02/2004

UFF – Universidade Federal Fluminense
Escola de Engenharia Industrial e Metalúrgica de Volta Redonda
Disciplina: Cálculo I
Prof. Gustavo Benitez Alvarez
Nome do Aluno (letra forma): ______________________

Assinatura do Aluno: ______________________

Prova Escrita Nº 1

Observações:

- **Desligue os aparelhos celulares;**
- **Não rasure esta folha, pois cálculos realizados nesta, não serão considerados. Use a folha de Respostas;**
- **Não existem dúvidas a serem esclarecidas. A interpretação de cada questão faz parte da Avaliação;**
- **Provas respondidas à lápis não terão direito a recorreção. Logo, faça a prova com caneta azul ou preta;**
- **Não é permitido compartilhar materiais didáticos;**
- **É permitido o uso de calculadoras científicas;**
- **Resolva todas as questões pois para a nota final serão consideradas as cinco questões com maior pontuação, acumulando então no máximo dez pontos.**

Questão 1: (Valor 2,0) Determine o domínio de definição e a imagem da função $y = \dfrac{senx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Questão 2: (Valor 2,0) Analise a existência do limite e determine ele se possível:

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{\ln(2x^2+3x+1)}{x} + tg(x)\frac{sen(5x)}{5x}\right].$$

Questão 3: (Valor 2,0) Analise a continuidade da função:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{sen(x^2-1)}{\sqrt{1-x^2}}, & \text{se } -1 < x < 1 \\ 0, & \text{se } x = -1 \text{ ou } x = 1 \end{cases}.$$

$-1 \le x \le 1$

Questão 4: (Valor 2,0) Determine o diferencial ~~de~~ de primeira ordem da função

$f(x) = (senx)^{(2\cos x)} + 2a^{(2x)}\log_a(\sqrt{2x}) + tg(x+5)$, onde $a \in \Re$, a > 1.

Questão 5: (Valor 2,0) Encontre os extremos relativos e absolutos da função $y = x^3 + 6x^2 + 6x + 2$ no intervalo $x \in [-4, 2]$.

① Determine o domínio de definição e imagem da função:

$f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{1-x^2}}$ $f_1(x) = \operatorname{sen} x$ $D_1 = \{x \in \mathbb{R}\}$, $I_1 = \{y \in \mathbb{R} / -1 \leq y \leq 1\}$

$f_2(x) = \left(\sqrt{1-x^2}\right)^{-1}$ $D_2 = \{x \in \mathbb{R} / -1 < x < 1\}$

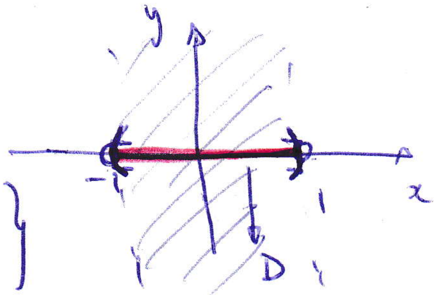
$1 - x^2 > 0 \Rightarrow x^2 < 1 \Rightarrow 0 \leq (1-x^2) \leq 1$, logo

$1 \leq \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} < +\infty \Rightarrow I_2 = \{y \in \mathbb{R} / 1 \leq y < +\infty\} = \{y \in \mathbb{R} / y \geq 1\}$

O domínio de $f(x) = f_1(x) \cdot f_2(x)$ é $D = D_1 \cap D_2$

$D = \{x \in \mathbb{R} / -1 < x < 1\}$

$I = \{y \in \mathbb{R} / -\infty < y < +\infty\} = \{y \in \mathbb{R}\}$



---

② Analise a existência dos limites e determine eles se possível.

a) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \left[\frac{\ln[(1+2x)(1+x)]}{x} + \frac{tg(x) \cdot \operatorname{sen}(5x)}{5x} \right] =$ $(1+2x)(1+x) = 1 + x + 2x + 2x^2 = (2x^2 + 3x + 1)$

$\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+2x)(1+x)}{x} = \lim_{x \to 0} \left[\frac{\ln(1+2x) + \ln(1+x)}{x} \right] =$

$\displaystyle= \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+2x)}{x} + \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$ como $\ln(1+x) \sim x$

quando $x \to 0$ e $\ln(1+2x) \sim 2x$ segue:

$\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+2x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{2x}{x} = 2$ e $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

Logo $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+2x)(1+x)}{x} = 2+1 = 3$

$$\lim_{x \to 0} tg(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{\lim_{x \to 0} \operatorname{sen} x}{\lim_{x \to 0} \cos x} = \frac{0}{1} = 0.$$

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(5x)}{5x} = \lim_{z \to 0} \frac{\operatorname{sen} z}{z} = 1.$ Portanto

$$\lim_{x \to 0} \left[\frac{\ln(1+2x)(1+x)}{x} + \frac{tg(x)\operatorname{sen}(5x)}{5x} \right] =$$

$$= 3 + 0 \cdot 1 = 3$$

---

(3) Analise a continuidade da função $f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(x^2-1)}{\sqrt{1-x^2}} & \text{se } -1<x<1 \\ 0 & \text{se } x = \pm 1 \end{cases}$

$$\lim_{x \to \pm 1} \frac{\operatorname{sen}(-(1-x^2))}{\sqrt{1-x^2}} = -\lim_{x \to \pm 1} \frac{\operatorname{sen}(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$$

$z = 1-x^2 \Rightarrow$ quando $x \to \pm 1$ $z \to 0^+$

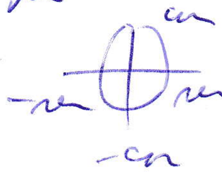
$$= -\lim_{z \to 0^+} \frac{\operatorname{sen} z}{\sqrt{z}} = -\lim_{z \to 0^+} \frac{z}{\sqrt{z}} = -\lim_{z \to 0^+} \sqrt{z} = 0.$$

Nos pontos $x = \pm 1$ a função está definida e se verifica que $\lim_{x \to \pm 1} f(x) = f(x)$. Logo nestes pontos ela é contínua. No restante dos pontos $-1 < x < 1$ a função é contínua.

1) Determine a diferencial de primeira ordem da função: $f(x) = (\operatorname{sen} x)^{2\cos x} + 2a^{(2x)} \log_a(\sqrt{2x}) + tg(x+5)$, onde $a \in \mathbb{R}$ e $a > 1$.

$y_1 = (\operatorname{sen} x)^{2\cos x}$ $\qquad y_2 = 2a^{(2x)} \log_a(\sqrt{2x}) = a^{2x} \log_a(2x)$

$y_3 = tg(x+5)$.



$$\ln y_1 = \ln(\operatorname{sen} x)^{2\cos x} = 2\cos x \ln(\operatorname{sen} x)$$

Derivando a equação temos:

$$\frac{1}{y_1}\frac{dy_1}{dx} = 2(\cos x)' \ln(\operatorname{sen} x) + 2\cos x \left[\ln(\operatorname{sen} x)\right]'$$

$$= -2\operatorname{sen} x \ln(\operatorname{sen} x) + 2\cos x \frac{1}{\operatorname{sen} x} \cos x$$

$$\frac{1}{y_1}\frac{dy_1}{dx} = -2\operatorname{sen} x \ln(\operatorname{sen} x) + \frac{2\cos^2 x}{\operatorname{sen} x} = \frac{2\cos^2 x - 2\operatorname{sen}^2 x \ln(\operatorname{sen} x)}{\operatorname{sen} x}$$

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{y_1}{\operatorname{sen} x}\left[2\cos^2 x - 2\operatorname{sen}^2 x \ln(\operatorname{sen} x)\right]$$

$$= \frac{(\operatorname{sen} x)^{2\cos x}}{\operatorname{sen} x}\left[2\cos^2 x - 2\operatorname{sen}^2 x \ln(\operatorname{sen} x)\right]$$

$$= (\operatorname{sen} x)^{(2\cos x - 1)}\left[2\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x \ln(\operatorname{sen} x)^2\right]$$

$$\boxed{\begin{array}{l} y = a^x \\ y' = a^x \ln a \\ y = \log_a x \\ y' = \frac{1}{x}\log_a e \end{array}}$$

$$\frac{dy_2}{dx} = (a^{2x})' \log_a(2x) + a^{2x}\left(\log_a 2x\right)' =$$

$$= 2a^{2x} \ln(a) \log_a(2x) + a^{2x} \frac{2}{2x} \log_a e =$$

$$\frac{dy_2}{dx} = a^{2x}\left[2\ln(a)\,\log_a(2x) + \log_a e \cdot \frac{1}{x}\right]$$

$$\frac{dy_3}{dx} = \left(\frac{\operatorname{sen}(x+5)}{\cos(x+5)}\right)' = \frac{[\operatorname{sen}(x+5)]'\cos(x+5) - \operatorname{sen}(x+5)[\cos(x+5)]'}{\cos^2(x+5)}$$

$$= \frac{\cos(x+5)\cos(x+5) + \operatorname{sen}(x+5)\operatorname{sen}(x+5)}{\cos^2(x+5)}$$

$$= \frac{1}{\cos^2(x+5)} \text{. Portanto.}$$

$$df = dy_1 + dy_2 + dy_3 = \left(\frac{dy_1}{dx} + \frac{dy_2}{dx} + \frac{dy_3}{dx}\right)dx.$$

$$= \left\{(\operatorname{sen}x)^{(2\cos x-1)}\left[2\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x\,\ln(\operatorname{sen}x)^2\right] + \right.$$

$$\left. + a^{2x}\left[2\ln a \cdot \log_a(2x) + \log_a e \cdot \frac{1}{x}\right] + \frac{1}{\cos^2(x+5)}\right\}dx.$$

---

(5) Encontre os extremos relativos e absolutos da função $\cancel{f(x) = x^3 + x^2 - 2x}$ no intervalo $x \in [-4, 2]$.

$\cancel{f(x) = (x-1)x(x+2) \quad x = 1,\ x = -2}$

$\cancel{\frac{df}{dx} = 3x^2 + 2x - 2 = 0 \quad 2a = \frac{2}{3} \Rightarrow a = \frac{1}{3}}$

$\cancel{x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} - \frac{1}{9} - 2 = 0 \Rightarrow \left(x + \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{19}{9} = 0}$

$$f(x) = ax^3+bx^2+cx+d$$

$$\frac{df}{dx} = 3ax^2+2bx+c = 0 \qquad x^2 + \frac{2b}{3a}x + \frac{c}{3a} = 0$$

$$2s = \frac{2b}{3a} \Rightarrow s = \frac{b}{3a} \qquad \pm \frac{b^2}{9a^2}$$

$$\left(x+\frac{b}{3a}\right)^2 - \frac{b^2}{9a^2} + \frac{c}{3a} = 0$$

$$\left(x+\frac{b}{3a}\right)^2 = \frac{b^2-3ac}{9a^2} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} b^2-3ac=18 \\ 9a^2=9 \end{array}\right\} \Rightarrow a=1$$

$$b^2-3c=18$$

$$\frac{b}{3}=2 \Rightarrow b=6$$

$$36-3c=18$$

$$c=\frac{36-18}{3}=6$$

$$f(x) = x^3+6x^2+6x+2$$

$$\frac{df}{dx} = 3x^2+12x+6 = 0$$

$$x^2+4x+2=0$$

$$(x+2)^2-4+2=0$$

$$(x+2)^2 = 2 \Rightarrow x+2 = \pm\sqrt{2}$$

$$x_1 = -2-\sqrt{2} = -(2+\sqrt{2}) \qquad x_2 = -2+\sqrt{2}$$

$$\frac{d^2f}{dx^2} = 6x+12, \qquad \left.\frac{d^2f}{dx^2}\right|_{x_1} = -6(2+\sqrt{2}) + 12$$

$$= -6(2+\sqrt{2}-2) < 0 \text{ máximo relativo}$$

$$\left.\frac{d^2f}{dx^2}\right|_{x_2} = 6(-2+\sqrt{2})+12 = 6\sqrt{2} > 0 \text{ mínimo relativo}$$

$$f(x_1) = (-2-\sqrt{2})^3 + 6(-2-\sqrt{2})^2 + 6(-2-\sqrt{2}) + 2 =$$

$$-(2+\sqrt{2})^3+6(2+\sqrt{2})^2-6(2+\sqrt{2})+2=$$

$$=-(2+\sqrt{2})(4+\underset{4}{2}\sqrt{2}+2)+6(4+\underset{4}{2}\sqrt{2}+2)-12-6\sqrt{2}+2=$$

$$=-(8+4\sqrt{2}+4+4\sqrt{2}+4+2\sqrt{2})+24+12\sqrt{2}+\cancel{12}-\cancel{12}-6\sqrt{2}+2=$$

$$=8+2\sqrt{2}-6\sqrt{2}+2=10-4\sqrt{2}.$$

$$f(x_2)=(-2+\sqrt{2})^3+6(-2+\sqrt{2})+6(-2+\sqrt{2})+2$$

$$=(4-2\sqrt{2}+2)(-2+\sqrt{2})+6(4-2\sqrt{2}+2)-12+6\sqrt{2}+2=$$

$$=-8+4\sqrt{2}-4+4\sqrt{2}-4+2\sqrt{2}+24-12\sqrt{2}+12-\cancel{12}+6\sqrt{2}+2=$$

$$=10+4\sqrt{2}$$

$16\cdot4 = 64$ $\quad 16\cdot6 = 96$

$96-64=32$

$32-24=8$

$$f(-4)=-4^3+6\cdot4^2-6\cdot4+2=-64+96-24+2=10$$

$$f(2)=2^3+6\cdot2^2+6\cdot2+2=8+24+12+2=46$$

Máximo e relativo em $x_1=-2-\sqrt{2}$

$f(x_1)=10-4\cdot\sqrt{2}$

Mínimo relativo $x_2=-2+\sqrt{2}$ $\quad f(x_2)=10+4\sqrt{2}$

Máximo absoluto em $x=2$ $\quad f(2)=46.$