, pode-se determinar a energia interna:

$$(E_t)_{i,j} = \frac{p_{i,j}}{(\gamma - 1)} + \frac{1}{2}\rho_{i,j}(v_{i,j}^2 + u_{i,j}^2) \quad (3.82)$$

- Aberto (*Opening*):

Estas condições de contorno permitem o escoamento do fluido para fora ou dentro do domínio, dependendo somente das condições do escoamento.

As condições de contorno podem ser determinadas conforme as seguintes expressões:

$$\rho_{i,j} = \frac{4\rho_{i,j-1} - \rho_{i,j-2}}{3} \quad (3.83)$$

$$u_{i,j} = \frac{4u_{i,j-1} - u_{i,j-2}}{3} \quad (3.84)$$

$$v_{i,j} = \frac{4v_{i,j-1} - v_{i,j-2}}{3} \quad (3.85)$$

$$p_{i,j} = \frac{4p_{i,j-1} - p_{i,j-2}}{3} \quad (3.86)$$

ou por,

$$\rho_{i,j} = \frac{4\rho_{i,j+1} - \rho_{i,j+2}}{3} \quad (3.87)$$

$$u_{i,j} = \frac{4u_{i,j+1} - u_{i,j+2}}{3} \quad (3.88)$$

$$v_{i,j} = \frac{4v_{i,j+1} - v_{i,j+2}}{3} \quad (3.89)$$

$$p_{i,j} = \frac{4p_{i,j+1} - p_{i,j+2}}{3} \quad (3.90)$$

Com isso, a energia interna pode ser determinada conforme a equação (3.82).

- Parede (*Wall*):

Representa as condições de contorno impermeáveis do escoamento viscoso e não-viscoso. Para a densidade, pressão e energia, as condições de contorno podem ser determinadas conforme as condições do tipo *Opening*. Entretanto, a aplicação das condições de contorno para a velocidade é diferente, sendo classificadas como *Free-Slip* para escoamento não-viscoso e *No-Slip* para escoamento viscoso.

Para a condição de contorno do tipo *Free-Slip*, a velocidade na parede não é nula e pode ser determinada pelas seguintes relações,

1. Velocidade contravariante V :

$$|\eta_x| \geq |\eta_y| : \begin{cases} v = (4v_{i,j+1} - v_{i,j+2})/3 \\ u = -\eta_y v / \eta_x \end{cases} \quad (3.91)$$

$$|\eta_x| < |\eta_y| : \begin{cases} u = (4u_{i,j+1} - u_{i,j+2})/3 \\ v = -\eta_x u / \eta_y \end{cases} \quad (3.92)$$

ou por,

$$|\eta_x| \geq |\eta_y| : \begin{cases} v = (4v_{i,j-1} - v_{i,j-2})/3 \\ u = -\eta_y v / \eta_x \end{cases} \quad (3.93)$$

$$|\eta_x| < |\eta_y| : \begin{cases} u = (4u_{i,j-1} - u_{i,j-2})/3 \\ v = -\eta_x u / \eta_y \end{cases} \quad (3.94)$$

2. Velocidade contravariante U :

$$|\xi_x| \geq |\xi_y| : \begin{cases} v = (4v_{i-1,j} - v_{i-2,j})/3 \\ u = -\xi_y v / \xi_x \end{cases} \quad (3.95)$$

$$|\xi_x| < |\xi_y| : \begin{cases} u = (4u_{i-1,j} - u_{i-2,j})/3 \\ v = -\xi_x u / \xi_y \end{cases} \quad (3.96)$$

ou por,

$$|\xi_x| \geq |\xi_y| : \begin{cases} v = (4v_{i+1,j} - v_{i+2,j})/3 \\ u = -\xi_y v / \xi_x \end{cases} \quad (3.97)$$

$$|\xi_x| < |\xi_y| : \begin{cases} u = (4u_{i+1,j} - u_{i+2,j})/3 \\ v = -\xi_x u / \xi_y \end{cases} \quad (3.98)$$

Na condição de contorno do tipo *No-Slip*, a velocidade na parede é nula de acordo com o conceito de camada-limite do escoamento viscoso.

3.9 Diagrama do algoritmo computacional

Com a metodologia descrita neste capítulo é possível obter soluções das equações de Navier-Stokes em diversos domínios bidimensionais.

Os algoritmos computacionais desenvolvidos neste trabalho seguiram a mesma metodologia e o procedimento numérico utilizado pode ser visto conforme o diagrama de blocos da Figura 3.4.

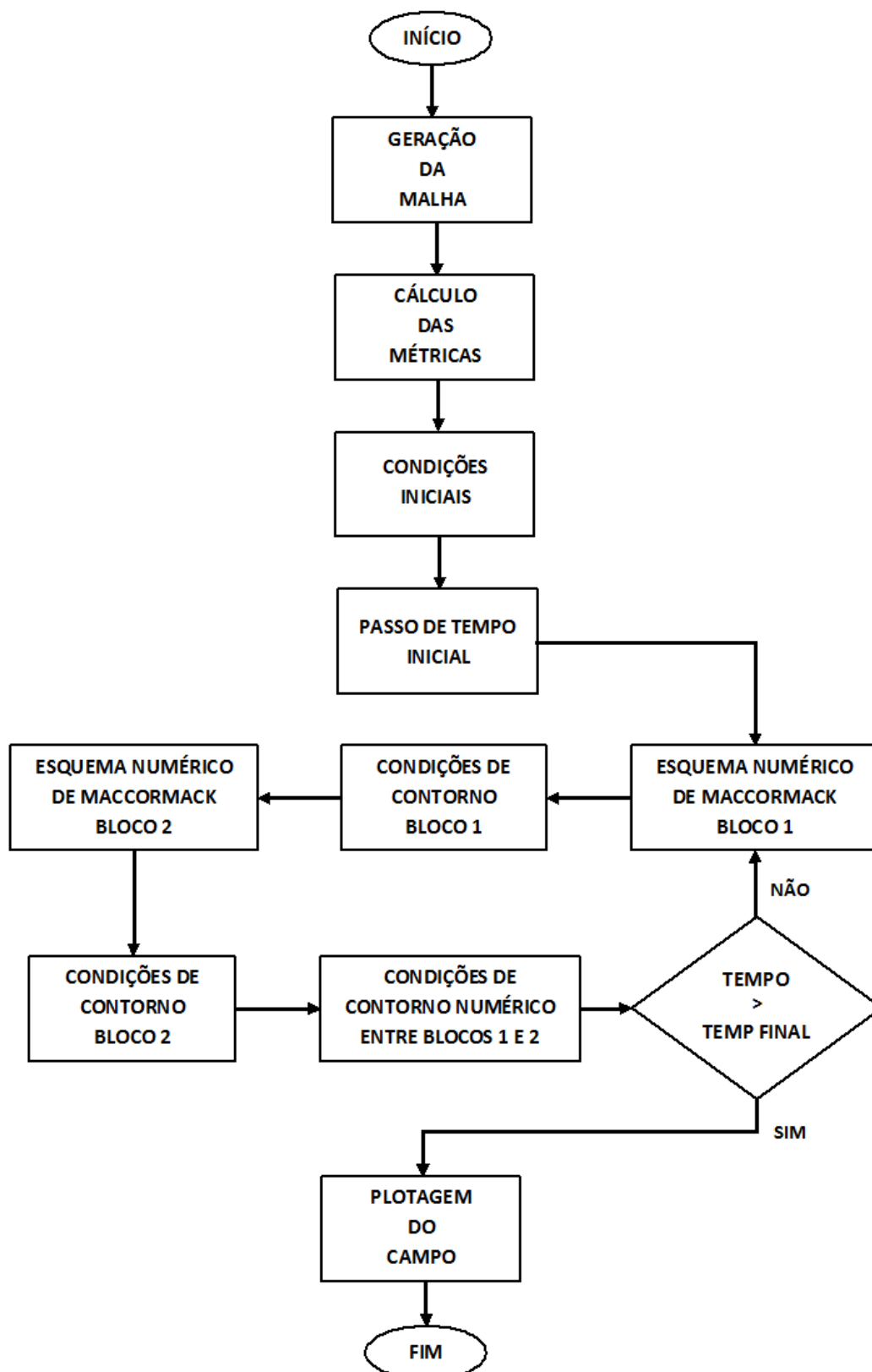


Figura 3.4: Algoritmo computacional principal

Capítulo 4

Resultados e Discussões

O objetivo deste capítulo é discutir os resultados do escoamento sobre a geometria irregular da Figura 2.1. Entretanto, inicialmente será realizada a validação do código computacional através de três casos testes, onde os resultados numéricos obtidos neste trabalho serão comparados com resultados analíticos, numéricos e experimentais encontrados na literatura.

Para a validação do código computacional, foram escolhidos os seguintes casos testes: o escoamento laminar em um canal e o escoamento sobre um degrau descendente (*backward facing step*), que são escoamento subsônico em regime permanente, e o escoamento sobre uma rampa curva, que é um escoamento supersônico em regime transiente. Após este processo de validação, finalmente serão discutidos os resultados do escoamento sobre a geometria irregular da Figura 2.1.

Todas as simulações foram realizadas em um computador com processador: Intel(R) Core(TM)2 de 2.83GHz e 3.9 GB de memória RAM.

4.1 Escoamento laminar em um canal

O escoamento laminar em um canal possui grande importância devido a sua grande aplicação prática [19]. Além disso, também pode ser utilizado para validação de códigos computacionais, onde os resultados numéricos são comparados com os resultados teóricos e experimentais, conforme realizado por [5], [20] e [21].

Este escoamento é caracterizado por apresentar uma seção de alimentação e uma de descarga em um canal formado por duas placas paralelas separadas por uma distância $2r$, conforme a Figura 4.1. Normalmente o fluido é injetado na entrada do canal com um

perfil de velocidade reto ou parabólico e, após um tempo, inicia-se a formação da camada limite, tornando importantes os efeitos viscosos. Quando o escoamento se desenvolve completamente, o perfil de velocidade torna-se parabólico ao longo do canal devido as forças viscosas presentes nas equações de quantidade de movimento [19].

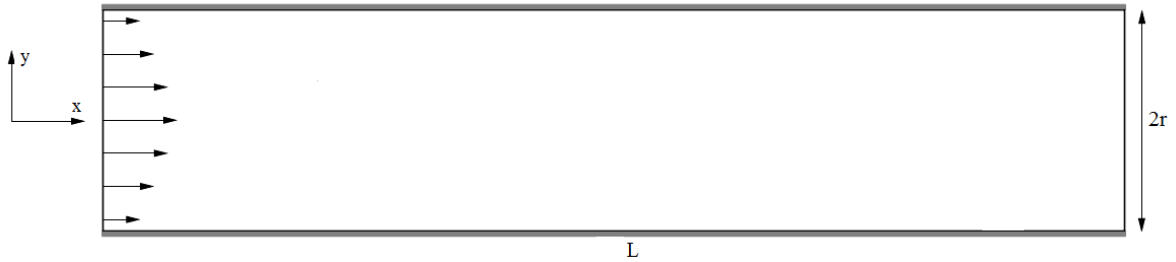


Figura 4.1: Escoamento laminar em um canal

Considerando o escoamento laminar, subsônico e completamente desenvolvido no interior do canal, o perfil de velocidade parabólico uniforme ao longo do canal pode ser determinado analiticamente pela seguinte expressão [19]:

$$u(y) = U_{max} \left[1 - \left(\frac{y}{r} \right)^2 \right] \quad (4.1)$$

onde U_{max} é a velocidade máxima localizada, r é o raio interno de entrada do canal e y é a ordenada cartesiana, onde o eixo x é coincidente com o eixo de simetria do canal.

Este problema pode ser modelado matematicamente pelas equações (2.9) a (2.16). Através da solução numérica destas equações no estado permanente, os valores das velocidades ao longo do canal devem ser comparados com a solução analítica dada pela equação (4.1).

Além das referências citadas anteriormente, mais informações sobre o escoamento laminar em um canal podem ser encontradas nas seguintes referências: [3], [14] e [22].

Para a validação do código computacional, considera-se um canal com as seguintes dimensões, $h = 2r = 1,13 \times 10^{-3} m$ e $L = 20h$, conforme a Figura 4.1. Para este domínio, foi utilizada uma malha estruturada multibloco com dois blocos, conforme mostrada parcialmente na Figura 4.2. O primeiro bloco (*bloco 1*), que está em vermelho, é onde ocorre a entrada do fluido. O segundo bloco (*bloco 2*), que está em azul, é onde ocorre a entrada do fluido do *bloco 1* e também a saída do fluido. A malha de cada bloco possui 60×50 nodos.

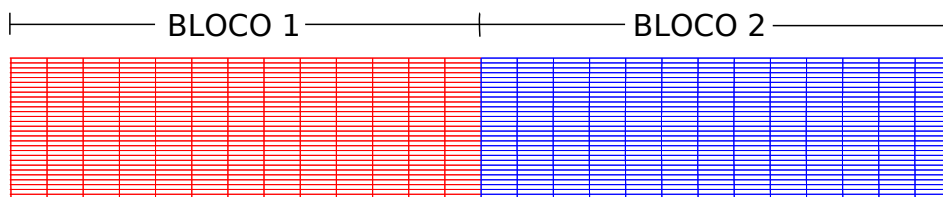


Figura 4.2: Detalhe da malha na região central do canal

Para o tratamento da fronteira entre os blocos 1 e 2, tem-se que elas são coincidentes fisicamente. Para a troca de informações entre os blocos, a malha estruturada multibloco é coincidente na fronteira.

Na fronteira entre os blocos, a fronteira do bloco 1 é considerada como uma condição de contorno de saída *outlet*, pois o fluido sai deste bloco. No bloco 2, a fronteira é a entrada do fluido que sai do bloco 1, sendo considerada uma condição de contorno de entrada *inlet*. Como pode ser visto na Figura 4.3, os valores das variáveis de entrada do bloco 2 são iguais aos valores das variáveis de saída do bloco 1.

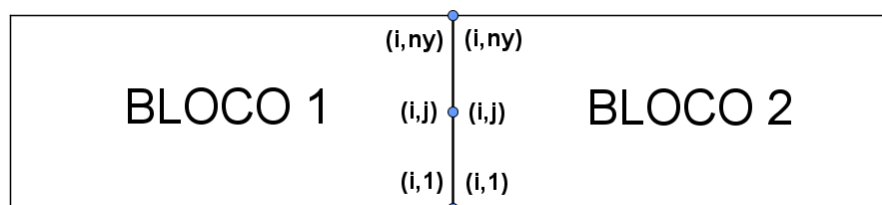


Figura 4.3: Representação da conexão na fronteira

Analisando a Figura 4.3, observa-se que o vetor das variáveis conservadas \hat{Q} é coincidente na fronteira para os blocos 1 e 2, onde:

$$\hat{Q}_{B1} = \hat{Q}_{B2} \quad (4.2)$$

Para evitar uma descontinuidade numérica da solução na fronteira entre os blocos, após cada iteração é aplicada nessa fronteira uma condição de contorno numérica, onde os valores das variáveis são determinados através das variáveis vizinhas a esta fronteira.

Essa condição numérica é aplicada nas variáveis do escoamento de acordo com as seguintes expressões:

$$\tilde{\rho}_{i,j} = \frac{\rho_{i-1,j} + \rho_{i+1,j}}{2} \quad (4.3)$$

$$\tilde{u}_{i,j} = \frac{u_{i-1,j} + u_{i+1,j}}{2} \quad (4.4)$$

$$\tilde{v}_{i,j} = \frac{v_{i-1,j} + v_{i+1,j}}{2} \quad (4.5)$$

$$\tilde{p}_{i,j} = \frac{p_{i-1,j} + p_{i+1,j}}{2} \quad (4.6)$$

$$(\tilde{E}_t)_{i,j} = \frac{\tilde{p}_{i,j}}{(\gamma - 1)} + \frac{1}{2}\tilde{\rho}_{i,j}(\tilde{v}_{i,j}^2 + \tilde{u}_{i,j}^2) \quad (4.7)$$

Como condições iniciais, em todo domínio considera-se um canal completamente cheio com os seguintes valores para as variáveis:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_0 = 1,21 \text{ kg/m}^3 \\ p_0 = 1,01 \times 10^5 \text{ N/m}^2 \\ u_0 = v_0 = 0,00 \text{ m/s} \\ \mu = 1,81 \times 10^{-5} \text{ kg/(m.s)} \\ \gamma = 1,40 \end{array} \right. \quad (4.8)$$

Na entrada do canal considera-se a injeção de fluido com um perfil de velocidade parabólico conforme a equação (4.1), onde a velocidade máxima localizada é dada por $U_{max} = 1,0 \text{ m/s}$. Para as condições de contorno, na saída do canal tem-se uma condição *outlet* e nas paredes impermeáveis e não escorregadias (*escoamento viscoso*) tem-se uma condição *No-Slip* em regime subsônico.

Com as condições de entrada e iniciais e as condições de contorno citadas anteriormente, foram obtidos resultados numéricos satisfatórios através da implementação do Método Original de MacCormack [6] e da utilização de malha estruturada multibloco, pois os valores numéricos obtidos são bastante semelhantes aos valores da solução analítica da equação (4.1), conforme será visto a seguir.

Nas Figuras 4.4 e 4.5 pode-se observar a formação da camada limite e do perfil de velocidade parabólico e uniforme ao longo do canal, o que está de acordo com os resultados encontrados na literatura [5], [19], [20] e [21].

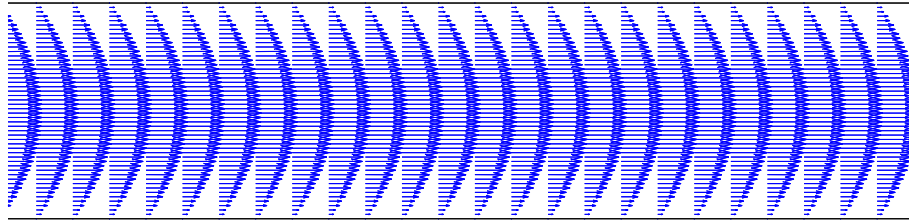


Figura 4.4: Campo vetorial de velocidade na região central do canal

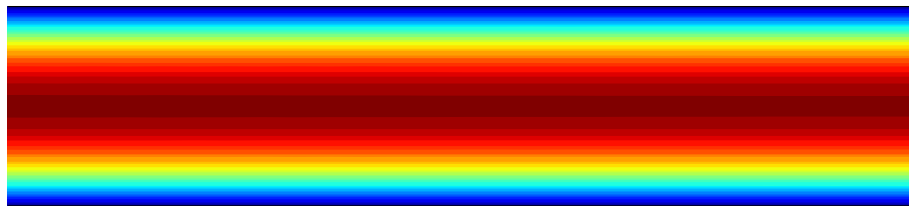


Figura 4.5: Distribuição de velocidade na região central do canal

Comparando os valores do perfil de velocidade obtidos na simulação numérica e os calculados analiticamente através da equação (4.1), conclui-se que os resultados também foram adequados em termos quantitativos conforme a Figura 4.6.

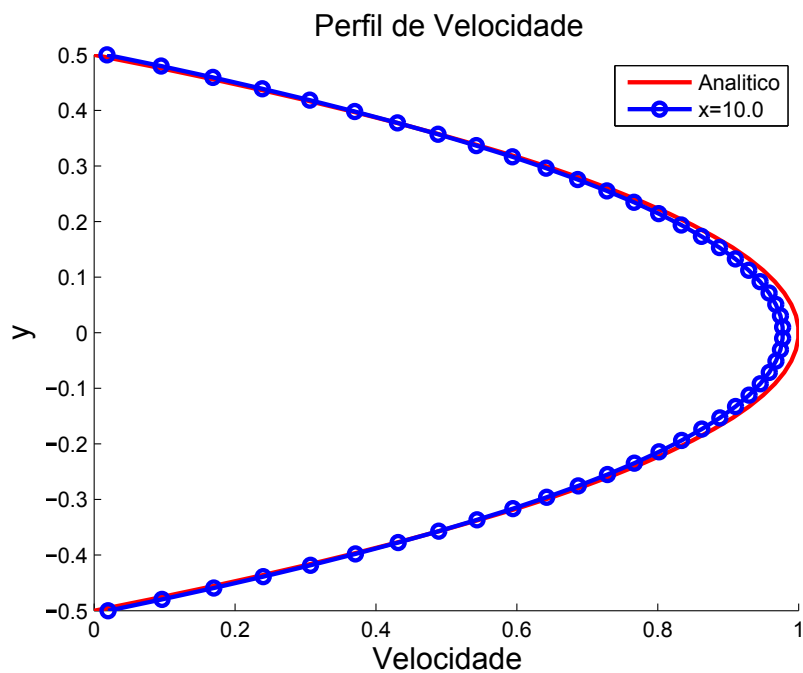


Figura 4.6: Perfil de velocidade numérico e analítico no centro do canal

Na Figura 4.7 é analisado o gráfico do resíduo após 175000 iterações em um tempo computacional de 3 horas e 54 minutos, onde o passo de tempo em cada iteração foi de aproximadamente de $\Delta t = 2,5 \times 10^{-5}$ unidades de tempo adimensionais.

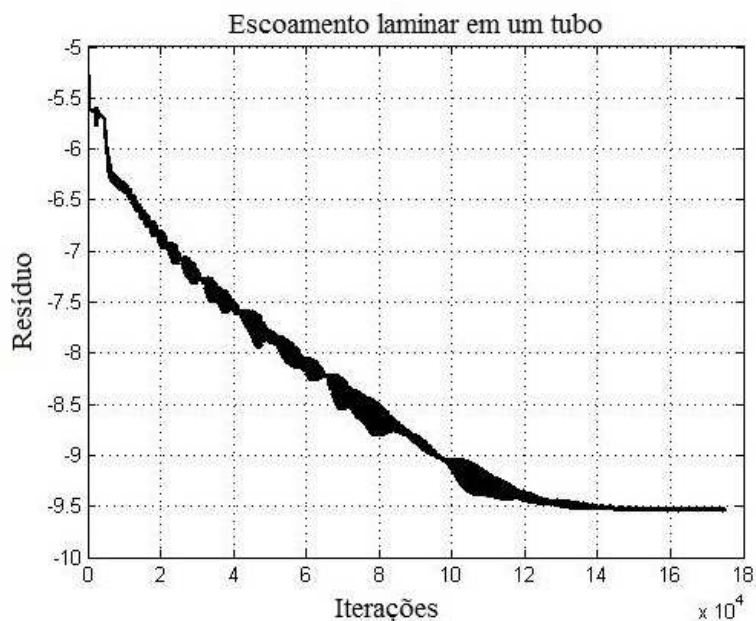


Figura 4.7: Gráfico de convergência do método numérico

Na Figura 4.7 observa-se que o resíduo decresce conforme aumenta o número de iterações, o que pode assumir que a solução converge ao estado permanente para o escoamento completamente desenvolvido. Este resíduo foi determinado utilizando a densidade ρ de acordo com a equação (3.74).

Para considerar que o escoamento laminar em um canal atingiu o estado permanente, na seção central $x = 10h$ foi realizada uma diferença a cada 1000 iterações dos valores nodais da velocidade atual u^n com os valores obtidos a 1000 iterações anteriores u^{n-1000} . Então, o escoamento foi considerado permanente quando a máxima diferença entre u^n e u^{n-1000} foi menor que o erro estimado 10^{-7} .

Embora o problema do escoamento em um canal seja de baixa velocidade e as equações (2.9) a (2.16) sejam para escoamento compressível, através da aplicação do Método de Original de MacCormack [6] para escoamento completamente desenvolvido é possível obter bons resultados para problemas subsônicos em estado permanente, conforme também foi realizado por [23] e [24].

4.2 Escoamento sobre um degrau descendente

O escoamento bidimensional em um canal sobre um degrau descendente também é freqüentemente utilizado como caso teste para validação de códigos computacionais em dinâmica dos fluidos computacional, pois tem sido foco de muitos trabalhos numéricos e experimentais e, portanto, dispõe de uma boa quantidade de dados numéricos e experimentais. Além disso, este caso teste apresenta uma geometria simples e seu escoamento é bastante interessante e mais complexo que o escoamento laminar em um canal. Em muitos trabalhos o escoamento sobre um degrau descendente é tratado da forma tridimensional [7], [8], [9] e [10].

A característica do escoamento sobre um degrau descendente é de apresentar geralmente duas bolhas de recirculação em regime permanente, a primária e a secundária, que são dependentes do número de Reynolds e dos parâmetros geométricos do canal [7] [8]. A bolha primária, também chamada de bolha de separação, ocorre à jusante do degrau descendente e é maior, enquanto a secundária ocorre na parede do topo e é menor. Para baixos números de Reynolds aparece somente a bolha de recirculação primária. Neste caso teste o fluido é injetado na entrada do canal com um perfil de velocidade parabólico.

A maioria dos trabalhos numéricos e experimentais do escoamento sobre um degrau descendente envolve medições do comprimento das bolhas de recirculação e da velocidade para uma gama de números de Reynolds, tanto para escoamento permanente em regime laminar, de transição e turbulento [7] [8] [9] [10].

Neste problema o número de Reynolds é definido como [8]:

$$Re = \frac{\rho U_b H}{\mu} \quad (4.9)$$

onde U_b é dois terços da máxima velocidade de entrada U_{max} e H é a altura do canal a jusante ou de saída.

Na Figura 4.8 pode ser observado os locais onde ocorrem as bolhas de recirculação e também a configuração do escoamento e a definição dos comprimentos no caso tridimensional. De acordo com a literatura e baseado em uma série de simulações realizadas por [8] com diferentes valores de L_u , verificou-se que não existe influência nos resultados previstos quando $L_u \geq 5h$. Para o comprimento de saída L_d , este não afeta o resultado final quanto $L_d = 32h$. Seguindo estes requisitos, pode-se garantir que o escoamento não

será influenciado na entrada e que estará totalmente desenvolvido na saída.

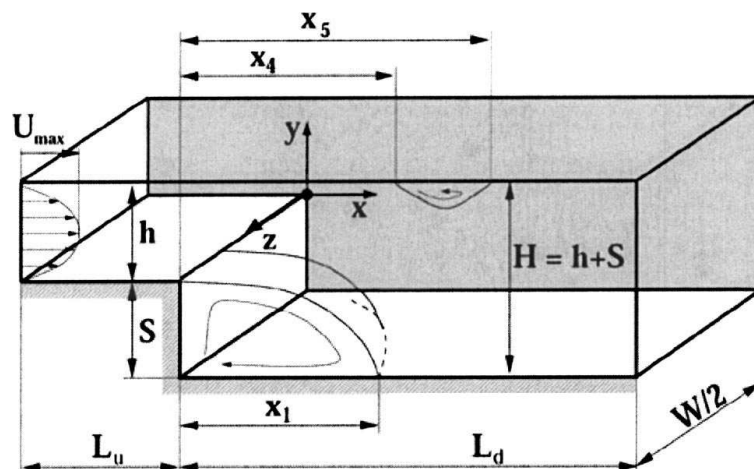


Figura 4.8: Escoamento sobre um degrau descendente [8]

Além das referências citadas anteriormente, mais informações e resultados podem ser encontrados nas seguintes referências: [25], [26], [27] e [28].

Para a validação do código computacional, as dimensões do degrau descendente são $h = 1,13 \times 10^{-3}m$, $S = h$, $L_u = 5h$ e $L_d = 32h$, o que obedece os requisitos para os comprimentos de L_u e L_d , não influenciando nos resultados do escoamento.

Para a geração de malha deste caso teste, é importante citar que diferentemente do caso anterior, onde a utilização da técnica de multibloco foi somente com o intuito de validação do código computacional, para este caso teste a geração da malha através das equações diferenciais elípticas e da técnica de multibloco é um requisito para geração de uma malha de boa qualidade, pois se gerada em uma malha única, na região a jusante do degrau descendente a malha terá qualidade ruim, conforme pode ser visto na Figura 4.9.

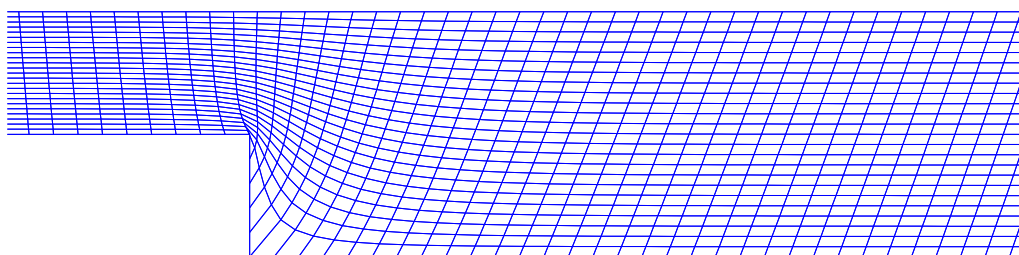


Figura 4.9: Detalhe da malha estruturada única do degrau descendente

Com a utilização da técnica de multibloco é possível obter um refinamento apropriado

em toda malha, conforme mostrado parcialmente na Figura 4.10. Para a geração desta malha, o domínio foi dividido em um bloco a montante (*bloco 1*), que está em vermelho, com uma malha com 25×25 nodos e um bloco a jusante (*bloco 2*), que está em azul, com uma malha com 160×50 nodos.

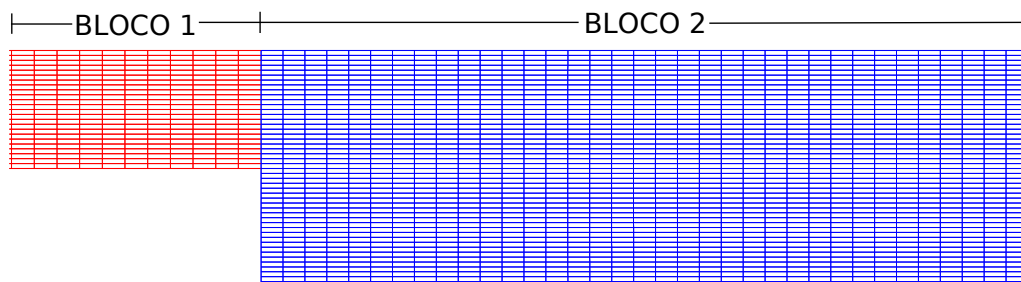


Figura 4.10: Detalhe da malha estruturada multibloco do degrau descendente

O tratamento da fronteira entre os blocos 1 e 2 é semelhante ao caso teste anterior. A fronteira entre os blocos são coincidentes fisicamente e a malha multibloco possui células coincidentes na fronteira, conforme mostrado na Figura 4.11. Como consequência, as variáveis de entrada do bloco 2 também são iguais às variáveis de saída do bloco 1.

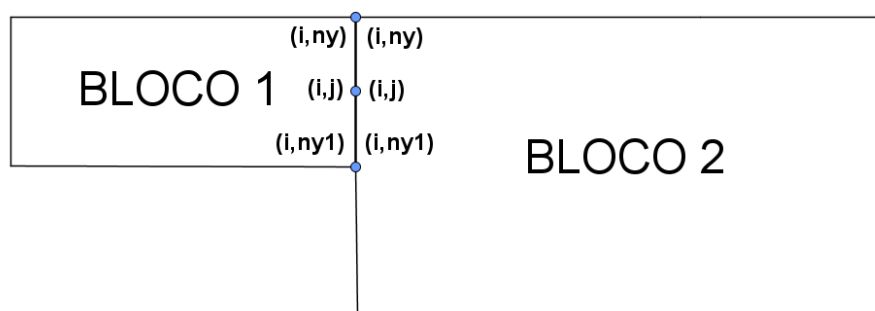


Figura 4.11: Representação da conexão na fronteira

Como a fronteira entre os blocos 1 e 2 são tratadas de forma semelhante ao do escoamento laminar em um canal, observa-se que o vetor das variáveis conservadas $\hat{\mathbf{Q}}$ também é coincidente na fronteira conforme a equação (4.2) e as condições de contorno numéricas também são conforme as equações (4.3) a (4.7).

Para as condições iniciais, em todo domínio considera-se um canal completamente

cheio com os seguintes valores das variáveis:

$$\begin{cases} \rho_0 = 1,21 \text{ kg/m}^3 \\ p_0 = 1,01 \times 10^5 \text{ N/m}^2 \\ u_0 = v_0 = 0,00 \text{ m/s} \\ \mu = 1,81 \times 10^{-5} \text{ kg/(m.s)} \\ \gamma = 1,40 \end{cases} \quad (4.10)$$

Para as condições de contorno, na entrada tem-se uma condição *inlet* através da injeção de fluido com um perfil de velocidade parabólico e na saída tem-se uma condição *outlet*. Nas paredes impermeáveis e não escorregadias (*escoamento viscoso*) tem-se uma condição de contorno *No-Slip* em regime subsônico.

Conforme será visto a seguir, com estas condições de entrada e iniciais e as condições de contorno, os resultados da simulação numérica obtidos para este caso teste através da implementação computacional do Método Original de MacCormack [6] foram satisfatórios em termos qualitativos e quantitativos.

Para a validação do código computacional, inicialmente foi realizada a simulação numérica deste caso teste para um número de Reynolds igual a $Re = 100$. Conforme se observa no campo vetorial de velocidade mostrado parcialmente na Figura 4.12, tem-se o aparecimento de uma bolha de recirculação primária no estado permanente no instante $t = 7,8$ unidades de tempo adimensionais. O comprimento da bolha de recirculação obtida numericamente para $Re = 100$ foi de $x_r = x_1 = 2,82$, se aproximando do trabalho realizado por [7], que para o mesmo número de Reynolds encontrou um comprimento de 3,06 através de experimento laboratorial e de 2,95 através de simulação numérica.

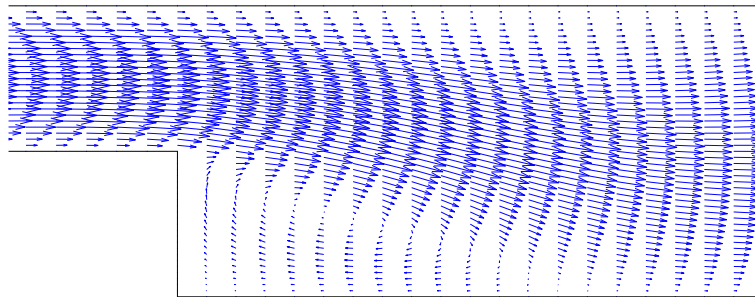


Figura 4.12: Campo vetorial de velocidade na região do degrau descendente

Para esta simulação foram realizadas 155000 iterações em um tempo computacional de 4 horas e 8 minutos, onde o passo de tempo em cada iteração foi de aproximadamente

$\Delta t = 5,0 \times 10^{-5}$ unidades de tempo adimensionais. Na Figura 4.13 tem-se o gráfico de convergência, onde o resíduo foi calculado utilizando a densidade conforme a equação (3.74). Neste gráfico de convergência é possível observar o aumento das oscilações do resíduo devido o aumento da bolha de recirculação ao longo do tempo. Entretanto, tem-se a convergência do método numérico, pois o resíduo decresce conforme aumenta o número de iterações.

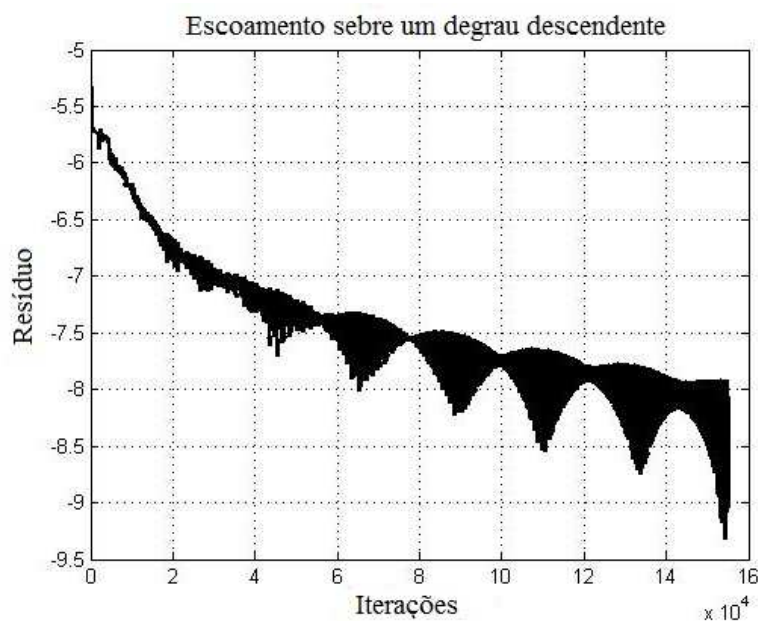


Figura 4.13: Gráfico de convergência do método numérico

De acordo com os resultados numéricos e experimentais encontrados por [7], [8], [9] e [25], o comprimento da bolha de recirculação x_r é proporcional ao número de Reynolds. Neste trabalho foram realizadas uma série de simulações para números de Reynolds na faixa de 50 a 100 e foram obtidos os seus respectivos comprimentos da bolha de recirculação, mostrando que os resultados deste trabalho estão em boa concordância com os resultados encontrados na literatura, conforme pode ser visto na Tabela 4.1.

	Experimental x_r	Numérico x_r		
Re	Trabalho por [7]	Presente trabalho	Trabalho por [8]	Trabalho por [9]
50	1,70	1,61	1,55	1,55
100	3,06	2,82	2,80	2,81

Tabela 4.1: Comparação dos resultados do presente trabalho com os da literatura

Estes resultados também podem ser vistos através da distribuição de velocidades para números de Reynolds igual a 50 e 100 nas Figuras 4.14 e 4.15, respectivamente.

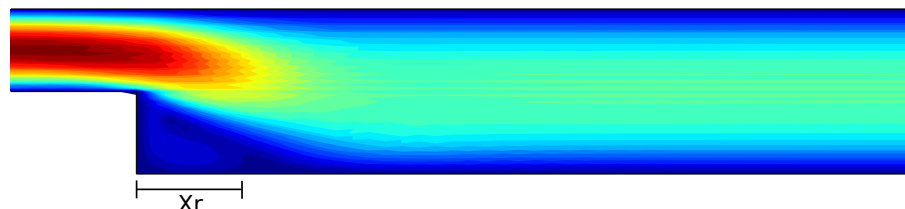


Figura 4.14: Distribuição de velocidade para $Re=50$

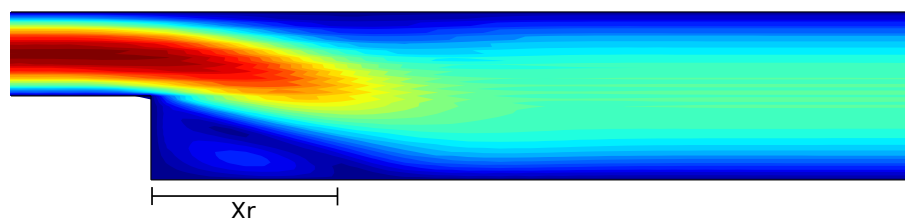


Figura 4.15: Distribuição de velocidade para $Re=100$

Conforme realizado no escoamento laminar em um canal, para considerar que o escoamento sobre o degrau descendente atingiu o estado permanente, no ponto $x = 5h$ foi realizada uma diferença a cada 1000 iterações dos valores nodais da velocidade atual u^n com os valores obtidos a 1000 iterações anteriores u^{n-1000} . Então, o escoamento foi considerado permanente quando a máxima diferença entre u^n e u^{n-1000} foi menor que o erro estimado 10^{-7} .

Através validação do código computacional através dos dois casos testes anteriores, conforme já mencionado, apesar do Método Original de MacCormack [6] ser mais utilizado para solução das Equações de Navier-Stokes para escoamento compressível [2], quando é aplicado para escoamento completamente desenvolvido, também é capaz de obter bons resultados para problemas subsônicos em estado permanente, conforme foi realizado neste trabalho e em [23] e [24].

4.3 Escoamento sobre uma rampa curva

Para avaliar a capacidade do código computacional de capturar ondas de choque é necessário que o mesmo seja validado através de um caso teste com estas características. Então a validação foi realizada através do escoamento supersônico sobre uma rampa

curva, conforme Figura 4.16 e os trabalhos realizados por [11], [12] e [13]. Este caso teste é caracterizado por ser um escoamento transiente, bidimensional, com número de Mach ($M > 1$) e com formação de ondas de choque e leque de expansão.

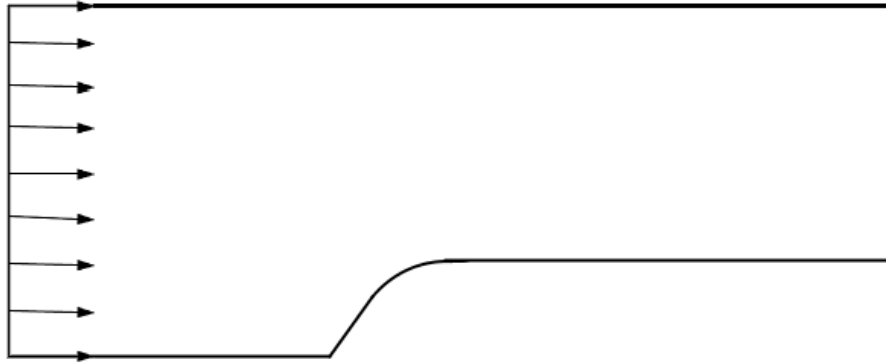


Figura 4.16: Escoamento sobre uma rampa curva

Este problema é modelado pelas equações de Euler, dadas pelas equações (2.9) a (2.16) sem os termos viscosos, conforme [11] [12] e [13].

A geração da malha estruturada multibloco para a rampa curva da Figura 4.16, que possui dimensões $L = 55,86m$ e $h = 29,7m$, foi realizada com dois blocos, sendo o primeiro bloco (*bloco 1*), que está em vermelho, possuindo 110×80 nodos e o segundo bloco (*bloco 2*), que está em azul, possuindo 60×80 nodos, conforme Figura 4.17.

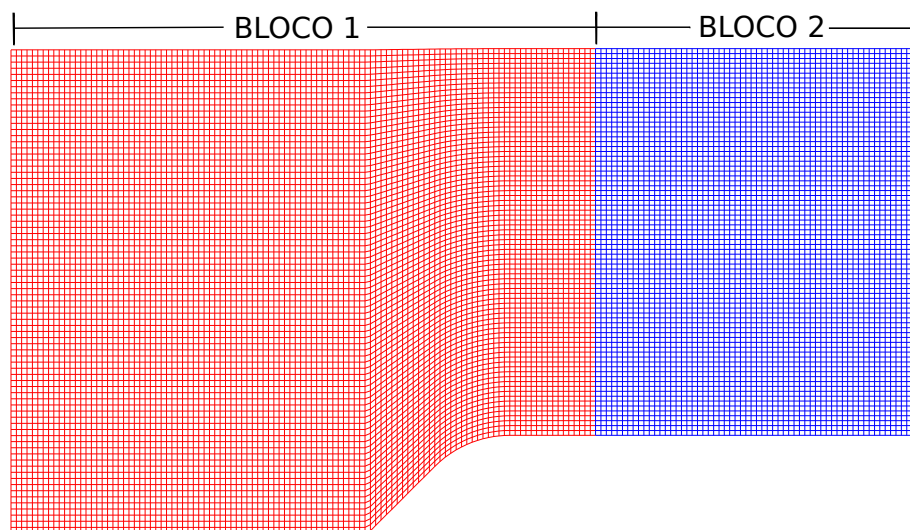


Figura 4.17: Malha estruturada multibloco da rampa curva

O tratamento da fronteira entre os blocos 1 e 2 é semelhante aos dois casos anteriores, sendo o bloco 1 e 2 coincidentes fisicamente, conforme a Figura 4.18. A troca de informações entre os blocos 1 e 2 foi realizada através de uma malha coincidente com a fronteira.

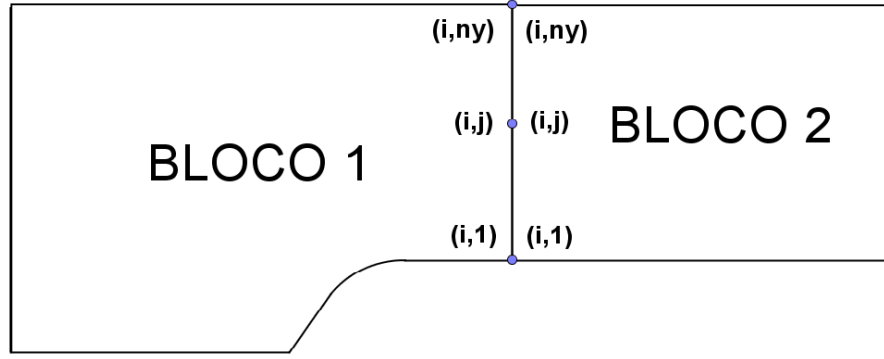


Figura 4.18: Representação da conexão na fronteira

Devido a coincidência da fronteira, a troca de informações entre os blocos foi realizada através do vetor das variáveis conservadas $\hat{\mathbf{Q}}$ conforme a equação (4.2). Desta forma também pode-se aplicar as condições de contorno numéricas de acordo com as equações (4.3) a (4.7).

A validação do código computacional foi realizada para um caso teste supersônico com número de Mach $M = 1,5$, pois os casos testes anteriores eram de escoamento subsônico. Neste caso teste a entrada do canal é alimentada continuamente com um gás perfeito com uma velocidade constante de $500,00m/s$, sendo esta condição de contorno de entrada especificada como *inlet*. Na saída da geometria tem-se uma condição de contorno *outlet* e nas paredes impermeáveis e escorregadias em regime supersônico tem-se uma condição de contorno *Free-Slip*.

Como condições iniciais, em todo domínio considera-se um canal completamente cheio com um gás perfeito com as seguintes características:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_0 = 1,21kg/m^3 \\ p_0 = 1,01 \times 10^5 N/m^2 \\ u_0 = 500,0m/s \\ \mu = 0,0kg/(m.s) \\ \gamma = 1,4 \\ M = 1,5 \end{array} \right. \quad (4.11)$$

Com estas condições iniciais e de contorno, através da aplicação do Método Original de MacCormack [6], tem-se através das Figuras 4.19 e 4.20, que representam, respectivamente, o campo pressão estática e a distribuição do número de Mach no instante $t = 1,6$ unidades de tempo adimensionais, a solução do escoamento sobre uma rampa curva para $M = 1,5$. Comparando estes resultados com os obtidos por [12] pode-se observar que os resultados são bastante semelhantes. Nesta simulação foram realizadas 940 iterações, onde o passo de tempo em cada iteração foi de aproximadamente $\Delta t = 1,5 \times 10^{-3}$ unidades de tempo adimensionais.

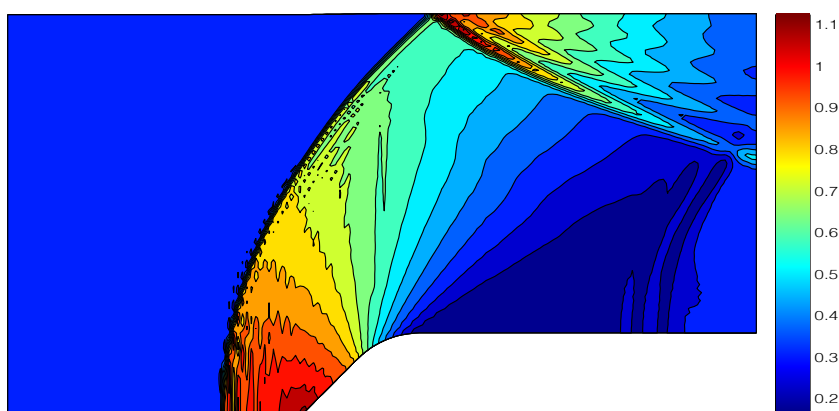


Figura 4.19: Distribuição da pressão estática em $t=1,6$ unidades de tempo

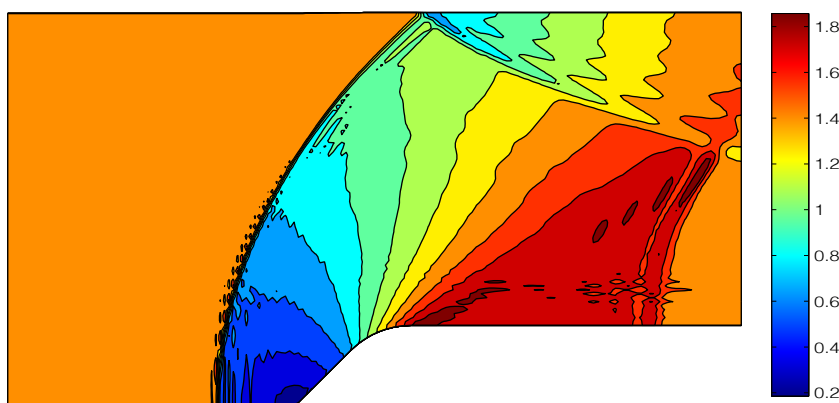


Figura 4.20: Distribuição do número de Mach em $t=1,6$ unidades de tempo

Na Figura 4.21 tem-se o gráfico do resíduo para a solução obtida conforme as Figuras 4.19 e 4.20. Apesar de uma elevação inicial do resíduo, o mesmo decresce posteriormente com o aumento do número de interações, podendo assumir a convergência do método numérico. Assim como nos casos testes anteriores, este resíduo foi determinado utilizando a densidade ρ conforme a equação (3.74).

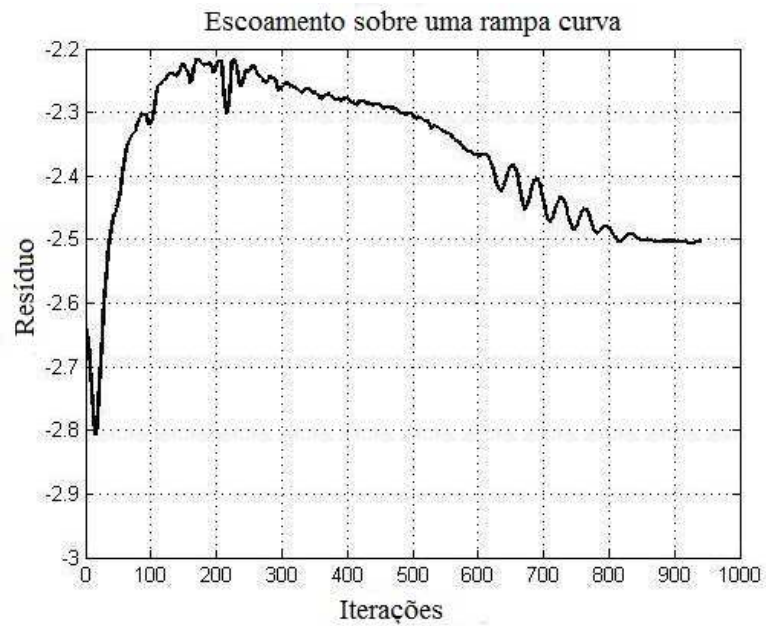


Figura 4.21: Gráfico de convergência do método numérico

É importante observar que a elevação inicial do resíduo ocorre devido a formação da onda de choque destacada na região a montante da rampa curva. Já as oscilações que surgem durante o decréscimo do resíduo ocorrem devido à reflexão da onda de choque destacada na parede superior e suas iterações com o escoamento.

O desenvolvimento do escoamento pode ser discutido detalhadamente através do campo de pressão estático em diversos instantes conforme as Figuras 4.22 a 4.24, onde inicialmente, conforme a Figura 4.22, pode-se observar a formação de uma onda de choque destacada na região a montante da rampa curva [11] [13] [14].

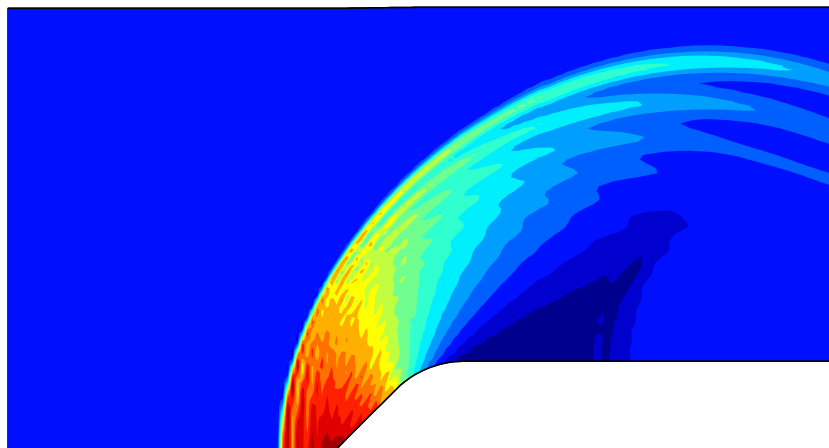


Figura 4.22: Campo de pressão estática para $t=0,9$ unidades de tempo adimensionais

Após a formação da onda de choque destacada, esta se expande e incide na parede superior do domínio, refletindo conforme Figura 4.23. Neste mesmo instante é possível observar a formação de um leque de expansão que ocasiona a aceleração do escoamento do regime subsônico ao supersônico, fenômeno que é melhor observado na distribuição do número de Mach da Figura 4.20, que está neste mesmo instante $t=1,6$ unidades de tempo adimensionais [11] [13] [14].

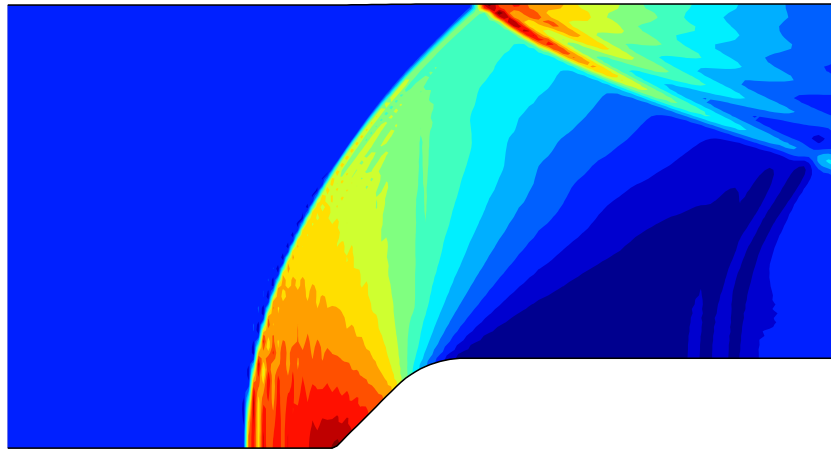


Figura 4.23: Campo de pressão estático para $t=1,6$ unidades de tempo adimensionais

Depois da reflexão da onda de choque na parede superior do domínio, esta reflete na parede inferior, conforme a Figura 4.24. Após a reflexão da onda de choque na parede superior e inferior, é possível observar também na Figura 4.24 o surgimento de uma onda de choque do tipo *lambda* [11] [13] [14].

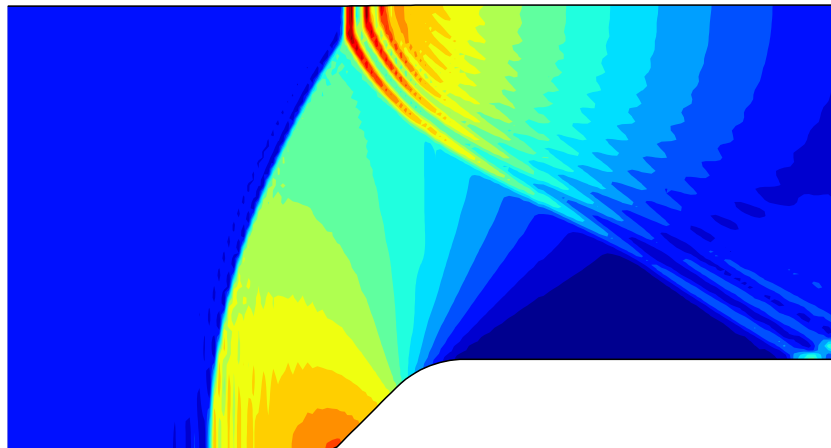


Figura 4.24: Campo de pressão estático para $t=2,7$ unidades de tempo adimensionais

Através da comparação dos resultados numéricos do escoamento supersônico sobre a rampa curva deste trabalho com os resultados obtidos por [11], [12] e [13], conclui-se que os resultados estão de acordo com a literatura e o código computacional está validado também para escoamentos supersônicos.

Através deste processo de validação do código computacional através dos casos testes anteriores para escoamento subsônico e supersônico em regime permanente e transiente, verificou-se que através do modelo matemático e metodologia numérica utilizadas para implementação do código computacional obteve-se soluções numéricas que concordam bastante com os resultados numéricos e experimentais encontrados na literatura. Portanto conclui-se que o código computacional pode ser utilizado para obtenção de soluções em escoamentos de fluidos com características semelhantes ao dos casos testes. Sendo assim o código computacional pode ser aplicado para obtenção de soluções numéricas para o escoamento sobre a geometria irregular da Figura 2.1.

4.4 Escoamento sobre uma geometria irregular

Para simulação numérica de escoamento de fluido sobre geometrias complexas é essencial que a malha seja de boa qualidade para obtenção de resultados satisfatórios. Como já citado anteriormente, uma das motivações para o uso das coordenadas generalizadas é devido às dificuldades encontradas na aplicação das condições de contorno em geometrias complexas utilizando coordenadas ortogonais. No caso da geometria irregular da Figura 2.1, mostrada novamente na Figura 4.25, essa limitação ocorre na região \overline{CDE} , o que motivou o uso das coordenadas generalizadas.

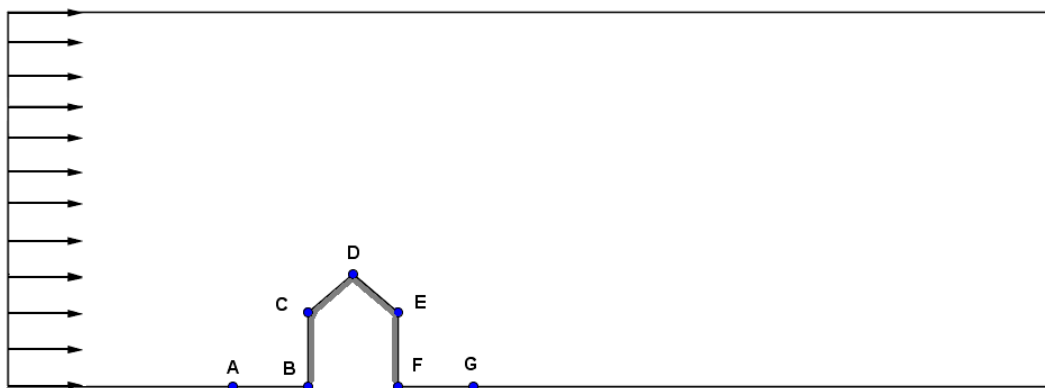


Figura 4.25: Localização dos pontos $\overline{ABCDEFG}$ na geometria irregular da Figura 2.1

Para a geometria irregular da Figura 4.25, inicialmente foi gerada uma malha estruturada única com 200×80 nodos através da solução das equações diferenciais elípticas em coordenadas generalizadas, conforme a Figura 4.26. Assim foi possível eliminar os problemas de aplicação das condições de contorno na região \overline{CDE} . Como pode ser observado, apesar da possibilidade de ajustes das linhas na malha através dos termos fontes P e Q das equações de geração de malha (3.52) e (3.53), para este caso não foi possível obter um refinamento apropriado da malha em toda geometria, pois na região \overline{ABC} e \overline{EFG} a concentração de linhas da malha não foi adequada, resultando em uma malha de baixa qualidade.

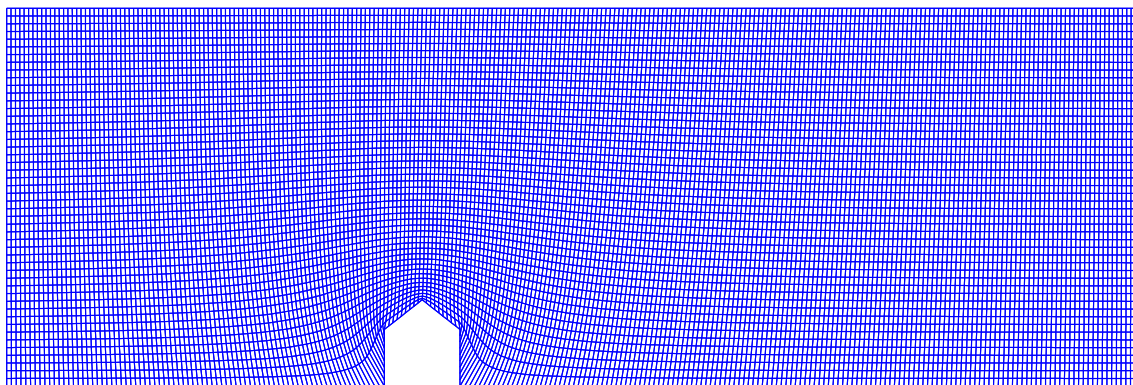


Figura 4.26: Malha estruturada única

Como exposto no Item 3.4 do Capítulo 3, para geração de malhas estruturadas através das equações diferenciais elípticas em coordenadas generalizadas, uma alternativa para resolver o problema de baixa qualidade da malha devido ao refinamento inapropriado em regiões específicas, como é o caso das regiões \overline{ABC} e \overline{EFG} da geometria irregular da Figura 4.25, é a utilização da técnica de multibloco.

Para geração de uma malha estruturada multibloco para a geometria irregular da Figura 4.25, o domínio foi dividido em dois subdomínios (ou *blocos*), conforme é possível observar pela diferença de cores entre os blocos na Figura 4.27. Após a divisão no domínio, para cada subdomínio (ou *bloco*) foi gerada uma malha estruturada através da solução das equações diferenciais elípticas em coordenadas generalizadas, resultando em uma malha de boa qualidade. No primeiro bloco (*bloco 1*), que está em vermelho, foi gerada uma malha com 80×80 nodos, enquanto que no segundo bloco (*bloco 2*), que está em azul, foi gerada uma malha com 130×80 nodos.

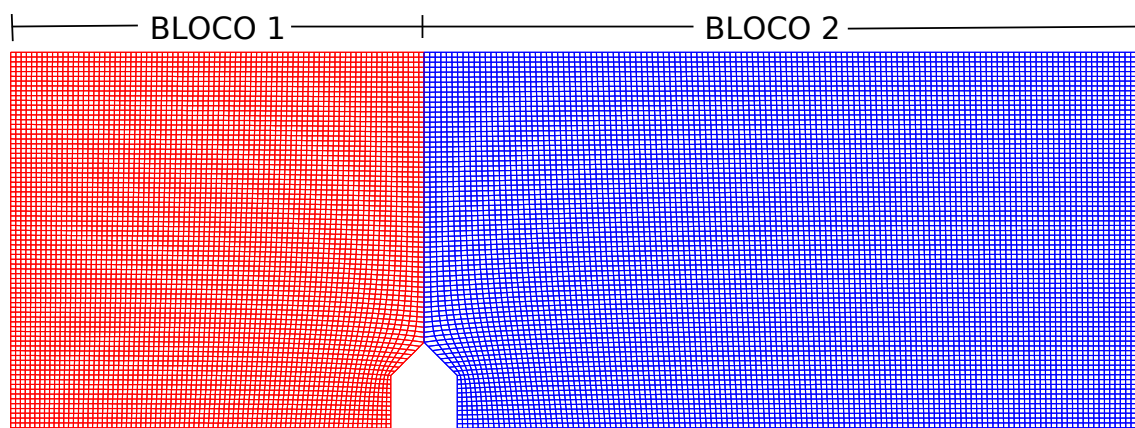
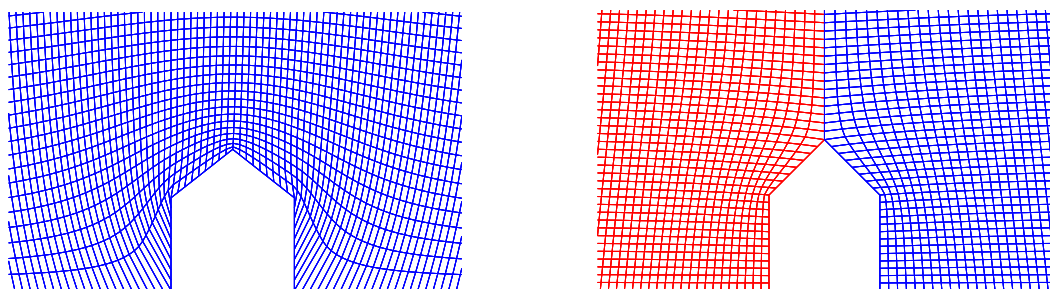


Figura 4.27: Malha estruturada multibloco

Como pode ser observado com mais detalhe através da comparação entre as Figuras 4.28(a)(b), na malha da Figura 4.27 foi obtido um refinamento apropriado em toda geometria, principalmente nas regiões \overline{ABC} e \overline{EFG} da geometria irregular, diferentemente do que ocorreu para a malha da Figura 4.26, comprovando que a utilização da técnica de multibloco é uma ótima alternativa para refinar regiões específicas em geometrias complexas.



(a) Malha estruturada única

(b) Malha estruturada multibloco

Figura 4.28: Comparação entre o refinamento da malha única com a multibloco

Assim como no escoamento laminar em um canal, no escoamento sobre um degrau descendente e no escoamento sobre uma rampa curva, no bloco 1 a fronteira também é considerada como a saída do escoamento, sendo classificada como uma condição de contorno *outlet* e, no bloco 2, a fronteira é considerada a entrada do fluido de saída do bloco 1, sendo classificada como uma condição de contorno *inlet*. Portanto, as variáveis de entrada do bloco 2 são iguais as de saída do bloco 1.

Apesar da coincidência física existente na fronteira entre os blocos 1 e 2, a conexão entre eles é diferente da realizada nos três casos testes anteriores, conforme pode ser observado na Figura 4.29. Para o bloco 1 a coordenada da fronteira é definida como (i, j) , enquanto que para o bloco 2 a coordenada da fronteira é definida como $(i + 1, j)$. Sendo assim, não é garantido que os vetores das variáveis conservadas $\hat{\mathbf{Q}}$ sejam coincidentes na fronteira, pois se o comprimento das células da malha não forem iguais na direção i , o jacobiano da transformação também não será, o que torna os vetores das variáveis conservadas $\hat{\mathbf{Q}}$ diferentes na fronteira.

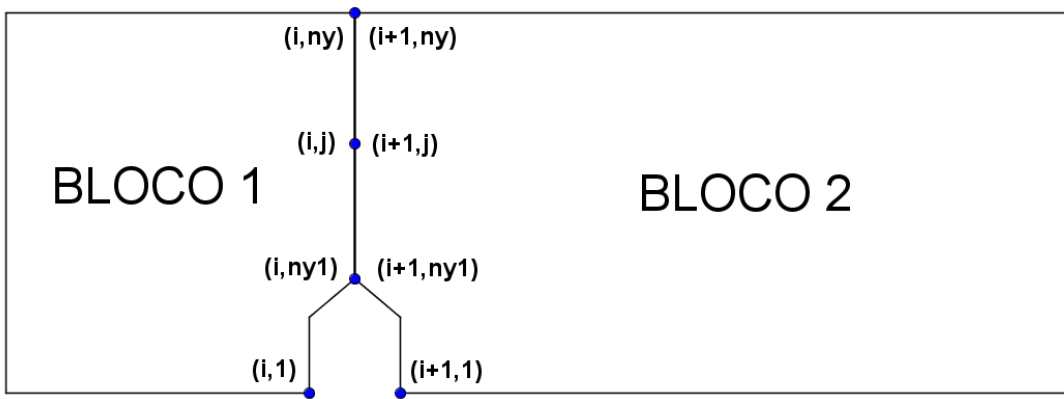


Figura 4.29: Representação da conexão na fronteira

Dessa forma, a troca de informações entre os blocos 1 e 2 foi realizada através das variáveis do escoamento conforme as seguintes expressões:

$$\rho_{i+1,j} = \rho_{i,j} \quad (4.12)$$

$$u_{i+1,j} = u_{i,j} \quad (4.13)$$

$$v_{i+1,j} = v_{i,j} \quad (4.14)$$

$$p_{i+1,j} = p_{i,j} \quad (4.15)$$

$$(E_t)_{i,j} = \frac{p_{i,j}}{(\gamma - 1)} + \frac{1}{2}\rho_{i,j}(v_{i,j}^2 + u_{i,j}^2) \quad (4.16)$$

No final de cada iteração também foi especificada uma condição de contorno numérica na fronteira entre os blocos de modo a evitar uma descontinuidade da solução nesta região, onde os valores atribuídos para cada variável do escoamento são calculados através da média dos valores das variáveis próximas a essa fronteira. Devido as diferenças na conexão entre os blocos, os valores das variáveis do escoamento na fronteira entre os blocos 1 e 2 são determinadas com mais nodos, conforme as seguintes expressões:

$$\tilde{\rho}_{i,j} = \frac{\rho_{i-1,j} + \rho_{i-2,j} + \rho_{i+2,j} + \rho_{i+3,j}}{4}, \quad \tilde{\rho}_{i+1,j} = \tilde{\rho}_{i,j} \quad (4.17)$$

$$\tilde{u}_{i,j} = \frac{u_{i-1,j} + u_{i-2,j} + u_{i+2,j} + u_{i+3,j}}{4}, \quad \tilde{u}_{i+1,j} = \tilde{u}_{i,j} \quad (4.18)$$

$$\tilde{v}_{i,j} = \frac{v_{i-1,j} + v_{i-2,j} + v_{i+2,j} + v_{i+3,j}}{4}, \quad \tilde{v}_{i+1,j} = \tilde{v}_{i,j} \quad (4.19)$$

$$\tilde{p}_{i,j} = \frac{p_{i-1,j} + p_{i-2,j} + p_{i+2,j} + p_{i+3,j}}{4}, \quad \tilde{p}_{i+1,j} = \tilde{p}_{i,j} \quad (4.20)$$

$$(\tilde{E}_t)_{i,j} = \frac{\tilde{p}_{i,j}}{(\gamma - 1)} + \frac{1}{2}\tilde{\rho}_{i,j}(\tilde{v}_{i,j}^2 + \tilde{u}_{i,j}^2), \quad (\tilde{E}_t)_{i+1,j} = (\tilde{E}_t)_{i,j} \quad (4.21)$$

Como é um escoamento transiente, não foi necessário um grande comprimento de entrada e de saída de fluido em relação à região complexa da geometria irregular e nem utilização de condições de contorno reflexiva, pois a solução numérica foi obtida antes da ocorrência de reflexão do fluido nas fronteiras.

Para as condições iniciais, em todo domínio considera-se um canal completamente cheio com os seguintes valores das variáveis:

$$\begin{cases} \rho_0 = 1,21 \text{ kg/m}^3 \\ p_0 = 1,01 \times 10^5 \text{ N/m}^2 \\ u_0 = 0,0 \text{ m/s} \\ \mu = 0,0 \text{ kg/(m.s)} \\ \gamma = 1,4 \end{cases} \quad (4.22)$$

onde o sub-índice 0 representa as variáveis no tempo inicial $t_0 = 0$.

Para o escoamento, na entrada do canal foi considerado a injeção de fluido com um perfil de velocidade reto com velocidade constante de $U_{max} = 33,33m/s$, sendo portanto o número de Mach igual a 0.098. Como condições de contorno, tem-se na parede inferior impermeável e escorregadia (*escoamento não viscoso*) uma condição *Free-Slip* e na parede superior uma condição *Opening*. Na saída do canal, tem-se uma condição de contorno *Outlet*.

Com as condições de entrada e iniciais e as condições de contorno citadas anteriormente, foram realizadas uma série de simulações numéricas para obtenção do campo vetorial de velocidade próxima a região irregular, do campo escalar de pressão sobre a superfície e do desenvolvimento do escoamento sobre a geometria irregular.

Como resultados, inicialmente na Figura 4.30 tem-se o campo vetorial de velocidade no instante $t = 2,79$ unidades de tempo adimensionais. Por ser um escoamento subsônico, conforme o esperado, o fluido contorna a região irregular e segue em direção a saída do domínio.

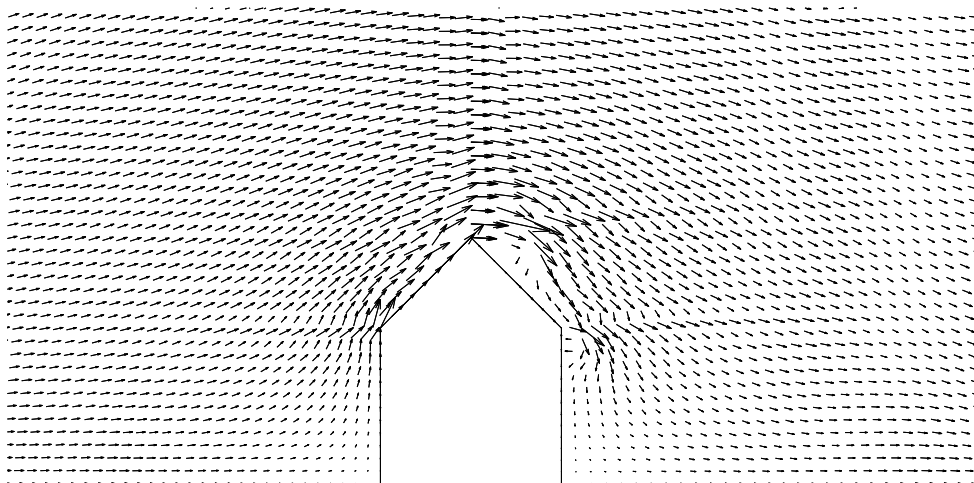


Figura 4.30: Campo vetorial de velocidade próximo a região irregular

O desenvolvimento do escoamento pode ser observado através da distribuição do número de Mach nas Figuras 4.31. Com uma injeção constante de fluido na entrada do domínio, a onda de pressão formada segue em direção a região irregular até incidir com a mesma, gerando uma onda de refração, conforme a Figura 4.31(a). Após a incidência da onda de pressão na região irregular, ela avança em direção a saída do domínio enquanto outra onda de pressão retorna devido a refração que caminha em direção a entrada do domínio, conforme as Figuras 4.31(b)(c).

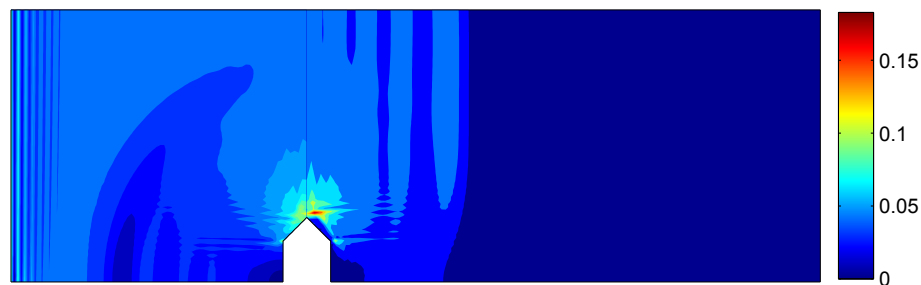
(a) Instante $t = 2,02$ unidades de tempo adimensionais(b) Instante $t = 2,41$ unidades de tempo adimensionais(c) Instante $t = 2,79$ unidades de tempo adimensionais

Figura 4.31: Distribuição do número de Mach na geometria irregular

Na Figura 4.32 tem-se a distribuição de pressão sobre a superfície da geometria irregular no instante $t = 2,79$. Por ser um escoamento subsônico, na região irregular do domínio tem-se velocidades maiores e pressões menores, estando de acordo com os resultados esperados. Com relação às oscilações da distribuição de pressão na entrada do domínio, estas ocorrem devido às ondas de pressão que retornam em direção a entrada do domínio. Para evitar esse tipo de problema neste instante de tempo $t = 2,79$, esta região do domínio deveria ser aumentada em um comprimento de 3 a 4 vezes o valor atual. Porém, isso não foi realizado pois acarretaria em uma malha maior e conseqüentemente em um aumento no custo computacional.

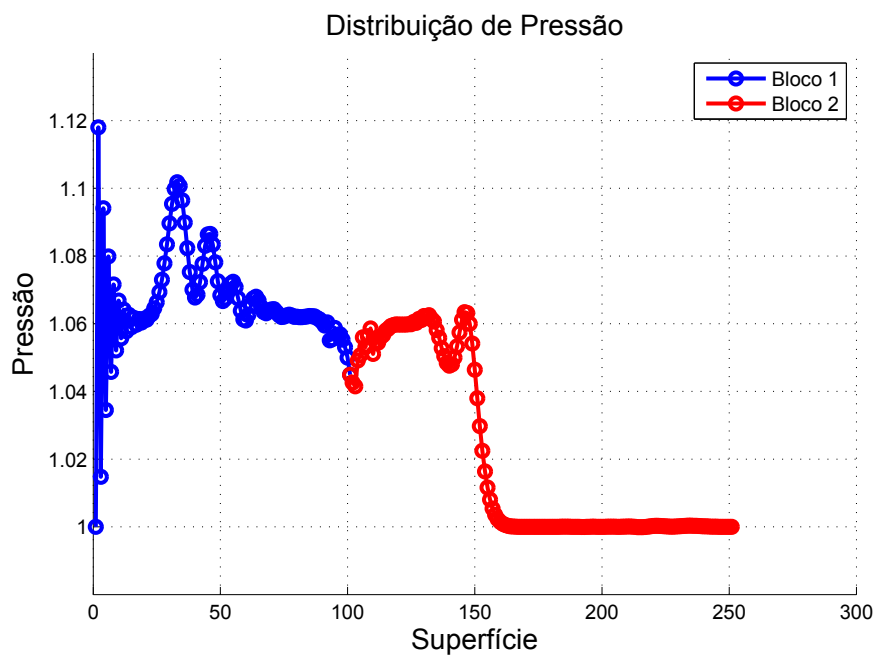


Figura 4.32: Pressão em cada nodo da superfície da geometria irregular

Na Figura 4.33 tem-se a convergência do método numérico no instante $t = 2,79$, pois ocorreu uma redução do resíduo conforme aumentou o número de iterações. As oscilações do resíduo entre 500 a 700 iterações ocorrem devido incidência da onda de pressão na região irregular \overline{BCD} .

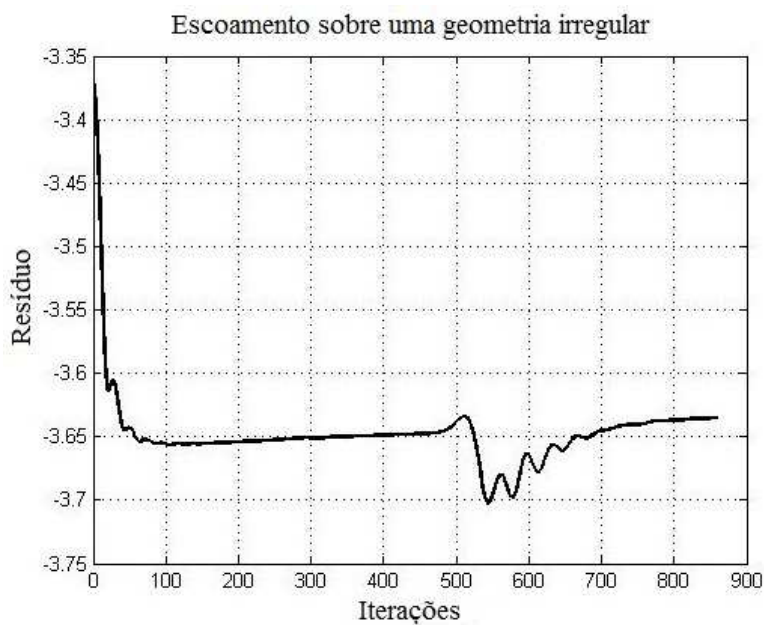


Figura 4.33: Gráfico de convergência do método numérico

Como nos casos testes anteriores, o resíduo foi calculado conforme a equação (3.74), onde foram necessárias 860 iterações para obtenção destas soluções em um tempo computacional de aproximadamente 147.3 segundos.

Pela convergência do gráfico do resíduo da Figura 4.33 e a validação do código computacional através dos casos testes para escoamento subsônico e supersônico, conclui-se que a implementação do código foi adequada e que os resultados apresentados foram satisfatórios.

Capítulo 5

Conclusões e Trabalhos Futuros

Neste capítulo são apresentadas as conclusões referentes a metodologia numérica utilizada para a implementação do código computacional assim como os resultados obtidos.

Também são propostos trabalhos futuros baseados em melhorias no código computacional desenvolvido neste trabalho.

5.1 Conclusões

As técnicas numéricas utilizadas neste trabalho para a implementação do código computacional foram satisfatórias, pois foi possível a obtenção de soluções numéricas de boa qualidade das equações de Navier-Stokes para escoamento compressível subsônico e supersônico em geometrias complexas bidimensionais.

O código computacional foi validado através do escoamento laminar em um canal, do escoamento sobre um degrau descendente e do escoamento sobre uma rampa curva. Em todos estes casos testes as soluções numéricas obtidas estão de acordo com as soluções encontradas na literatura.

Para a obtenção de soluções numéricas para o escoamento sobre a geometria irregular da Figura 2.1, a implementação do código computacional é difícil devido ao domínio complexo. Entretanto, foi possível obter bons resultados, como pode ser observado nas Figuras 4.30, 4.31 e 4.32 e pelo gráfico de convergência da Figura 4.33.

Através dos resultados obtidos nas simulações numéricas conclui-se que a metodologia numérica utilizada para a solução numérica das equações de Navier-Stokes foi correta e abrangente, principalmente devido a utilização de malhas estruturadas multibloco.

Com o objetivo de facilitar a implementação do código computacional foi utilizado o método explícito de MacCormack. Apesar do critério restritivo de estabilidade do método, como se pode ver, foi possível obter bons resultados em todos os casos testes.

Conclui-se que através da utilização de malhas estruturadas multibloco em conjunto com o método explícito de MacCormack foi possível a obtenção de boas soluções numéricas para as equações de Navier-Stokes para escoamento compressível transiente e permanente em regime subsônico e supersônico em geometrias complexas, sendo, portanto ferramentas importantes para a dinâmica dos fluidos computacional.

Além disso, essas técnicas de geração de malha podem ser utilizadas em diversos outros métodos numéricos para obtenção de soluções numéricas das equações de Navier-Stokes, como o método de volumes finitos, sendo, portanto técnicas computacionais gerais.

5.2 Trabalhos Futuros

Abaixo segue uma listagem com algumas sugestões para continuidade deste trabalho:

- Implementação de código computacional para escoamento compressível da geometria irregular com uma malha multibloco com três blocos;
- Implementação de código computacional com malha multibloco com células não-coincidentes na fronteira;
- Implementação de código computacional para escoamento compressível e turbulento;
- Implementação de código computacional para escoamento compressível em geometrias complexas tridimensionais;
- Implementação de um método implícito, ou seja, com menos restrições ao critério de estabilidade.

Referências

- [1] Maliska C.R. *Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional*. LTC, 1995.
- [2] Anderson D.A. *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*. Hemisphere Publishing Corporation - McGraw Hill, 1984.
- [3] Çengel Y.A. *Mecânica dos Fluidos: fundamentos e aplicações*. McGraw-Hill, 1 edition, 2007.
- [4] Thompson J.F. *Numerical Grid Generation: foundations and applications*. Copyright, 1 edition, 1997.
- [5] Erdogan E. Development of a navier-stokes solver for multi-block applications. Master's thesis, Middle East Technical University - METU, Turkey, 2004.
- [6] MacCormack R.W. The effect of viscosity in hypervelocity impact cratering. *AIAA*, pages 69–354, 1969.
- [7] Armaly B.F. Experimental and theoretical investigation of backward-facing step flow. *J. Fluid Mech.*, 127:473–496, 1983.
- [8] Biswas G. Backward-facing step flows for various expansion ratios at low and moderate reynolds numbers. *Journal of Fluids Engineering*, 126:362–374, 2004.
- [9] Shaija C.A., Saleel; A. and Jayaraj S. On simulation of backward facing step flow using immersed boundary method. *American Journal of Fluid Dynamics*, pages 3(2):9–19, 2013.
- [10] Lee T. and Mateescu D. Experimental and numerical investigation of 2-d backward-facing step flow. *Journal of Fluids and Structures*, 12:703–716, 1998.
- [11] Lobão D.C. *High Resolution Schemes Applied to the Euler Equations*. PhD thesis, University of Bristol, UK, 1992.
- [12] Lobão D.C. Numerical simulations of navier stokes for transient flows in 2d. *Computers Math. Applic.*, pages 3601–3611, 2010.
- [13] Allen C.B. *An Efficient Euler Solver for Predominantly Supersonic Flows with Embedded Subsonic Pockets*. PhD thesis, University of Bristol, Dept. of Aerospace Engineering, 1992.
- [14] White Frank M. *Mecânica dos Fluidos*. The McGrawHill Companies, 6 edition, 2007.
- [15] Pulliam T.H. Solution methods in computational fluid dynamics. Technical report, NASA Ames Research Center, Moffett Field, California, January, 1986.

-
- [16] Silva R.L. and Azevedo J.L.F. Simulação de escoamento em qualquer regime de velocidades utilizando malhas multibloco. *COBEM*, 1999.
- [17] Lemos E.M. *Implementação de um Método de Volumes Finitos de Ordem Superior com Tratamento Multibloco Aplicado à Simulação de Escoamento Viscoelásticos*. PhD thesis, Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, COPPE, Rio de Janeiro/RJ, Brasil, 2011.
- [18] Peyret R. and Taylor T.D. *Computational Methods for Fluid Flow*. Springer Series in Computational Physics, 1 edition, 1983.
- [19] Munson B.R. *Fundamentos da Mecânica dos Fluidos*. Edgard Blücher, 4 edition, 2004.
- [20] Cirilo E.R. Simulação do escoamento incompressível num coletor bidimensional. Master's thesis, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre/RS, Brasil, 2001.
- [21] Sahu K.C. Numerical computation of spatially developing flows by full-multigrid technique. Master's thesis, Jawaharlal Nehru Centre for Advanced Scientific Research, Bangalore, India, 2003.
- [22] Fox R.W. *Introdução a Mecânica dos Fluidos*. Livro Técnico e Científicos - LTC, 1998.
- [23] A. Perrin and H.H. Hu. An Explicit Finite-Difference Scheme for Simulation of Moving Particles. Technical report, University of Pennsylvania, Department of Mechanical Engineering and Applied Mechanics, 2006.
- [24] Bernard R.S. Maccormack scheme for incompressible flow. *Computers Math. Applic.*, pages 151–168, 1992.
- [25] Queiroz R.A.B. Desenvolvimento e teste de esquemas upwind de alta resolução e suas aplicações em escoamento incompressíveis com superfície livres. Master's thesis, Universidade de São Paulo - ICMC/USP, São Carlos/SP, Brasil, 2009.
- [26] Amaral Junior J.B. Convecção mista em escoamento laminar ou turbulento num canal aquecido inferiormente com fontes discretas. Master's thesis, Universidade Federal de Itajubá - UNIFEI, Itajubá/MG, Brasil, 2007.
- [27] Rodrigues R.A. and Catabriga L. Estudo de uma formulação explícita-implícita para escoamento incompressíveis. Technical report, Universidade Federal do Espírito Santo - UFES, Vitória/ES, Brasil.
- [28] Jongebloed L. Numerical study using fluent of the separation and reattachment points for backwards-facing step flow. Master's thesis, Rensselaer Polytechnic Institute - RPI, Hartford, USA, 2008.