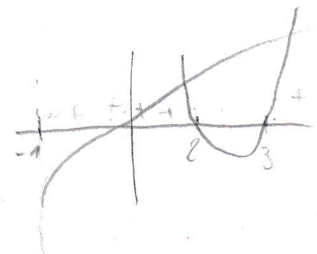


UFF – Universidade Federal Fluminense
Escola de Engenharia Industrial e Metalúrgica de Volta Redonda
Disciplina: Cálculo I
Prof. Gustavo Benitez Alvarez
Nome do Aluno (letra forma): ______________________________
Assinatura do Aluno: ______________________________________
Prova Escrita Nº 1 Turma V1 02/2010

Observações:

- **Desligue os aparelhos celulares;**
- **Não rasure esta folha, pois cálculos realizados nesta, não serão considerados. Use a folha de Respostas;**
- **Não existem dúvidas a serem esclarecidas. A interpretação de cada questão faz parte da Avaliação;**
- **Provas respondidas à lápis não terão direito a recorreção. Logo, faça a prova com <u>caneta azul</u> ou <u>preta</u>;**
- **Não é permitido compartilhar materiais didáticos;**
- **É permitido o uso de calculadoras científicas;**
- **Resolva todas as questões pois para a nota final serão consideradas as cinco questões com maior pontuação, acumulando então no máximo dez pontos.**
- ***Seja o mais explicito possível para responder as questões;***

Questão 1: (Valor 2,0) Determine o domínio de definição da função $y = \ln(x+1)\sqrt{x^2 - 5x + 6}$.

Questão 2: (Valor 2,0) Determine, se possível, os seguintes limites:

a) $\lim_{x\to 0}\left[\cos(2x)\right]^{\frac{3}{x^2}}$, b) $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{3n^4 + 2n^3 + 3n + 2}}{n^2 + 3n + 1}\left[\frac{n+5}{n}\right]^n$.

Questão 3: (Valor 2,0) Seja $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(x-1)}{x^2 - 4}, & \text{se } x \neq 2 \\ 1, & \text{se } x = 2 \end{cases}$. Analise a continuidade de $f(x)$ em $x = 2$.

Questão 4: (Valor 2,0) Determine o diferencial de primeira ordem da função

$$f(x) = \frac{\left[2x^2 + 3x + 2\right]e^{2x}}{sen(x)}.$$

Questão 5: (Valor 2,0) Encontre os extremos relativos e absolutos da função $f(x) = x^3 - 3x + 3$ no intervalo $[-2,3]$.

1) $y = \underbrace{\ln(x+1)}_{f_1(x)} \underbrace{\sqrt{x^2-5x+6}}_{f_2(x)}$

para f_1 temos $x+1>0 \Rightarrow x>-1$ logo

$Dom\, f_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -1\}$

para f_2 temos $x^2-5x+6 \geq 0 \Rightarrow x^2-5x+6+\left(\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2 \geq 0$

$\Rightarrow \left[x^2-5x+\left(\frac{5}{2}\right)^2\right]+\left[6-\left(\frac{5}{2}\right)^2\right] \geq 0 \Rightarrow \left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{24-25}{4} \geq 0$

$\Rightarrow \left(x-\frac{5}{2}\right)^2 \geq \frac{1}{4} \Rightarrow \sqrt{\left(x-\frac{5}{2}\right)^2} \geq \sqrt{\frac{1}{4}} \Rightarrow \left|x-\frac{5}{2}\right| \geq \frac{1}{2}$

cuja solução é:

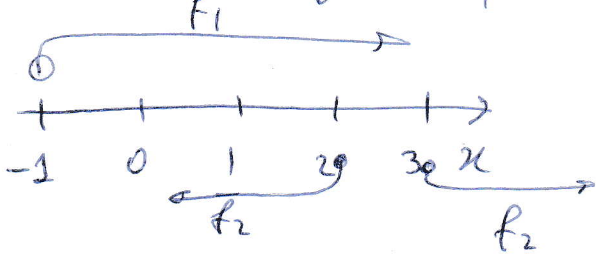
para $\left(x-\frac{5}{2}\right) \geq 0 \Rightarrow x-\frac{5}{2} \geq \frac{1}{2} \Rightarrow x \geq \frac{1}{2}+\frac{5}{2} = \frac{6}{2} = 3$

para $\left(x-\frac{5}{2}\right) < 0 \Rightarrow -\left(x-\frac{5}{2}\right) \geq \frac{1}{2} \Rightarrow x-\frac{5}{2} \leq -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow x \leq -\frac{1}{2}+\frac{5}{2} = \frac{4}{2} = 2.$ logo

$Dom\, f_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2 \text{ ou } x \geq 3\}$ Portanto

$Dom\, f = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leq 2 \text{ ou } x \geq 3\}.$



---

2) a) $\lim_{x \to 0} [\cos(2x)]^{\frac{3}{x^2}}$ indeterminação do tipo 1^∞

$= \lim_{x \to 0} e^{\ln[\cos(2x)]^{\frac{3}{x^2}}} = \lim_{x \to 0} e^{\frac{3}{x^2}\ln[\cos(2x)]} = e^{L_1}$ se

existir $L_1 = \lim_{x \to 0} \frac{3\ln[\cos(2x)]}{x^2}$ indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$ e aplicando L' Hôpital - Bernoulli segue

$$\left(3 \ln[\cos(2x)]\right)' = 3 \frac{1}{\cos(2x)} \cdot -\operatorname{sen}(2x) \cdot 2 = -6 \frac{\operatorname{sen}(2x)}{\cos(2x)}$$

$$(x^2)' = 2x$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{[3 \ln[\cos(2x)]]'}{[x^2]'} = \lim_{x \to 0} \frac{-6 \operatorname{sen}(2x)}{2x \cos(2x)}$$

Como $\operatorname{sen}(2x) \sim 2x$ quando $x \to 0$ segue

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-6 \cancel{(2x)}}{\cancel{(2x)} \cos(2x)} = \lim_{x \to 0} \frac{-6}{\cos(2x)} = -6 \text{ logo}$$

$L_1 = -6$ e $\lim\limits_{x \to 0} [\cos(2x)]^{\frac{3}{x^2}} = e^{-6}$.

b) $\lim\limits_{n \to \infty} \left[\frac{n+5}{n}\right]^n = \lim\limits_{n \to \infty} \left[1 + \frac{5}{n}\right]^n$ fazendo

$m = \frac{n}{5}$ temos que $m \to \infty$ quando $n \to \infty$ e

$$\lim_{n \to \infty} \left[1 + \frac{5}{n}\right]^n = \lim_{m \to \infty} \left[1 + \frac{5}{5m}\right]^{5m} = \lim_{m \to \infty} \left\{\left[1 + \frac{1}{m}\right]^m\right\}^5$$

sabendo que $\lim\limits_{m \to \infty} \left[1 + \frac{1}{m}\right]^m = e$ segue

$$\lim_{m \to \infty} \left\{\left[1 + \frac{1}{m}\right]^m\right\}^5 = e^5$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sqrt{3n^4 + 2n^3 + 3n + 2}}{n^2 + 3n + 1} = \lim_{n \to \infty} \frac{\sqrt{n^4\left[3 + \frac{2}{n} + \frac{3}{n^3} + \frac{2}{n^4}\right]}}{n^2\left(1 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^2}\sqrt{3+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}+\frac{2}{n^4}}}{\cancel{n^2}\left(1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{3+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}+\frac{2}{n^4}}}{\left(1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}$$

$= \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$. logo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{3n^4+2n^3+3n+2}}{(n^2+3n+1)}\left[\frac{n+5}{n}\right]^n = \sqrt{3}\cdot e^5.$$

---

3) $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(x-1)}{x^2-4}, & \text{se } x \neq 2 \\ 1, & \text{se } x = 2. \end{cases}$

i) $f(x=2) = 1$.

ii) $\lim_{x\to 2} \frac{\ln(x-1)}{x^2-4} = \lim_{x\to 2} \frac{\ln(1+x-2)}{(x-2)(x+2)}$ como $\ln(1+x) \sim x$ quando $x \to 0$ $\ln[1+(x-2)] \sim (x-2)$ quando $(x-2) \to 0$

$= \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)}{(x-2)}\frac{1}{(x+2)} = \lim_{x\to 2} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{4}$

iii) Como $\lim_{x\to 2} f(x) = \frac{1}{4} \neq f(x=2)$ a função é descontínua em $x=2$.

---

4) $f(x) = \frac{[2x^2+3x+2]\, e^{2x}}{\operatorname{sen}(x)}$

$[2x^2+3x+2]' = 4x + 3$ $\quad (\operatorname{sen} x)' = \cos x.$

$[e^{2x}]' = e^{2x}\cdot 2$

$$f'(x) = \frac{\{[2x^2+3x+2]e^{2x}\}'\operatorname{sen} x - [2x^2+3x+2]e^{2x}\cdot(\operatorname{sen} x)'}{\operatorname{sen}^2 x}.$$

$$f'(x) = \frac{\{[4x+3]e^{2x} + [2x^2+3x+2]\cdot 2e^{2x}\}\,\text{sen}\,x - [2x^2+3x+2]e^{2x}\cos x}{\text{sen}^2 x}$$

$$f'(x) = \frac{e^{2x}[4x^2+6x+4+4x+3]\,\text{sen}\,x - (2x^2+3x+2)\,e^{2x}\cos x}{\text{sen}^2 x}$$

$$= \frac{e^{2x}\{[4x^2+10x+7]\,\text{sen}\,x - [2x^2+3x+2]\cos x\}}{\text{sen}^2 x}.$$

$$df = \frac{e^{2x}\{[4x^2+10x+7]\,\text{sen}\,x - [2x^2+3x+2]\cos x\}}{\text{sen}^2 x}\cdot dx.$$

---

5) $f(x) = x^3 - 3x + 3$ en $[-2,3]$.

Extremos Relativos.

C.N. $y' = 0$ ou $y' = \nexists$.

$y' = 3x^2 - 3 = 3(x^2-1) = 3(x-1)(x+1) = 0$

$x_1 = -1$ $\quad x_2 = -1$. pontos críticos

C.S.

$y'' = (y')' = 6x$. $\quad y''(x=-1) = 6\cdot(-1) = -6$ máximo relativo

$y''(x=1) = 6\cdot 1 = 6$ mínimo relativo

Extremos Absolutos.

$f(x=-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 3 = -1+3+3 = 5$ maximo relativo

$f(x=1) = (1)^3 - 3(1) + 3 = 1$ mínimo relativo

$f(x=-2) = (-2)^3 - 3(-2) + 3 = -8+6+3 = 1$

Mínimo Absoluto

$f(x=3) = (3)^3 - 3(3) + 3 = 21$ máximo Absoluto