O QUE É O INFINITO?

Prof. Gustavo Benitez Alvarez

Departamento de Ciências Exatas EEIMVR/UFF, Brasil

benitez.gustavo@gmail.com

Seminários da Agenda Acadêmica 2012

UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

O INFINITO?

- Como surgiu este conceito?
- Como tem sido usado este termo?
- Algumas Referencias!
- O ZERO está relacionado com o INFINITO?
- O INFINITO por alguns pontos de vistas (Religioso, Físico, Matemático e Computação).
- Frases de personalidades que usam o termo INFINITO.
- Objetivo Principal da Palestra!
- Conclusão

Como surgiu o conceito INFINITO?

- O infinito é um conceito muito intuitivo de cada ser humano. Este conceito é usado com freqüência em ciências como a matemática e a física. O estudo dele tem sido interesse de outras áreas como a filosofia e até a religião. Pretende-se abordar algumas idéias que ajudem a entender este conceito tão abstrato.

- Várias pessoas imaginam (especulam ou conjeturam) e até acreditam que a idéia do INFINITO surgiu assim que o ser humano começou se fazer perguntas sobre o “MUNDO” em que ele estava. Por exemplo:

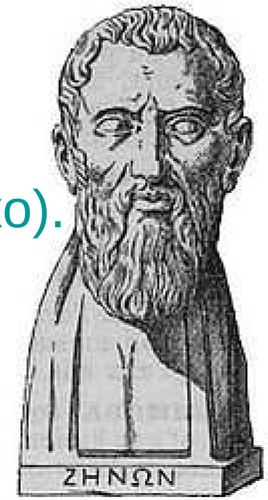
  1 - Este “MUNDO” surgiu em determinado momento ou SEMPRE existiu? Vai existir para SEMPRE ou tem um FIM? Estas são perguntas que envolvem o termo TEMPO. O que é o Tempo?

  2 - Ao se deslocar pela superfície do “MUNDO” encontramos um FIM ou não. Se pudéssemos viajar pelo “CEU” encontraríamos um FIM? Estas são perguntas que envolvem o termo ESPAÇO. O que é o ESPAÇO?

- Até onde eu tenho conhecimento, ninguém tem certeza (prova) que foi assim que surgiu o termo INFINITO. Estas especulações fazem sentido, mas notem que algumas das perguntas acima são perguntas sem respostas definitivas até hoje!

Como surgiu o conceito INFINITO?

- A palavra infinito deriva do Latin "infinitas", que por sua vez deriva da palavra Grega "apeiros", que significa "sem fim".
- As culturas ancestrais tinham diferentes visões sobre o INFINITO. Inicialmente predominavam as visões filosóficas e religiosas (antigos gregos e indianos).
- O primeiro uso matemático do termo INFINITO é atribuído a Zenão de Eleia (490 – 430 a.C., filósofo pré-socrático, paradoxo).



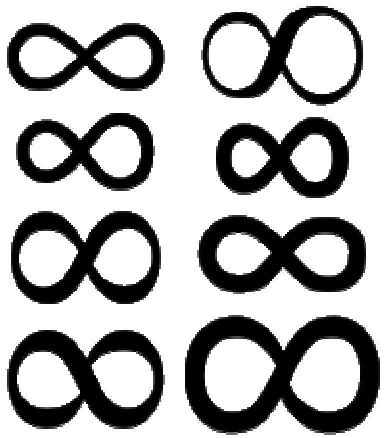
- Segundo a visão de Aristóteles, os gregos helenísticos gostavam de distinguir o infinito potencial do infinito real.
- Escrituras "Indianas - Hinduístas" do século IV-III a. C. estabelecem que: "Se é removido uma parte do infinito ou adicionada, ainda permanece infinito".
- Um texto matemático indiano do século IV a. C. classifica todos os números em três conjuntos: enumeráveis, não-numeráveis e infinitos.

Como surgiu o conceito INFINITO?

- O primeiro uso do símbolo conhecido atualmente por infinito é atribuído a John Wallis em 1655.

Existem várias conjeturas de como surgiu o formato deste símbolo!

Ambas imagens foram retiradas do Wikipedia. http://en.wikipedia.org/wiki/Infinity, acessado em 4/10/2012.



- Devemos ressaltar que o conceito INFINITO não está relacionado unicamente com os números! Este conceito é muito amplo e complexo e guarda relação com “todas”, ou quase todas, as facetas de nossa existência.

- Posteriormente falaremos sobre o INFINITO visto por alguns pontos de vistas.

Como tem sido usado este termo?

- Até “pouco tempo” atrás, talvez século XIX, o termo era usado fundamentalmente em contextos Científicos, Filosóficos e/ou Religiosos.

- Principalmente, a partir do século XX com o fortalecimento de novas formas de produção e consumo (Nova Formação-Econômico-Social) o termo ganha outros usos.

- Hoje em dia se destaca um novo uso do termo: o uso “puramente” Comercial.

- Podemos dizer que o termo tem sido banalizado, vulgarizado ou popularizado (etc., etc., etc.).

- Tudo parece indicar que o termo está de moda, é chamativo e impactante.

- Uma “espécie” de “prova” das afirmações acima é colocada a seguir. Faça uma busca no Google por INFINITY.

Como tem sido usado este termo?

EXEMPLOS DE VÁRIOS USOS DO TERMO QUANDO SE FAZ UMA BUSCA NO GOOGLE "infinity".

- Empresa "*Infinity Bio-Energy*" produz combustíveis limpos e renováveis: http://www.infinitybio.com.br/infinity/web/index_pti.htm

- Empresa "*Infinity Asset Management*" especializada em administração e gestão de fundos, distribuição de títulos, securitização de recebíveis, assessoria e consultoria financeira para empresas: http://www.infinityasset.com.br/

- Projeto "*INFINITY - The Entire Galaxy at Your Fingertips*": http://www.infinity-universe.com/Infinity/index.php

- Título de Filme de 1996 "*Infinity - Um Amor Sem Limites*": http://www.imdb.com/title/tt0116635/

- Projeto "*THE INFINITY PROJECT*": http://www.fi-infinity.eu/portal

- Projeto "*The Infinity Project*": http://www.smu.edu/lyle/infinity

- Refrigerador Frost Free Electrolux "*Infinity (DFI80)*": http://www.electrolux.com.br/produtos/refrigeradores/Paginas/refrigerador-frost-free-electrolux-infinity-dfi80.aspx

- "*Infinity Foods co operative ltd*" is one of the UK's leading wholesale distributors of Organic and natural foods: http://www.infinityfoods.co.uk/

- "*Infinity Ecologic Residence*": http://www.ecomundo.com.br/infinity/

- "*INFINITY Science Center - A NASA Visitors Center*": http://www.visitinfinity.com/

A MAIORIA SÃO USOS NÃO CIENTÍFICO, FILOSÓFICO OU RELIGIOSO! Fazer o que?

Algumas Referencias! Livros e Outros

- Theodore G. Faticoni, The Mathematics of Infinity: A Guide to Great Ideas, Fordham University, Department of Mathematics, John Wiley & Sons, Inc., 2006.
- Plerluigi Miraglia, Finite Mathematics and the Justification of the Axiom of Choice, Department of Philosophy, Kent State University, PHILOSOPHIA MATHEMATICA (3) Vol. 8 (2000), pp. 9-25. Downloaded from http://philmat.oxfordjournals.org/ at UFF on April 26, 2012.
- Melinda & Bob Yarbrough, The Mathematics of Infinity: Georg Cantor's Theory of Sets, St. Gregory's University, 2001, Apresentação em PowerPoint (Infinity.ppt) baixada da Internet.
- Peter Koepke, The Category Of Inner Models, Benedikt Löwe, Florian Rudolph (eds.), Foundations of the Formal Sciences, Refereed Papers of a Research Colloquium, Humboldt–Universität zu Berlin, May 7-9, 1999, p. 247–273. 1999 Kluwer Academic Publishers. Printed in the Netherlands.
- Fred M. Katz, Sets and their Sizes, MIT PhD Thesis, (supervisor:G. Boolos), 2001, arXiv:math/0106100v1 [math.LO] 13 Jun 2001.
- Charles Seife, ZERO: The Biography of a Dangerous Idea, PENGUIN BOOKS, 2000. ISBN: 1-4295-2191-0.

Algumas Referencias! Livros e Outros

- Anne Newstead, Size Matters, University of New South Wales, Sydney, Australia, Texto em formato .DOC baixado da Internet.
- Peter Suber, A Crash Course in the Mathematics Of Infinite Sets, Philosophy Department, Earlham College, Published in the St. John's Review, XLIV, 2 (1998) 35-59.
- Matthew W. Parker, Philosophical Method and Galileo’s Paradox of Infinity, Department of Philosophy, Logic and Scientific Method, London School of Economics.
- Jeremy Gwiazda, Infinite numbers are large finite numbers, Texto em formato .DOC baixado da Internet.
- -----------, Standard 15 — Conceptual Building Blocks of Calculus, New Jersey Mathematics Curriculum Framework, Texto em formato .PDF (math13.pdf) baixado da Internet.

Algumas Referencias! Páginas da Internet (4/10/2012)

- http://www.lotsofessays.com/viewpaper/1705553.html
- http://www.newadvent.org/cathen/08004a.htm
- http://www.technologyreview.com/blog/arxiv/27656/
- http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/HistTopics/Infinity.htm
- http://www.earlham.edu/~peters/writing/infapp.htm
- http://www.earlham.edu/~peters/writing/infinity.htm
- http://www4.wittenberg.edu/academics/mathcomp/shelburne/Infinity/Links.html
- http://prog21.dadgum.com/101.html
- http://bigthink.com/ideafeed/3-d-printing-infinite-computing-paradise
- http://en.wikipedia.org/wiki/Infinite_Computer_Solutions
- http://en.wikipedia.org/wiki/Hypercomputation
- http://en.wikipedia.org/wiki/Fallacies_of_Distributed_Computing
- http://otb.manusoft.com/2010/12/infinite-computing-bah-humbug.htm

Algumas Referencias! Páginas da Internet (4/10/2012)

- http://en.wikipedia.org/wiki/Infinity
- http://scidiv.bellevuecollege.edu/math/infinity.html
- http://pespmc1.vub.ac.be/INFINITY.html
- http://www.youtube.com/watch?v=UPA3bwVVzGI
- http://www.infinityfoundation.co.nz/
- http://en.wikipedia.org/wiki/Axiom_of_infinity
- http://www.smu.edu/lyle/infinity
- http://oque.dictionarist.com/infinity
- http://dictionary.reference.com/browse/infinity
- http://www.reference.com/browse/John+Wallis
- http://www.mathematicsofscience.com/Infinity_Mathematical
- http://en.wikipedia.org/wiki/Zero_one_infinity_rule
- http://plus.maths.org/content/does-infinity-exist
- http://www.deelip.com/?p=4963

O ZERO está relacionado com o INFINITO?

- Talvez uma antiga questão que acompanhou o ser humano durante "milênios" e sem resposta definitiva nos dias de hoje possa orientar nossos pensamentos.

- Que acontecerá se dividimos em duas metades um arame muito fino de metal. Logo pegamos uma das metades e voltamos a dividir em duas metades e repetimos este procedimento para uma das metades.

  1 - Esta divisão pode ser feita indefinidamente (infinitas vezes)?

  2 - Em caso que possa ser feita restará algum pedaço de "metal" ao final?

- Para Leibniz (cálculo infinitesimal (Newton)) tanto as quantidades infinitésimas quanto as infinitas eram quantidades ideais, que diferem das quantidades apreciáveis, mas que tem as mesmas propriedades.

- Kronecker era cético em relação à noção de infinito e como era usado por seus colegas matemáticos em 1870. Este ceticismo foi desenvolvido em "philosophy of mathematics" e denominado "finitism", que entre suas variantes leva a uma forma extrema das escolas filosóficas e matemáticas do construtivismo e intuicionismo.

O INFINITO visto pela Religião.

- Entre todas as RELIGIÕES vamos escolher o CATOLICISMO. Segundo a Enciclopédia Católica a palavra INFINITO tem origem no LATIN "infinitas" e tem um papel fundamental na filosofia e teologia cristã.

  Definição: Aquilo que NÃO TEM FIM, LIMITE, FRONTEIRA e portanto NÃO PODE SER MEDIDO POR UM PADRÃO FINITO.

  Este conceito de infinito é diferente de "all-being" (tudo-ser/estar). Ou seja, este INFINITO permite a existência de outras coisas enquanto o "all-being" significa que não existe nenhuma realidade fora dele.

  Para Spinoza uma definição falsa é considerar o INFINITO como aquilo que inclui todas as coisas em si. INFINITO não deve ser confundido com INDETERMINADO. O INFINITO é a idéia mais determinada de todas, onde todas as possibilidades são realizadas.

- Devemos sempre lembrar que existem diferentes tipos de infinitos para o CATOLICISMO. Ou seja, existe uma DIVISÃO.

Ref. CATHOLIC ENCYCLOPEDIA, on-line, acessada em 11/10/2012 ,
http://www.newadvent.org/cathen/08004a.htm

O INFINITO visto pela Religião.

- Se destacam duas DIVISÕES:

 1- o infinito em apenas um aspecto (secundum quid) ou infinito parcial, e o infinito em todos os aspectos (simpliciter) ou o infinito absoluto;

 2- o realmente infinito e o potencialmente infinito que é capaz de um crescimento indefinido. Hegel chama o infinito potencial de infinito impróprio e o infinito real de infinito verdadeiro.

 Um exemplo de infinito real em relação ao aspecto duração é a ALMA INMORTAL. Um exemplo de infinito potencial é o percurso de um corpo que se move no espaço livre.

- O INFINITO de DEUS: Dogma Católico que declara que Deus é todo-poderoso, eterno, imenso, incompreensível, infinito em intelecto e vontade e toda a perfeição, real e essencialmente distinto do mundo, infinitamente abençoado em si mesmo e por si mesmo, e indizivelmente sobre todas as coisas que podem existir e ser pensadas além Dele . (Bíblia Sagrada - 1 Reis 8:27; Salmo 144:3; 146:5; Sirach. 43:29 sqq, Lucas 1:37, etc).

O INFINITO visto pela Religião.

- O Vaticano, historicamente , tem-se confrontado com as questões teológicas associadas às novas descobertas científicas.

- Em 2003 o Vaticano anunciou um projeto sobre ciência e religião chamado de "Science, Theology, and the Ontological Quest (STOQ)" para melhorar a relações entre Igreja e cientistas.

- Como parte deste projeto foi realizado um congresso (9-11/11/2005) na Pontifical Lateran University com o tema "infinity in the sciences in Philosophy and in Theology."

- Este projeto pretende inserir as Universidades Pontifícias em pesquisas focadas em identificar o significado do INFINITO e outras questões importantes em matemática.

- O Congresso foi abençoado pelo Papa Bento XVI. Ele acredita que o avanço científico é uma bênção para os seres humanos, ou então sua ruína. Ele afirma que a racionalidade da ciência vai ser moderada pela espiritualidade de religião.

http://www.lotsofessays.com/viewpaper/1705553.html

O INFINITO visto pela Computação.

- A Norma Técnica para Aritmética de Ponto Flutuante (IEEE 754, Institute of Electrical and Electronics Engineers,1985) que norteia muitos "hardware" define:

  \- Formatos Aritméticos: conjuntos de dados de ponto flutuante binários e decimais, que consistem em números finitos, infinitos e valores especiais "não números" (NaNs).

  números finitos: descritos por três inteiros $(-1)^S \times C \times B^Q$, onde S representa o sinal, C a parte significante e Q o expoente da base B, que pode ser binária ou decimal.

  infinitos: +∞ e -∞.

  não números: dois tipos "*quiet NaN*" (QUIETO) e "*signaling NaN*" (SINALIZADOR).

- Desta forma os valores finitos que podem ser representados num formato são determinados por B, C e o máximo de Q. Portanto, existirá um menor valor positivo diferente de zero "m" e um maior valor positivo "M". Os números entre zero e "m" são chamados de subnormais!

O INFINITO visto pela Computação.

- Todo número que tenha a parte significante igual a zero é chamado de ZERO (C=0). São zeros que possuem sinal determinado por S (+0 e -0).

- A norma estabelece dois tipos de regras de arredondamento: arredondamento a um valor mais próximo e arredondamento direcionado. Entre os arredondamentos dirigidos define três:

  - arredondamento dirigido para zero (truncamento).

  - arredondamento dirigido para infinito positivo ($+\infty$).

  - arredondamento dirigido para infinito negativo ($-\infty$).

- A norma define 5 exceções possíveis:

  - Invalid operation (exemplo, raiz quadrada de números negativos e retorna qNaN por default).

  - Division by zero (operação com finitos que resulta num “infinito exato”, exemplo, 1/0 ou log(0) e retorna ±infinity por default).

  - Overflow (resultado muito grande (R>M) para ser representado corretamente e retorna ±infinity por default).

  - Underflow (resultado muito pequeno (0<R<m números subnormais) que é inexato e retorna “denormalized value” por default).

  - Inexact (retorna o resultado arredondado corretamente por default).

O INFINITO visto pela Computação.

- Resumindo, a Norma Técnica para Aritmética de Ponto Flutuante (IEEE 754) especifica os valores ±infinito que são o resultado de exceções possíveis de operações aritméticas (overflow e divisão por zero).

- Existe o termo "Hypercomputation" ou "super-Turing computation" que refere-se a modelos de computação que vão além, ou não são comparáveis a idéia de computabilidade de Turing. Resumidamente, estes modelos de computação "são" maquinas de Turing que podem executar infinitas etapas. Existe um bom debate sobre este assunto e material disponível.

- Trafega pela Internet outro termo "Infinite Computing" que pode levar a confusões e mal entendidos. Segundo alguns o termo foi lançado na Autodesk University, Autodesk CEO Carl Bass em dezembro de 2010 em uma tentativa de definir perspectiva da Autodesk para "Computação em Nuvens". Alguns dizem que é uma metáfora porque "Computação Infinita" não é realmente infinita!

O INFINITO visto pela Física.

- Os gregos acreditavam que qualquer grandeza física poderia, em teoria, ser representada por um número racional. Eles pensavam que o tamanho (valor) da grandeza era formado por um número inteiro de unidades mais alguma fração de outra unidade.

- No século V d. C. Hippasus de Metapontum demonstrou, usando um método geométrico, que o comprimento da hipotenusa de um triangulo retângulo não pode ser representado por um número racional.

- Este problema foi resolvido matematicamente introduzindo um novo conjunto de números: os irracionais. Os irracionais junto com os racionais formam os conhecidos números reais.

- Atualmente na física existem Modelos e Teorias CONTÍNUOS e DISCRETOS: física clássica e física quântica.

- A física clássica (teorias contínuas) modela a variação das grandezas através de transições graduais sem mudanças bruscas ou descontinuidades. Para construir a teoria usam a propriedade dos números reais serem densos e portanto as grandezas representadas por eles também.

O INFINITO visto pela Física.

- A física quântica (teorias discretas) modela a variação das grandezas através de certas quantidades finitas predefinidas denominadas “quanta”. Neste caso as transições são discretas existindo descontinuidades.

- Por exemplo, o espectro eletromagnético pode ser CONTÍNUO (com a energia em todos os comprimentos de onda) ou DISCRETO (energia em apenas certos comprimentos de onda).

- Atualmente na física para realizar medições de grandezas “contínuas” e “discretas” são usados, respectivamente, aproximações de números reais e os inteiros.

- Portanto, experimentalmente é assumido que nenhuma quantidade mensurável possa ter um valor (real ou inteiro) infinito. Caso contrário seria difícil (“impossível”) por meios experimentais (físicos - materiais) gerar ela. Por exemplo, partícula ou corpo com massa infinita, comprimento ou energia infinita.

- O que significa realizar medições de grandezas “contínuas” representadas por aproximações de números reais?

O INFINITO visto pela Física.

- Atualmente, muitas pessoas acreditam que não existe medição física sem erro. Ou seja, de qualquer experimento obtemos: Valor ± Erro.

- Este Erro depende de vários fatores (instrumentação e/ou fenômeno, etc.) e seguindo este raciocínio não poderá ser zero.

- Isto nos leva a acreditar que o Valor não poderá ter um número INFINITO de decimais. Logo, não poderá ser um irracional. Portanto, de todos os reais possíveis que dispomos apenas sobram os racionais.

- Se este raciocínio for verdadeiro, então os gregos não estavam errados ao acreditar que qualquer grandeza física poderia ser representada por um número racional.

- A recusa de valores infinitos para quantidades mensuráveis é justificada com motivações metodológicas e pragmáticas.

- As teorias físicas são construídas usando “fórmulas – expressões matemáticas” e um valor infinito obtido com estas “formulas” pode estar indicando que a teoria falhou ou está perto de seus limites de validez.

O INFINITO visto pela Física.

- Por exemplo, as leis da força gravitacional de Newton e eletrostática de Coulomb para o caso de r=0. Ou seja, se a distancia entre as partículas é zero a formula retorna valor de força INFINTO. Isto não quer dizer que "realmente" a força entre duas partículas possa ser INFINITA!

- O fato de exigir valores finitos para as quantidades mensuráveis não impede que o INFINTO seja usado para construir as teorias.

- Por exemplo, é comum o uso de séries infinitas, funções não limitadas e etc. Entretanto, o resultado final do modelo deve possuir "significado físico".

- Um exemplo do exposto acima ocorre na Teoria Quântica de Campos, onde infinitos surgem sendo necessário interpretados de forma tal que levem para resultados com significado físico (processo chamado de re-normalização).

- Todos já ouvimos falar que "nosso universo" não tem limites. De outras forma, "nosso universo" é finito ou infinito?. Estas são questões levantadas há muito tempo e ainda sem solução!

O INFINITO visto pela Física e pela Computação.

- Notem que o INFINITO visto pela COMPUTAÇÃO é um caso particular do INFINITO visto pela FÍSICA!

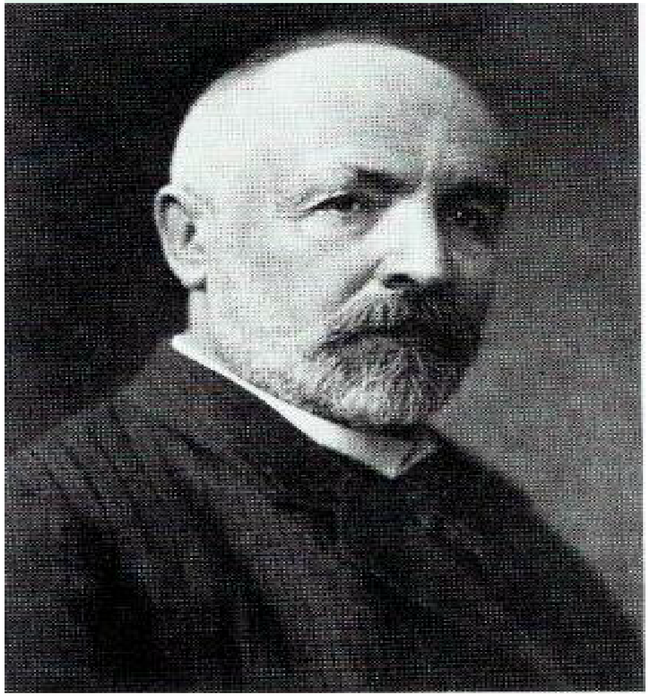
- E não deveria ser diferente porque os dispositivos eletrônicos que temos hoje em dia são dispositivos físicos. Portanto, devem obedecer as leis físicas.

O INFINITO visto pela Matemática.

- O infinito matemático era entendido de forma semelhante ao infinito físico até o século XIX, quando o matemático Georg Cantor levantou outro ponto de vista.

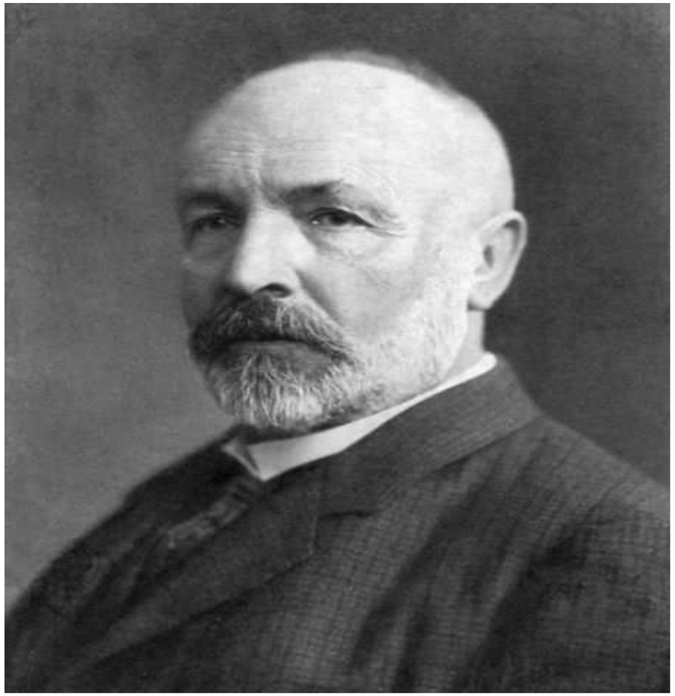
- números ordinais: a?

- números cardinais: a?



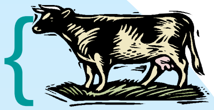
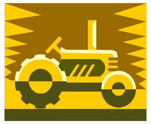
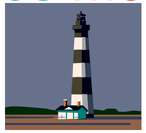
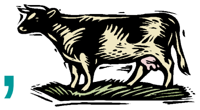
Cantor fez algo que ninguém tinha feito até o momento.

Ou pelo menos, não se tem noticias de que alguém fez as mesmas (equivalentes) perguntas que ele!



O INFINITO visto pela Matemática.
Teoria de Conjuntos!

- Dois CONJUNTOS são IGUAIS se ambos tem os mesmos elementos.

{  ,  ,  ,  }={  ,  ,  ,  }

$$C:=\{1, 2, 3, 4\}=\{4, 1, 2, 3\}:= D\neq\{1, 2, 3, 4, 5\}:=E$$

- Dois CONJUNTOS são EQUIVALENTES se existe entre seus elementos uma correspondência bijetora (Um a Um). Denota-se ~.

  Os quatro primeiros conjuntos acima são equivalentes. Mas eles não são equivalentes ao conjunto E.

- Um CONJUNTO B é SUBCONJUNTO do CONJUNTO A se todos os elementos de B são elementos de A.

$$C\subset D,\ D\subset C,\ D\subset E, \text{ mas } E\not\subset D$$

- Note que estes exemplos são CONJUNTOS FINITOS!

O INFINITO visto pela Matemática.
Teoria de Conjuntos!

- Um CONJUNTO é FINITO se existe um número natural *n* tal que o conjunto {*1, 2, 3, ..., n*} é equivalente a ele ou se ele é o CONJUNTO VAZIO.

  Note que dois CONJUNTOS FINITOS quaisquer com a mesma quantidade de elementos (tamanho) são EQUIVALENTES!

  Mas, será que todos os CONJUNTOS são FINITOS? Ou existem CONJUNTOS que não são FINITOS?

- Um CONJUNTO é INFINITO se ele não é FINITO. Ou seja, se seus elementos não podem ser contados completamente. Ou se ele é equivalente a um SUBCONJUNTO dele mesmo. Por exemplo:

  Os números naturais N = {1, 2, 3, 4, … }.

  Os números inteiros Z = {… -2, -1, 0, 1, 2, …}.

  Os números racionais Q = {p/q tal que p, q$\in$Z e q$\neq$0}.

  Os números irracionais I que não podem ser representados por frações de inteiros.

  Os números reais R = Q$\cup$I que correspondem aos pontos de uma linha reta (contínuo).

  $N \subset Z \subset Q \subset R$ e $I \subset R$, mas $I \not\subset Q$ e $Q \not\subset I$.

O INFINITO visto pela Matemática (Cantor).
Teoria de Conjuntos!

- Mas será que todos os CONJUNTOS INFINITOS tem o mesmo tamanho ("número de elementos")? Ou em outras palavras, será que todos estes conjuntos são equivalentes?

- Notaremos agora que comparar CONJUNTOS FINITOS é muito mais simples que tratar com CONJUNTOS INFINITOS.

- Dois CONJUNTOS INFINITOS: os NATURAIS e os QUADRADOS INTEIROS!

NATURAIS = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, …, n, … }.

QUADRADOS INTEIROS = {1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, …, n^2, … }.

- Eles são equivalentes? Eles tem o mesmo tamanho?
- Estes conjuntos são equivalentes porque podemos fazer corresponder a cada natural um único quadrado e vice-versa (correspondência bijetora!)

O INFINITO visto pela Matemática (Cantor).
Teoria de Conjuntos!

- Outros exemplos de CONJUNTOS INFINITOS que são equivalente!

PARES POSITIVOS são equivalentes aos QUADRADOS INTEIROS

$$\{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, \ldots, 2n, \ldots\}, \text{ onde } n \in N$$
$$\updownarrow$$
$$\{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, \ldots, n^2, \ldots\}$$

- Então, os NATURAIS são equivalentes aos QUADRADOS INTEIROS, PARES, IMPARES e a outros CONJUNTOS INFINITOS!

- Os NATURAIS são equivalentes aos INTEIROS?

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, \ldots, \text{par}, \quad \text{impar}, \quad \ldots\}$$
$$\updownarrow$$
$$\{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 5, -5, \ldots, \text{par}/2, (1-\text{impar})/2, \ldots\}$$

- Então, os NATURAIS e INTEIROS são CONJUNTOS INFINITOS EQUIVALENTES, mesmo que $N \subset Z$!

- Ou seja, eles tem o mesmo tamanho? Isto parece simples?

O INFINITO visto pela Matemática (Cantor).
Teoria de Conjuntos!

- O fato de um conjunto estar contido em outro e terem o mesmo tamanho foi motivo de muito debate! Devemos distinguir dois casos: conjuntos finitos e conjuntos infinitos.

- Isto levou, através dos tempos, a vários PARADOXOS!

- PARADOXO DE GALILEO: os números quadrados parecem ser menores (em quantidade) e também iguais aos inteiros positivos!

- O Principio de Euclides: O todo é maior que a parte. (estritamente maior que qualquer parte dele). Principio filosófico considerado verdade absoluta durante muito tempo e ainda em debate.

- O Principio de Hume: Duas coleções são iguais em numerosidade se e somente se seus membros podem ser postos em correspondência um-a-um.

O INFINITO visto pela Matemática (Cantor).
Teoria de Conjuntos!

- Os NATURAIS são equivalentes aos RACIONAIS? SIM! Por que? Porque existe a correspondência um-a-um entre eles!

- Os NATURAIS são equivalentes a todo CONJUNTO INFINITO? NÃO!

- Ou em outras palavras, todos os conjuntos infinitos são equivalentes? Não!

- Por exemplo, os NATURAIS não são equivalentes aos Irracionais! Logo, os NATURAIS não dever ser equivalentes aos REAIS! Isto pode ser provado usando o método da contradição da seguinte forma:

O INFINITO visto pela Matemática (Cantor).
Teoria de Conjuntos!

- Uma forma de provar que os NATURAIS não são equivalentes aos REAIS usando o método da contradição consiste em:

  - Suponha o contrário: que os naturais são equivalentes aos reais. Logo, deve existir uma correspondência um-a-um entre eles!

  - construa um real tal que a ele não corresponda nenhum natural. Isto é uma contradição. Logo a suposição inicial está errada!

- Mas o que tudo isto significa? Significa que encontramos dois conjuntos com INFINITOS elementos que tem "tamanhos" diferentes. Ou seja, existem mais elementos no conjunto dos Reais que no conjunto dos Naturais.

- Mas como? Se ambos são infinitos?

O INFINITO visto pela Matemática (Cantor).
Teoria de Conjuntos!

- Mas como? Se ambos são infinitos? “Exatamente”!

- “EXATAMENTE”! Existem dois tamanhos de INFINITO! O INFINITO dos NATURAIS é menor que o INFINITO dos REAIS. Ou seja, são diferentes INFINITOS.

- Vamos denotar por “$\aleph_0$ – número aleph” o INFINITO de todos os conjuntos infinitos equivalentes aos NATURAIS. Ou seja, a cardinalidade (tamanho) destes conjuntos é a mesma $\aleph_0$.

- Vamos denotar por $\aleph_1$ a cardinalidade do INFINITO de todos os conjuntos equivalentes aos Reais. Ou seja, a cardinalidade do CONTÍNUO!

- Então, temos que $\aleph_0 < \aleph_1$. Da mesma forma que a cardinalidade de um conjunto com quatro elementos é maior de que outro com três: $3<4$.

O INFINITO visto pela Matemática (Cantor).
Teoria de Conjuntos!

- Rapidamente surge outra pergunta!

- Existe algum conjunto INFINITO com cardinalidade diferente de $\aleph_0$ e $\aleph_1$? Ou seja, existem outros tamanhos de infinitos?

- Bom, se eles existirem podemos denotar sua cardinalidade por $\aleph_2$, $\aleph_3$ e etc.

- É do bom senso supor que se eles são diferentes deve existir alguma relação de ordem entre eles.

- Isto é, algum é maior que o outro: $\aleph_1 < \aleph_2$ ou $\aleph_2 < \aleph_1$. Porque senão seriam iguais!

O INFINITO visto pela Matemática (Cantor).
Teoria de Conjuntos!

- Mas quando a cardinalidade de um conjunto é maior que a de outro?

- Se os conjuntos são finito é fácil responder, já que a cardinalidade do conjunto é o número natural que corresponde à quantidade de elementos do conjunto. Como o conjunto é finito podemos fazer esta contagem!

- Se o conjunto for infinito teremos que usar outra ferramenta, já que nunca terminaríamos de contar seus elementos. Então usaremos a seguinte definição:

Definição: Sejam $|A|$ e $|B|$ a cardinalidade dos conjuntos A e B respectivamente. Se diz que $|A| > |B|$ se

- um subconjunto próprio de A e todo o conjunto B podem ser postos em correspondência um-a-um.

- todo o conjunto A não pode ser colocado em correspondência um-a-um com qualquer subconjunto próprio de B.

O INFINITO visto pela Matemática (Cantor).
Teoria de Conjuntos!

- Por exemplo, ***A*** são os REAIS e ***B*** são os NATURAIS:

  - o conjunto dos NATURAIS, que é um subconjunto próprio dos REAIS pode ser colocado em correspondência um-a-um com os Naturais.

  - mas todos os REAIS não podem ser colocados em correspondência um-a-um com qualquer subconjunto dos NATURAIS (provado por Cantor).

  Logo, temos que $\aleph_0 < \aleph_1$.

- Mas agora complicou porque temos dois tipos de subconjuntos? Subconjunto e Subconjunto Próprio? Então vamos REDEFINIR!

  Definição: O conjunto A é um subconjunto do conjunto B se todos os elementos de A são também elementos de B. Notação $A \subseteq B$.

  Como consequência desta definição temos que todo conjunto é um subconjunto dele mesmo.

  Definição: O conjunto A é um subconjunto próprio do conjunto B se todos os elementos de A são também elementos de B, mas não todos os elementos de B são elementos de A. Notação $A \subset B$.

  Como consequência desta definição temos que nenhum conjunto é um subconjunto próprio de si mesmo.

O INFINITO visto pela Matemática (Cantor).
Teoria de Conjuntos!

- Bom, para não ficar muito conceito vamos tentar resumir as ideias que Cantor teve!

- Primeira questão: Quantos “tamanhos” de conjuntos infinitos existem?

- Um número finito. Por exemplo, dois como já foi visto: um para os naturais e outro para os reais! Ou mais de dois. Ou então um número infinito?

- Segunda questão: Sabemos que a cardinalidade dos naturais é menor que a dos reais. Mas se existir uma terceira cardinalidade para conjuntos infinitos a pergunta é. Qual é menor a dos reais ou esta terceira?

O INFINITO visto pela Matemática (Cantor).
Teoria de Conjuntos!

- Cantor provou, para conjuntos infinitos, que o conjunto de todos os subconjunto de um conjunto tem cardinalidade maior que o conjunto original.

- É bom avisar que esta prova e outras destas ideias custaram muito caro para a saúde mental de Cantor. Pode ser por coincidência (acaso) ou não. Existe muita especulação sobre isto.

- Como consequência da prova de Cantor se obtém uma resposta para a Primeira questão: Quantos “tamanhos” de conjuntos infinitos existem? Infinitos!

- Referente a Segunda questão: Sabemos que a cardinalidade dos naturais é menor que a dos reais. Mas se existir uma terceira cardinalidade para conjuntos infinitos a pergunta é. Qual é menor a dos reais ou esta terceira?

- Já sabemos que existem infinitas cardinalidades para conjuntos infinitos! Uma maior que a outras e assim sucessivamente. Mas, onde se encaixa a cardinalidade dos reais? É a segunda maior ou não?

O INFINITO visto pela Matemática (Cantor). Teoria de Conjuntos!

- Cantor provou que a cardinalidade dos reais coincide com a cardinalidade do conjunto de todos os subconjuntos dos naturais. E conjeturou que este seria o segundo menor tamanho de conjunto infinito.

- Mas, Cantor nunca conseguiu provar que não existisse outro tamanho de infinito entre $\aleph_0$ e $\aleph_1$. E assim surgiu a Hipótese do Contínuo!

  Hipótese do Contínuo: Não existe nenhum número cardinal $\aleph_i$ tal que $\aleph_0 < \aleph_i < \aleph_1$.

  Sabemos que se um conjunto tem cardinalidade $\aleph_n$, então a cardinalidade do conjunto de todos seus subconjuntos é maior $\aleph_{n+1}$.

  Hipótese Generalizada do Contínuo: Não existe nenhum número cardinal $\aleph_i$ tal que $\aleph_n < \aleph_i < \aleph_{n+1}$.

- Muitos tentaram provar ou negar esta Hipótese, mas até hoje ninguém conseguiu!

O INFINITO visto pela Matemática (Cantor).
Teoria de Conjuntos!

- Em 1938 Kurt Gödel fez uma espécie de prova parcial. Ele provou que a Hipótese do Contínuo é consistente com os axiomas da teoria de conjuntos. Ou seja, supor a hipótese como verdadeira não leva a contradições.

- Em 1963 Paul Cohen provou que assumir como falsa a Hipótese do Contínuo não leva a nenhuma inconsistência na teoria de conjuntos (contradição entre ela e os axiomas da teoria).

- Em outras palavras. Isto significa que a Hipótese do Contínuo e os Axiomas da Teoria de Conjuntos são independentes (undecidable).

- Já aconteceu algo parecido na geometria com o Quinto Postulado de Euclides. Se ele for assumido verdadeiro obtemos a Geometria Euclidiana, mas se ele for assumido falso obtemos as Geometrias Não-Euclidianas. Ou seja, dentro da geometria é impossível decidir se este postulado é falso ou verdadeiro.

- Isto tem permitido desenvolver Teorias de Conjuntos com (Cantoriana) e sem (Não-Cantoriana) a Hipótese do Contínuo!

Frases de personalidades que usam o termo INFINITO.

- William Shakespeare, "I could be bounded in a nutshell, and count myself a king of infinite space.", Poeta e Dramaturgo Inglês (1564 – 1616).

- William Blake, "To see the world in a grain of sand. And heaven in a wildflower: Hold infinity in the palm of your hand, and eternity in an hour.", Poeta, Pintor e Gravador Inglês (1757 – 1827).

- Thomas H Huxley, "The known is finite, the unknown infinite; intellectually we stand on an island in the midst of an illimitable ocean of inexplicability. Our business in every generation is to reclaim a little more land.", Biólogo e Anatomista Inglês (1825 – 1895).

- Anaxagoras, "There is no smallest among the small and no largest among the large; but always something still smaller and something still larger.", Filosofo Grego (500 – 428 BC).

Objetivo Principal da Palestra!

- Apenas um: REFLETIR, PENSAR!

Conclusão

- Pelo exposto anteriormente podemos afirmar que, referente ao termo INFINITO, não se deve separar os vários aspectos ou abordagem (pontos de vistas matemático, físico, filosófico, religioso, etc.) porque cada um deles influenciam no desenvolvimento (evolução) das ideias sobre o termo.

- Notem que o uso recente “COMERCIAL” do termo INFINITO quase nada tem a ver com sua essência (filosófica, matemática, etc.).

- Agora sabemos que existem diferentes tipos (classes) de INFINITOS.

- Devemos tomar cuidado com nossa intuição, nosso bom senso ou senso comum! Muitas vezes ele nos leva a “absolutizar/relativizar” ideias que mais tarde vemos que não eram tão “absolutas/relativas”.

- A final. O que é o INFINITO?

Muito Obrigado.

“You are free, therefore choose—that is to say, invent.”

- Sartre, L'existentialisme est un humanisme.