UFF – Universidade Federal Fluminense
Escola de Engenharia Industrial e Metalúrgica de Volta Redonda
Disciplina: Cálculo I
Prof. Gustavo Benitez Alvarez
Nome do Aluno (letra forma): ______________________________
Assinatura do Aluno: ______________________________
Prova Escrita Nº 1 Turma V1 02/2007

Observações:

- **Desligue os aparelhos celulares;**
- **Não rasure esta folha, pois cálculos realizados nesta, não serão considerados. Use a folha de Respostas;**
- **Não existem dúvidas a serem esclarecidas. A interpretação de cada questão faz parte da Avaliação;**
- **Provas respondidas à lápis não terão direito a recorreção. Logo, faça a prova com caneta azul ou preta;**
- **Não é permitido compartilhar materiais didáticos;**
- **É permitido o uso de calculadoras científicas;**
- **Resolva todas as questões pois para a nota final serão consideradas todas as questões acumulando no máximo dez pontos.**

Questão 1: (Valor 2,5) Determine, se possível, os seguintes limites:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{4n^3+n+5}{n^3+n^2+1}\right]\left[\frac{n+4}{n+2}\right]^n \quad \text{e} \quad \lim_{x\to\frac{2}{3}} f(x) = \lim_{x\to\frac{2}{3}}\left[\frac{sen(3x-2)}{x-\frac{2}{3}} + \left[\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{\frac{2}{3}}}{\sqrt{x}-\sqrt{\frac{2}{3}}}\right]\right].$$

Questão 2: (Valor 2,5) Analise a continuidade da seguinte função no ponto $x=1$:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x-1|^3-2(x-1)^2}{(x-1)^2} & \text{se } x<1\\ 1 & \text{se } x=1\\ \dfrac{-3(x-1)+\ln(x)}{(x-1)} & \text{se } x>1\end{cases}.$$

Questão 3: (Valor 2,5) Determine o diferencial de primeira ordem da função

$$f(x)=e^{sen(x)}+\frac{(x^2+2x\ -3)}{(x\ +2)}.$$

Questão 4: (Valor 2,5) Encontre os extremos relativos e absolutos da função $f(x)=e^{-x^2}$ no intervalo $x\in[-1,1]$.

1) Determine Limites:

a) $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{4n^3+n+5}{n^3+n^2+1}\right]\left[\frac{n+4}{n+2}\right]^n$

$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{4n^3+n+5}{n^3+n^2+1}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3\left[4+\frac{1}{n^2}+\frac{5}{n^3}\right]}{n^3\left[1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}\right]}=$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left[4+\frac{1}{n^2}+\frac{5}{n^3}\right]}{\left[1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}\right]}=\frac{4+0+0}{1+0+0}=\frac{4}{1}=4.$

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+4}{n+2}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2+2}{n+2}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n+2}\right)^n=$

fazendo $m=\frac{n+2}{2}\Rightarrow m\to\infty$ quando $n\to\infty$ e

$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{2m-2}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right]^2\left(1+\frac{1}{m}\right)^{-2}=$

$=e^2\cdot 1^{-2}=e^2$. Portanto o limite existe e

$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{4n^3+n+5}{n^3+n^2+1}\right]\left[\frac{n+4}{n+2}\right]^n=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{4n^3+n+5}{n^3+n^2+1}\right]\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+4}{n+2}\right)^n=$

$=4\cdot e^2.$

b) $\lim_{x\to\frac{2}{3}}\left[\frac{\operatorname{sen}(3x-2)}{\left(x-\frac{2}{3}\right)}+\frac{\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right)}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)}\right]$

$\lim_{x\to\frac{2}{3}}\frac{\operatorname{sen}(3x-2)}{\frac{(3x-2)}{3}}=\lim_{x\to\frac{2}{3}}3\frac{\operatorname{sen}(3x-2)}{(3x-2)}$ fazendo $y=3x-2$

segue que $y \to 0$ quando $x \to \frac{2}{3}$, logo:

$$\lim_{y \to 0} 3 \frac{\operatorname{sen} y}{y} = 3 \lim_{y \to 0} \frac{\operatorname{sen} y}{y} = 3 \cdot 1 = 3.$$

$\lim_{x \to \frac{2}{3}} \left(\frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{\frac{2}{3}}}{\sqrt{x} - \sqrt{\frac{2}{3}}} \right)$ fazendo $y^6 = x$ segue que $y \to \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{6}}$ quando $x \to \frac{2}{3}$, logo.

$$\lim_{y \to \sqrt[6]{\frac{2}{3}}} \frac{\left(y^2 - \sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right)}{\left(y^3 - \sqrt{\frac{2}{3}}\right)}$$

como $y = \sqrt[6]{\frac{2}{3}}$ é uma raiz de ambos os polinômios vou simplificar por $\left(y - \sqrt[6]{\frac{2}{3}}\right)$ ambos.

$$\begin{array}{l|l}
y^2 - \sqrt[3]{\frac{2}{3}} & y - \sqrt[6]{\frac{2}{3}} \\ \hline
-\left(y^2 - y\sqrt[6]{\frac{2}{3}}\right) & y + \sqrt[6]{\frac{2}{3}} \\
\sqrt[6]{\frac{2}{3}}\, y - \sqrt[3]{\frac{2}{3}} & \\
-\left(\sqrt[6]{\frac{2}{3}}\, y - \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{6}}\right) & \\
\sqrt[3]{\frac{2}{3}} - \sqrt[3]{\frac{2}{3}} = 0 &
\end{array}$$

$$y^2 - \sqrt[3]{\frac{2}{3}} = \left(y - \sqrt[6]{\frac{2}{3}}\right)\left(y + \sqrt[6]{\frac{2}{3}}\right)$$

$$\begin{array}{l|l}
y^3 - \sqrt{\frac{2}{3}} & y - \sqrt[6]{\frac{2}{3}} \\ \hline
-\left(y^3 - \sqrt[6]{\frac{2}{3}}\, y^2\right) & y^2 + \sqrt[6]{\frac{2}{3}}\, y + \sqrt[3]{\frac{2}{3}} \\
\sqrt[6]{\frac{2}{3}}\, y^2 - \sqrt{\frac{2}{3}} & \\
-\left(\sqrt[6]{\frac{2}{3}}\, y^2 - \sqrt[3]{\frac{2}{3}}\, y\right) & \\
\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\, y - \sqrt{\frac{2}{3}} & \\
-\left(\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\, y - \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{6}+\frac{1}{3}}\right) & \\
\sqrt{\frac{2}{3}} - \sqrt{\frac{2}{3}} = 0 &
\end{array}$$

$$y^3 - \sqrt{\frac{2}{3}} = \left(y - \sqrt[6]{\frac{2}{3}}\right)\left(y^2 + \sqrt[6]{\frac{2}{3}}\, y + \sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right)$$

$$\lim_{y \to \sqrt[6]{\frac{2}{3}}} \frac{\left(y - \sqrt[6]{\frac{2}{3}}\right)\left(y + \sqrt[6]{\frac{2}{3}}\right)}{\left(y - \sqrt[6]{\frac{2}{3}}\right)\left(y^2 + \sqrt[6]{\frac{2}{3}}\, y + \sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right)} = \lim_{y \to \sqrt[6]{\frac{2}{3}}} \frac{\left(y + \sqrt[6]{\frac{2}{3}}\right)}{\left(y^2 + \sqrt[6]{\frac{2}{3}}\, y + \sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right)} =$$

iii) Como $-2 = \lim_{x \to 1} f(x) \neq f(x=1) = 1$ a função não é contínua em $x=1$.

---

3) Diferencial de primeira ordem de

$$f(x) = e^{\operatorname{sen} x} + \frac{(x^2+2x-3)}{(x+2)}, \quad df = \frac{df}{dx} \cdot dx$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}\left(f_1(x) + f_2(x)\right), \text{ onde } f_1(x) = e^{\operatorname{sen} x} \text{ e } f_2(x) = \frac{(x^2+2x-3)}{x+2}$$

$$\frac{df_1}{dx} = \frac{d e^u}{du} \cdot \frac{du}{dx}, \text{ com } u = \operatorname{sen} x, \text{ logo } \frac{du}{dx} = \cos x \text{ e}$$

$$= e^u \cdot \cos x = e^{\operatorname{sen} x} \cos x.$$

$$\frac{df_2}{dx} = \left(\frac{x^2+2x-3}{x+2}\right)' = \frac{(x^2+2x-3)'(x+2) - (x^2+2x-3)(x+2)'}{(x+2)^2} =$$

$$= \frac{(2x+2)(x+2) - (x^2+2x-3)}{(x+2)^2} = \frac{2x^2+4x+2x+4-x^2-2x+3}{(x+2)^2} =$$

$$= \frac{(x^2+4x+7)}{(x+2)^2}. \text{ Portanto:}$$

$$\frac{df}{dx} = \cos x \, e^{\operatorname{sen} x} + \frac{x^2+4x+7}{(x+2)^2} \text{ e}$$

$$df = \left[\cos x \, e^{\operatorname{sen} x} + \frac{(x^2+4x+7)}{(x+2)^2}\right] dx.$$

---

4) Extremos relativos e absolutos de $f(x) = e^{-x^2}$ no intervalo $[-1, 1]$.

$$= \frac{\sqrt[6]{\frac{2}{3}} + \sqrt[6]{\frac{2}{3}}}{\left(\sqrt[6]{\frac{2}{3}}\right)^2 + \sqrt[6]{\frac{2}{3}}\sqrt[6]{\frac{2}{3}} + \sqrt[3]{\frac{2}{3}}} = \frac{2\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{6}}}{\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{3}}} = \frac{2\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{6}}}{3\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{3}}} =$$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{6}-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{1}{6}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{5}{6}} \quad \boxed{L = 3 + \left(\frac{2}{3}\right)^{5/6}}$$

2) continuidade de $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x-1|^3 - 2(x-1)^2}{(x-1)^2} & \text{se } x < 1 \\ 1 & \text{se } x = 1 \\ \dfrac{-3(x-1) + \ln x}{(x-1)} & \text{se } x > 1 \end{cases}$ em $x = 1$.

i) $f(x=1) = 1$ definida

ii) $$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{\left[|x-1|^3 - 2(x-1)^2\right]}{(x-1)^2} =$$

$$= \lim_{x\to 1^-}\left[\frac{|x-1|\,|x-1|^2}{(x-1)^2} - 2\right] = \lim_{x\to 1^-}\left[|x-1| - 2\right] = -2$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{\left[-3(x-1) + \ln x\right]}{(x-1)} = \lim_{x\to 1^+}\left[-3 + \frac{\ln x}{x-1}\right] =$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{y\to 0^+} \frac{\ln(1+y)}{y} = \quad \text{fazendo } y = x-1$$

$\lim_{y\to 0^+} \frac{y}{y} = 1$. Portanto

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = [-3 + 1] = -2$. Logo em $x = 1$ existe o limite porque o limites laterais são iguais.

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = -2.$$

Extremos relativos.

- condição necessaria:

Encontrar os pontos críticos, pontos onde a derivada se anula ou não existe.

Como a função $f(x) = e^{-x^2}$ possue derivada para todos os reais o problema se reduz a encontrar os pontos onde a derivada se anula.

$$\frac{df}{dx} = 0 . \qquad \frac{df}{dx} = \frac{d e^u}{du} \cdot \frac{du}{dx} \qquad \text{com } u = -x^2, \ \frac{du}{dx} = -2x$$

$$\frac{df}{dx} = e^u \cdot (-2x) = -2x e^{-x^2} = 0 \quad \text{se } -2x = 0 \text{ ou } x = 0.$$

- condição suficiente:

$$\frac{d^2f}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right) = \left(-2x e^{-x^2}\right)' = (-2x)' e^{-x^2} + (-2x)\left(e^{-x^2}\right)' =$$

$$= -2e^{-x^2} + (-2x)(-2x) e^{-x^2} = e^{-x^2}[4x^2 - 2] = 2e^{-x^2}[2x^2 - 1]$$

$$\frac{d^2f(x=0)}{dx^2} = 2e^{-0^2}[2 \cdot 0^2 - 1] = 2 \cdot 1 [0 - 1] = -2 < 0,$$ logo em $x = 0$ $f(x)$ possue um máximo relativo.

ii) Extremos absolutos.

$f(x=0) = e^{-0^2} = e^0 = 1.$ máximo absoluto

$$\left.\begin{aligned} f(x=-1) &= e^{-(-1)^2} = e^{-1} = \frac{1}{e} < 1 \\ f(x=1) &= e^{-1^2} = e^{-1} = \frac{1}{e} < 1 \end{aligned}\right\} \text{ mínimos absolutos.}$$

Portanto, a função alcança seu máximo absoluto em $x=0$ que também coincide com o máximo relativo. A função alcança seu mínimo absoluto nos pontos $x=-1$ e $x=1$, ou seja, nos extremos do intervalo.