	UFF – Universidade Federal Fluminense Escola de Engenharia Industrial e Metalúrgica de Volta Redonda Disciplina: Cálculo I Prof. Gustavo Benitez Alvarez Nome do Aluno (letra forma): ______________________ Assinatura do Aluno: ______________________
	Prova Escrita Nº 1 Turma V1 01/2008

Observações:

- **Desligue os aparelhos celulares;**
- **Não rasure esta folha, pois cálculos realizados nesta, não serão considerados. Use a folha de Respostas;**
- **Não existem dúvidas a serem esclarecidas. A interpretação de cada questão faz parte da Avaliação;**
- **Provas respondidas à lápis não terão direito a recorreção. Logo, faça a prova com caneta <u>azul</u> ou <u>preta</u>;**
- **Não é permitido compartilhar materiais didáticos;**
- **É permitido o uso de calculadoras científicas;**
- **Resolva todas as questões pois para a nota final serão consideradas as cinco questões com maior pontuação, acumulando então no máximo dez pontos.**
- ***Seja o mais explicito possível para responder as questões;***

Questão 1: (Valor 2,0) Determine o domínio de definição e a imagem da função $y = \dfrac{1}{\sqrt{\left(\dfrac{1}{x^2} - 1\right)}}$.

Questão 2: (Valor 2,0) Determine, se possível, os seguintes limites:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \left[\dfrac{1 - \cos(x)}{sen(x)} \right]$, b) $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \lim\limits_{n \to \infty} \left[\dfrac{5n^3 + 3}{n^3 + 5n^2 + 1} \right] \left[\dfrac{3 + n}{n + 2} \right]^{(n+2)}$

Questão 3: (Valor 2,0) Seja $f(x) = \begin{cases} \left(\dfrac{ax + 2}{3x + 2} \right)^{\frac{1}{x}}, & \text{se } x < 0 \\ e^{\frac{1}{3}}, & \text{se } x = 0 \\ (1 + x)^{\frac{bx+1}{3x}}, & \text{se } x > 0 \end{cases}$. Como devem ser escolhidos os números "a" e "b" para que a função seja continua em x=0. Considere que a>3.

Questão 4: (Valor 2,0) Determine o diferencial de primeira da função

$f(x) = \cos(x^2 + 5)e^{(2x)} + e^x ctg(x)$.

Questão 5: (Valor 2,0) Encontre os extremos relativos e absolutos da função $y = (x^3 - 3x + 3)$ no intervalo $x \in [-2, 3]$.

Q1) $y = \dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{x^2} - 1}} = \dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1-x^2}{x^2}}} = \dfrac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{|x|}{\sqrt{1-x^2}}$

$1 - x^2 > 0 \Rightarrow x^2 < 1 \Rightarrow \sqrt{x^2} < 1 \Rightarrow |x| < 1 \Rightarrow -1 < x < 1$

Dom $f(x) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, -1 < x < 1\}$

Imagem $\boxed{\text{se } a < b \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}}$

$1 \geq 1 - x^2 > 0$ ou $0 < 1 - x^2 \leq 1 \Rightarrow 0 < \sqrt{1-x^2} \leq 1$

$+\infty > \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \geq 1$ ou $1 \leq \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} < +\infty$ $\Big|\, * \;|x| > 0$

segue $|x| \leq \dfrac{|x|}{\sqrt{1-x^2}} < +\infty \Rightarrow 0 \leq y < +\infty$ logo

Im $f(x) = \{y \in \mathbb{R} \,/\, y \geq 0\}$.

Q2) a) $\lim_{x \to 0} \left[\dfrac{1 - \cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}\right]$ $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ aplicando L'Hôpital

$= \lim_{x \to 0} \dfrac{0 - (-\operatorname{sen}(x))}{\cos(x)} = \lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} = \dfrac{0}{1} = 0.$

b) $\lim_{n \to \infty} \left[\dfrac{5n^3 + 3}{n^3 + 5n^2 + 1}\right] = \lim_{n \to \infty} \dfrac{n^3\left(5 + \frac{3}{n^3}\right)}{n^3\left(1 + \frac{5}{n} + \frac{1}{n^3}\right)} = \lim_{n \to \infty} \dfrac{\left(5 + \frac{3}{n^3}\right)}{\left(1 + \frac{5}{n} + \frac{1}{n^3}\right)} =$

$= \dfrac{5 + 0}{1 + 0 + 0} = 5.$

$\lim_{n \to \infty} \left[\dfrac{3 + n}{n + 2}\right]^{n+2} = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{n+2}\right)^{n+2}$ fazendo $m = n + 2$

$= \lim_{m \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{m}\right)^m = e$. Portanto.

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{5n^3+3}{n^3+5n^2+1}\right]\left[\frac{3+n}{n+2}\right]^{(n+2)} = 5\cdot e$$

Q3) $$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{ax+2}{3x+2}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{3x+2+(a-3)x}{3x+2}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^-}\left(1+\frac{(a-3)x}{3x+2}\right)^{\frac{1}{x}}$$

fazendo $y = \frac{(a-3)x}{3x+2}$ como $a>3 \Rightarrow (a-3)>0$ e $y\to 0^-$ se $x\to 0^-$

$$= \lim_{y\to 0^-}(1+y)^{\left[\frac{(a-3)-3y}{2y}\right]} =$$

$$(3x+2)y = (a-3)x$$
$$x[3y-(a-3)]+2y=0$$
$$x[3y-a+3] = -2y$$
$$x = \frac{2y}{(a-3)-3y}$$

$$= \lim_{y\to 0^-}[1+y]^{\frac{(a-3)}{2y}}[1+y]^{-\frac{3}{2}} =$$

$$= \lim_{y\to 0^-}\left[[1+y]^{\frac{1}{y}}\right]^{\frac{(a-3)}{2}}\cdot\lim_{y\to 0^-}[1+y]^{-\frac{3}{2}} = e^{\frac{a-3}{2}}\cdot 1^{-\frac{2}{3}} = e^{\frac{a-3}{2}}$$

$$\lim_{x\to 0^+}(1+x)^{\frac{bx+1}{3x}} = \lim_{x\to 0^+}(1+x)^{\frac{b}{3}}(1+x)^{\frac{1}{3x}} = \lim_{x\to 0^+}(1+x)^{\frac{b}{3}}\cdot\lim_{x\to 0^+}\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]^{\frac{1}{3}}$$

$= 1^{\frac{b}{3}}\cdot e^{\frac{1}{3}} = e^{\frac{1}{3}}$. Logo, para que exista o limite em $x=0$ $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) \Rightarrow e^{\frac{a-3}{2}} = e^{\frac{1}{3}} \Rightarrow \frac{a-3}{2} = \frac{1}{3} \Rightarrow$

$$a-3 = \frac{2}{3} \Rightarrow a = 3+\frac{2}{3} = \frac{9+2}{3} = \frac{11}{3},\ \forall b\in\mathbb{R}$$

Para que $f(x)$ seja contínua em $x=0$

$\lim_{x\to 0} f(x) = f(x=0)$ que se verifica para $a=\frac{11}{3}$ $\forall b\in\mathbb{R}$.

Q4) $df = \frac{df}{dx}\cdot dx$, $f(x) = \underbrace{\cos(x^2+5)\,e^{(2x)}}_{g(x)} + \underbrace{e^{x}\,\mathrm{ctg}(x)}_{h(x)}$.

$$g(x) = \underbrace{\cos(x^2+5)}_{g_1(x)} \underbrace{e^{(2x)}}_{g_2(x)}, \quad h(x) = \underbrace{e^x}_{h_1(x)} \cdot \underbrace{ctg(x)}_{h_2(x)}$$

$$g'(x) = g_1'(x)\, g_2(x) + g_1(x) \cdot g_2'(x)$$

$$g_1'(x) = \Big(\cos\big(\underbrace{x^2+5}_{u(x)}\big)\Big)' = \frac{dg_1}{du} \cdot \frac{du}{dx} = -\operatorname{sen}(u) \cdot 2x = -2x \operatorname{sen}(x^2+5)$$

$$g_2'(x) = \Big(e^{\overset{v}{(2x)}}\Big)' = \frac{dg_2}{dv} \cdot \frac{dv}{dx} = e^v \cdot 2 = 2e^{(2x)}$$

$$g'(x) = -2x \operatorname{sen}(x^2+5) \cdot e^{(2x)} + \cos(x^2+5) \cdot 2e^{(2x)}$$

$$= 2e^{(2x)} \left[\cos(x^2+5) - x \operatorname{sen}(x^2+5)\right].$$

$$h'(x) = h_1'(x)\, h_2(x) + h_1(x) \cdot h_2'(x)$$

$$h_1'(x) = e^x, \quad h_2'(x) = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2(x)}$$

$$h'(x) = e^x\, ctg(x) + e^x\left(-\frac{1}{\operatorname{sen}^2(x)}\right) = e^x \left[\frac{\operatorname{sen}(x)\cos(x) - 1}{\operatorname{sen}^2(x)}\right]$$

$$df = \left[\frac{dg}{dx} + \frac{dh}{dx}\right] dx$$

$$df = \left\{ 2e^{(2x)}\left[\cos(x^2+5) - x\operatorname{sen}(x^2+5)\right] + e^x\left[\frac{\operatorname{sen}(x)\cos(x) - 1}{\operatorname{sen}^2(x)}\right]\right\} dx$$

Q5) $y = (x^3 - 3x + 3)$, $x \in [-2, 3]$.

- Extremos relativos

• Condição necessária $y' = 0$ ou y' não existe (pontos críticos)

$$y' = 3x^2 - 3 = 3(x^2-1) = 3(x-1)(x+1) = 0$$

$x_1 = -1$ e $x_2 = 1$

• Condição suficiente $y'' = \begin{cases} <0 & \text{máximo relativo} \\ >0 & \text{mínimo relativo} \end{cases}$

$y'' = (y')' = (3x^2 - 3)' = 6x$

$y''(x_1 = -1) = 6 \cdot (-1) = -6 < 0$ máximo relativo

$y''(x_2 = 1) = 6 \cdot 1 = 6 > 0$ mínimo relativo.

- Extremos absolutos

$y(x=-2) = (-2)^3 - 3 \cdot (-2) + 3 = -8 + 6 + 3 = 1$

$y(x=3) = (3)^3 - 3(3) + 3 = 27 - 9 + 3 = 21$

$y(x=-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 3 = -1 + 3 + 3 = 5$

$y(x=1) = (1)^3 - 3(1) + 3 = 1 - 3 + 3 = 1$

A função alcança seu máximo absoluto no ponto $x = 3$ com valor $y = 21$. A função alcança seu mínimo absoluto nos pontos $x = -2$ e $x = 1$ com valor $y = 1$

Criterios

Q1) Dom 1 pto, Imagem 1 pto

Q2) a) 1 pto b) 1 pto

Q3) i) 0,4 pto ii) lim (pto) 1,2 pto iii) 0,4 pto laterais.
nono 0,6 + 0,6

Q4) $\frac{df}{dx}$ 1,5 pto df: 0,5 pto $df = \frac{df}{dx} \cdot dx$
0,7 x 2 + 0,1

Q5) Extremos relativos 1,5 = 0,7 X 2 + 0,1
Extremos absolutos 0,5