Prova Escrita No 1. Cálculo I 01/2006

Prof. Gustavo Benitez Alvarez.

Favor responder com clareza e limpeza. Isto será considerado na hora da correção.

1) a) Encontrar a função polinomial de grau 2 tal que: $f(0)=5$, $f(-1)=10$ e $f(1)=6$.

b) Determine o domínio de definição da função $y=\sqrt{1-x^2}$. Determine também o conjunto imagem.

2) Analise a existência dos limites laterais da função

$$f(x)=\begin{cases}\left(\dfrac{5x+2}{4x+2}\right)^{\frac{1}{x}}, & \text{se } x<0 \\ (1+x)^{\frac{6x+1}{2x}}, & \text{se } x>0\end{cases}$$

, no ponto $x=0$ e diga se existe ou não o limite da função em $x=0$.

3) Seja $f(x)=\begin{cases}x+1, & \text{se } x\leq 1 \\ 3-ax^2, & \text{se } x>1\end{cases}$. Como deve ser escolhido o número $a\in\mathbb{R}$ para que $f(x)$ seja contínua em $x=1$?

4) Determine o diferencial de primeira e segunda ordem da função $f(x)=x^2a^x+\ln(x)-\operatorname{sen}(ax+b)$, onde $a\in\mathbb{R}$, $a>1$ e $b\in\mathbb{R}$?

5) Encontre os extremos relativos e absolutos da função: $y=x\sqrt{|x-1|}$ no intervalo $x\in[-1,1]$.

6) Encontre os extremos relativos e absolutos da função: $y=\dfrac{(x-2)(8-x)}{x^2}$ no intervalo $x\in[-8,8]$.

Obs: Todas as questões valem 2 pontos. Para a nota final serão consideradas as 5 questões com maior pontuação. Isto é, a nota máxima é 2 pontos por questão correspondendo a nota total de 10 pontos.

1) a) Função polinomial de grau 2 tal que:

$f(0)=5$, $f(-1)=10$ e $f(1)=6$.

$f(x) = P_2(x) = ax^2+bx+c$, onde a, b e c são números reais que devem ser determinados usando as três condições dadas no problema:

$f(0) = 5 = a(0)^2 + b(0) + c$ ① $\Rightarrow$ $c=5$

$f(-1) = 10 = a(-1)^2 + b(-1) + c$ ② $\Rightarrow$ $a-b+c=10$

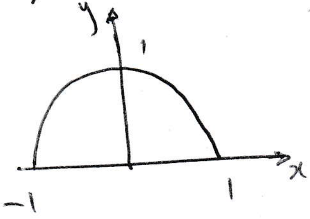
$f(1) = 6 = a(1)^2 + b(1) + c$ ③ $\Rightarrow$ $a+b+c=6$

Chegamos a um sistema de três equações algebricas lineares com três incognitas. Subtituindo ① em ② e ③ obtemos: $\left.\begin{array}{l} a-b=5 \\ a+b=1 \end{array}\right\}$ que depois de resolvido temos

$a=3$, $b=-2$ e $c=5$. Logo, $f(x) = 3x^2-2x+5$.

---

b) $y=\sqrt{1-x^2}$. O domínio de definição da função é o conjunto $D=\{x\in\mathbb{R} / -1\leq x\leq 1\}$, já que só para estes valores $1-x^2\geq 0$.



O conjunto imagem é $I=\{x\in\mathbb{R} / 0\leq y\leq 1\}$

---

2) • $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{5x+2}{4x+2}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^-}\left(1+\frac{5x+2}{4x+2}-1\right)^{\frac{1}{x}} =$

$= \lim_{x\to 0^-}\left(1+\frac{x}{4x+2}\right)^{\frac{1}{x}}$. Fazendo a mudança de variavel $z=\frac{x}{4x+2}$

temos que $x=\frac{2z}{1-4z}$, logo.

$\lim_{x\to 0^-}\left(1+\frac{x}{4x+2}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{z\to 0^-}(1+z)^{\frac{1-4z}{2z}} = \lim_{z\to 0^-}\left[(1+z)^{\frac{1}{2z}}(1+z)^{-2}\right] =$

$$= \lim_{z \to 0^-} \left[(1+z)^{\frac{1}{z}} \right]^{\frac{1}{2}} \lim_{z \to 0^-} (1+z)^{-2} = e^{\frac{1}{2}}$$

- $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (1+x)^{\frac{6x+1}{2x}} = \lim_{x \to 0^+} \left[(1+x)^{\frac{1}{2x}} (1+x)^3 \right] = e^{\frac{1}{2}}$

- Como $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x)$, então existe $\lim_{x \to 0} f(x) = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$.

---

3) $f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{se } x \leq 1 \\ 3-ax^2, & \text{se } x > 1 \end{cases}$

Para que uma função seja contínua num ponto x_0 se deve verificar:

<u>a</u> A função tem que estar definida no ponto, isto é $f(x_0)$.

<u>b</u> Deve existir $\lim_{x \to x_0} f(x)$. o limite da função no ponto.

<u>c</u> E o limite da função no ponto tem que ser igual a função, isto é, $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Neste caso o ponto $x_0 = 1$. Portanto:

<u>a</u> $f(1) = 1+1 = 2$

<u>b</u> $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (x+1) = 2$ e $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (3-ax^2) = 3-a$.

Logo para que exista o limite no ponto $x_0 = 1$ devemos ter que $2 = 3-a \Rightarrow a = 1$. Com isto $\lim_{x \to 1} f(x) = 2$

<u>c</u> $\lim_{x \to 1} f(x) = 2 = f(1) = 2$. Portanto, $f(x)$ é contínua no ponto $x_0 = 1$ se $a = 1$.

---

4) $f(x) = x^2 a^x + \ln(x) - \operatorname{sen}(ax+b)$, $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$ e $b \Rightarrow \mathbb{R}$.

$$\frac{df}{dx} = \left[x^2 a^x + \ln(x) - \operatorname{sen}(ax+b) \right]' = \left[x^2 a^x \right]' + \left[\ln(x) \right]' - \left[\operatorname{sen}(ax+b) \right]' =$$

$$[x^2a^x]' = (x^2)'a^x + x^2(a^x)' = 2xa^x + x^2a^x\ln a$$

$$[\ln(x)]' = \frac{1}{x}$$

$$[\operatorname{sen}(ax+b)]' = \cos(ax+b)\,(ax+b)' = a\cos(ax+b).$$ Logo.

$$\frac{df}{dx} = 2xa^x + x^2\ln a\, a^x + \frac{1}{x} - a\cos(ax+b).$$

$$\frac{d^2f}{dx^2} = \left(\frac{df}{dx}\right)' = \left[2xa^x + x^2\ln a\, a^x + \frac{1}{x} - a\cos(ax+b)\right]' =$$

$$= [2xa^x]' + [\ln a\, x^2a^x]' + \left[\frac{1}{x}\right]' - [a\cos(ax+b)]'$$

$$[2xa^x]' = 2[xa^x]' = 2[a^x + xa^x\ln a] = 2[a^x + \ln a\, x a^x]$$

$$[\ln a\, x^2a^x]' = \ln a[x^2a^x]' = \ln a[2xa^x + x^2a^x\ln a] =$$

$$= 2x\ln a\, a^x + x^2a^x(\ln a)^2$$

$$\left[\frac{1}{x}\right]' = [x^{-1}]' = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

$$[a\cos(ax+b)]' = a[\cos(ax+b)]' = -a\operatorname{sen}(ax+b)\,(ax+b)' =$$

$$= -a^2\operatorname{sen}(ax+b).$$ Logo.

$$\frac{d^2f}{dx^2} = 2a^x + 2\ln a\, xa^x + 2\ln a\, xa^x + x^2a^x(\ln a)^2 - \frac{1}{x^2} -$$

$$-[-a^2\operatorname{sen}(ax+b)]$$

$$= 2a^x + 4\ln a\, xa^x + x^2a^x(\ln a)^2 - \frac{1}{x^2} + a^2\operatorname{sen}(ax+b).$$

O diferencial de primeira ordem é definido como:

$$df = \frac{df}{dx}dx.$$ Logo df será:

$$df = \left[2xa^x + x^2\ln a\, a^x + \frac{1}{x} - a\cos(ax+b)\right]dx$$

O diferencial de segunda ordem é definido como:

$$d^2f = d(df) = \frac{d^2f}{dx^2}(dx)^2 = \frac{d^2f}{dx^2}dx^2.$$ Logo temos:

$$d^2f = \left[2a^x + 4\ln a\, xa^x + x^2a^x(\ln a)^2 - \frac{1}{x^2} + a^2 \operatorname{sen}(ax+b)\right]dx^2.$$

---

5) $y = x\sqrt{|x-1|}$ $\quad x \in [-1,1]$

– Extremos relativos

condição necessaria: $y' = 0$.

$y' = (x\sqrt{|x-1|})'$ como $y = \begin{cases} x\sqrt{x-1} & \text{se } x > 1 \\ x\sqrt{-(x-1)} & \text{se } x < 1 \end{cases}$ temos:

se $x > 1$ segue:

$$y' = (x\sqrt{x-1})' = (x)'\sqrt{x-1} + x(\sqrt{x-1})' = \sqrt{x-1} + \frac{x}{2}\frac{1}{\sqrt{x-1}} =$$

$$= \frac{2(x-1)+x}{2\sqrt{x-1}} = \frac{3x-2}{2\sqrt{x-1}} \qquad (1)$$

se $x < 1$ segue:

$$y' = (x\sqrt{1-x})' = (x)'\sqrt{1-x} - \frac{x}{2}\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sqrt{1-x} - \frac{x}{2}\frac{1}{\sqrt{1-x}} =$$

$$= \frac{2(1-x)-x}{2\sqrt{1-x}} = \frac{2-3x}{2\sqrt{1-x}} = -\frac{(3x-2)}{2\sqrt{1-x}} \qquad (2)$$

De (1) e (2) temos que $y' = 0$ se:

$$\frac{3x-2}{2\sqrt{x-1}} = 0 \quad \text{ou} \quad -\frac{(3x-2)}{2\sqrt{1-x}} = 0$$

$$(3x-2) = 0 \quad \text{ou} \quad -(3x-2) = 0$$

$$3x = 2 \qquad\qquad 3x = 2$$

$$x = \frac{2}{3} \qquad\qquad x = \frac{2}{3}$$

Logo o ponto $x=\frac{2}{3}$ é um possível extremo relativo. No ponto $x=1$ a função $y(1)=1\sqrt{|1-1|}=0$ e a derivada $y'(x=1)$ é infinita. O ponto $x=1$ é um ponto crítico.

Condição suficiente:

$y''=(y')'$ como $y'=\begin{cases} \dfrac{3x-2}{2\sqrt{x-1}}, & \text{se } x>1 \\ -\dfrac{(3x-2)}{2\sqrt{1-x}}, & \text{se } x<1 \end{cases}$ temos

Se $x>1$ segue:

$$y''=\left(\frac{(3x-2)}{2\sqrt{x-1}}\right)'=\frac{(3x-2)'\,2\sqrt{x-1}-(3x-2)\,2\left(\sqrt{x-1}\right)'}{4(x-1)}=$$

$$=\frac{3\cdot 2\sqrt{x-1}-(3x-2)(x-1)^{-\frac{1}{2}}}{4(x-1)}=\frac{6(x-1)^{\frac{1}{2}}-(3x-2)(x-1)^{-\frac{1}{2}}}{4(x-1)}$$

Se $x<1$ segue:

$$y''=\left(-\frac{(3x-2)}{2\sqrt{1-x}}\right)'=-\left[\frac{(3x-2)'\,2\sqrt{1-x}-(3x-2)\,2\left(\sqrt{1-x}\right)'}{4(x-1)}\right]=$$

$$=\frac{6\sqrt{1-x}-(3x-2)(1-x)^{-\frac{1}{2}}(-1)}{4(x-1)}=\frac{6\sqrt{1-x}+(3x-2)(1-x)^{-\frac{1}{2}}}{4(x-1)}$$

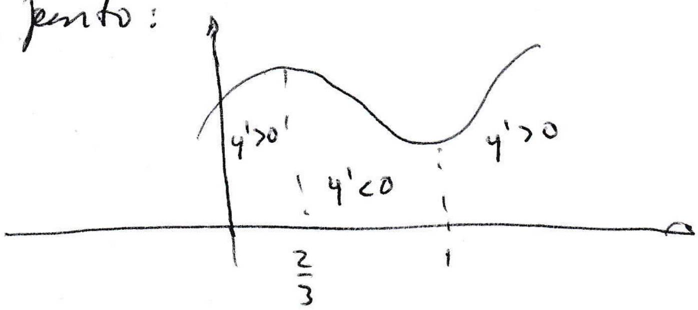
$$y''\left(x=\frac{2}{3}\right)=\frac{6\sqrt{1-\frac{2}{3}}+\left(3\frac{2}{3}-2\right)\left(1-\frac{2}{3}\right)^{-\frac{1}{2}}}{4\left(\frac{2}{3}-1\right)}=\frac{6\sqrt{\frac{1}{3}}}{4\left(-\frac{1}{3}\right)}=-\frac{9}{2}\sqrt{\frac{1}{3}}<0$$

Logo neste ponto a função possue um máximo relativo. No ponto $x=1$ a segunda derivada continua indefinida (infinita). Temos que analizar o sinal da primeira derivada num entorno do ponto:

Se $x<\frac{2}{3}$, $y'>0$

se $\frac{2}{3}<x<1$, $y'<0$

se $x>1$, $y'>0$



Portanto se estivesemos analizando um intervalo em que x fosse ponto interior, no ponto $x=1$ a função apresenta um mínimo relativo.

Como o ponto $x=1$ faz parte do extremo do intervalo temos que analizar o valor da função para determinar os extremos absolutos.

— Extremos absolutos

em $x=-1$ temos $y(-1) = -1\sqrt{|-1-1|} = -\sqrt{|-2|} = -\sqrt{2}$

em $x=1$ temos $y(1) = 1\sqrt{|1-1|} = 0$.

em $x=\frac{2}{3}$ temos $y\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}\sqrt{\left|\frac{2}{3}-1\right|} = \frac{2}{3}\sqrt{\left|\frac{2-3}{3}\right|} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt{3}}$

Comparando os valores podemos dizer que: o máximo absoluto da função é alcanzado no ponto $x=\frac{2}{3}$. Logo este ponto é máximo absoluto e relativo. O mínimo absoluto da função é alcanzado no ponto $x=-1$.

---

6) $y = \dfrac{(x-2)(8-x)}{x^2}$ no intervalo $x \in [-8, 8]$.

$$y' = \frac{[(x-2)(8-x)]'x^2 - (x-2)(8-x)(x^2)'}{x^4} =$$

$$= \frac{[(x-2)'(8-x) + (x-2)(8-x)']x^2 - (x-2)(8-x)2x}{x^4} =$$

$$= \frac{[(8-x) - (x-2)]x^2 - (x-2)(8-x)2x}{x^4} = \frac{[(8-x)-(x-2)]x - 2(x-2)(8-x)}{x^3}$$

$$= \frac{x(8-x) - x(x-2) - 2(x-2)(8-x)}{x^3} = \frac{x(8-x) - (x-2)[x + 2(8-x)]}{x^3}$$

$$= \frac{x(8-x) - (x-2)(x+16-2x)}{x^3} = \frac{x(8-x) - (x-2)(16-x)}{x^3} =$$

$$= \frac{(8-x)[x-(x-2)] - 8(x-2)}{x^3} = \frac{2(8-x) - 8(x-2)}{x^3} = 0.$$

$2(8-x) = 8(x-2)$

$(8-x) = 4(x-2) \Rightarrow 8-x = 4x-8 \Rightarrow 5x = 16 \Rightarrow x = \frac{16}{5}$

Ou seja, da condição necessária do extremo relativo obtemos os possíveis extremos relativos.
No ponto $x=0$ a primeira derivada é infinita. Neste ponto a função não está definida.

$$y'' = (y')' = \left(\frac{2(8-x) - 8(x-2)}{x^3}\right)' = \left(\frac{16\cdot 2 - 10x}{x^3}\right)' =$$

$$= \frac{(16\cdot 2 - 10x)'\, x^3 - (16\cdot 2 - 10x)(x^3)'}{(x^3)^2} =$$

$$= \frac{-10x^3 - 3x^2(16\cdot 2 - 10x)}{x^5} = \frac{-10x - 3(16\cdot 2 - 10x)}{x^3}$$

Como $\frac{16}{5} > 0$, então $\left(\frac{16}{5}\right)^3 > 0$. Logo para conhecer o sinal da segunda derivada resta analizar o sinal de

$-10x - 16\cdot 6 + 10x\cdot 3 = 20x - 16\cdot 6$ no ponto $x = \frac{16}{5}$.

$20\cdot\frac{16}{5} - 16\cdot 6 = 4\cdot 16 - 16\cdot 6 < 0$. Logo neste ponto a função apresenta um máximo relativo.

Extremos absolutos

$$y(-8) = \frac{(-8-2)(8-(-8))}{(-8)^2} = \frac{-10\cdot 2\cdot 8}{8\cdot 8} = -\frac{5}{2}$$

$$y(8) = \frac{(8-2)(8-8)}{(8)^2} = 0$$

$$y\left(\frac{16}{5}\right) = \frac{\left(\frac{16}{5} - 2\right)\left(8 - \frac{16}{5}\right)}{\left(\frac{16}{5}\right)^2} = \frac{(16-10)(40-16)}{16\cdot 16} = \frac{6\cdot 24}{16\cdot 16} = \frac{3\cdot 12}{8\cdot 8} =$$

$= \frac{3\cdot 3}{2\cdot 8} = \frac{9}{16} > 0$. Comparando os três valores concluimos que no ponto $x = \frac{16}{5}$ a função tem um máximo relativo e absoluto. O mínimo absoluto é alcançado no ponto $x = -8$.

---

1) a) 1 b) 1 (0,5 ; 0,5)

2) LL 1 E.L 1

0,5 0,5

3) f(a) → 0,5 $\lim_{x \to a}$ 1 , f(a) = lim 0,5.

4) $\frac{df}{dx}$ 0,5 $\frac{d^2f}{dx^2}$ 0,5 df 0,5 d^2f 0,5

5) relativos 1 Absolutos 1

$\frac{df}{dx} = 0$ 0,5 Avaliação nos extremos 0,5

$\frac{d^2f}{dx^2}$ 0,5 comparação 0,5

6) relativo 1 Absoluto 1

$\frac{df}{dx} = 0$ 0,5 avaliação nos extremos 0,5

$\frac{d^2f}{dx^2}$ 0,5 comparação 0,5

$$df = \frac{df}{dx} dx$$

$$d^2f = \frac{d^2f}{dx^2} (dx)^2$$