	UFF – Universidade Federal Fluminense **Escola de Engenharia Industrial e Metalúrgica de Volta Redonda** **Disciplina: Cálculo I** **Prof. Gustavo Benitez Alvarez** **Nome do Aluno (letra forma):** ______________________ **Assinatura do Aluno:** ______________________ **Prova Escrita Nº 1 Turma V1/V3 01/2009**

Observações:

- **Desligue os aparelhos celulares;**
- **Não rasure esta folha, pois cálculos realizados nesta, não serão considerados. Use a folha de Respostas;**
- **Não existem dúvidas a serem esclarecidas. A interpretação de cada questão faz parte da Avaliação;**
- **Provas respondidas à lápis não terão direito a recorreção. Logo, faça a prova com caneta azul ou preta;**
- **Não é permitido compartilhar materiais didáticos;**
- **É permitido o uso de calculadoras científicas;**
- **Resolva todas as questões pois para a nota final serão consideradas as cinco questões com maior pontuação, acumulando então no máximo dez pontos.**
- ***Seja o mais explicito possível para responder as questões;***

Questão 1: (Valor 2,0) Determine o domínio de definição da função $y = \frac{sen(\frac{1}{x})}{\sqrt{4-x^2}} + \frac{\ln(1+x)}{e^{(x-1)}-1}$.

Questão 2: (Valor 2,0) Determine, se possível, os seguintes limites:

a) $\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{4-4\cos^2(x)}}\right]$, b) $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{\sqrt{4n^4-n^3+2n}}{2n^2+n}\right]\left[\frac{2n+2}{2n+1}\right]^{2n}$.

Questão 3: (Valor 2,0) A função $f(x) = a^x(x^2+3x+1)+2$ está definida $\forall x \in \mathrm{IR}$ com $a > 0$ e $a \neq 1$. Analise a continuidade da função neste domínio.

Questão 4: (Valor 2,0) Determine o diferencial de primeira ordem da função

$$f(x) = sen(2x)e^{(3x)} + x^{(x+1)^2}.$$

Questão 5: (Valor 2,0) Encontre os extremos relativos e absolutos da função $y = e^3 + (x^2+2x-1)e^{(x^2+2x+3)}$ no intervalo $x \in$ [-2.1 , 0.4].

Prova No 1 V1/V3 1/2009

1) Domínio de $y = \frac{\operatorname{sen}(\frac{1}{x})}{\sqrt{4-x^2}} + \frac{\ln(1+x)}{e^{(x-1)} - 1}$.

$\operatorname{sen}(\frac{1}{x})$ definido $\forall x \in \mathbb{R}$ e $x \neq 0$

$(\sqrt{4-x^2})^{-1}$ definido $\forall x \in \mathbb{R}$ e $4-x^2 > 0$ ou $x^2 < 4 \Rightarrow |x| < 2$

$\ln(1+x)$ definido $\forall x \in \mathbb{R}$ e $(1+x) > 0$ ou $x > -1$

$(e^{(x-1)} - 1)^{-1}$ definido $\forall x \in \mathbb{R}$ e $e^{(x-1)} - 1 \neq 0$ ou $e^{x-1} \neq 1 \Rightarrow x-1 \neq 0$ ou $x \neq 1$

$\operatorname{Dom} y = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 2$ e $x \neq 0$ e $x \neq 1\}$.

---

2) a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{4-4\cos^2 x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{4(1-\cos^2 x)}} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+4}-2}{2\sqrt{\operatorname{sen}^2 x}} =$

$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} \frac{\sqrt{x^2+4}-2}{|\operatorname{sen} x|}$ como $\operatorname{sen} x \sim x$ quando $x \to 0$ segue que $|\operatorname{sen} x| \sim |x|$ se $x \to 0$

$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} \frac{\sqrt{x^2+4}-2}{|x|} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} \frac{(x^2+4)-4}{|x|(\sqrt{x^2+4}+2)}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} \frac{x^2}{|x|} \frac{1}{(\sqrt{x^2+4}+2)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} \frac{|x|^2}{|x|} \frac{1}{(\sqrt{x^2+4}+2)}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} \frac{|x|}{(\sqrt{x^2+4}+2)} = \frac{1}{2} \frac{0}{4} = 0.$

b) $\lim_{n\to\infty} \left[\frac{2n+2}{2n+1}\right]^{2n} = \lim_{n\to\infty} \left[1 + \frac{1}{2n+1}\right]^{2n+1-1}$

$= \lim_{n\to\infty} \left[1 + \frac{1}{2n+1}\right]^{2n+1} \left[1 + \frac{1}{2n+1}\right]^{-1} = e \cdot 1 = e.$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{4n^4-n^3+2n}}{2n^2+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2\sqrt{1-\frac{1}{4n}+\frac{1}{2n^3}}}{2n^2\left(1+\frac{1}{2n}\right)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1-\frac{1}{4n}+\frac{1}{2n^3}}}{\left(1+\frac{1}{2n}\right)} = \frac{\sqrt{1-0+0}}{(1+0)} = 1.$$

Logo, $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\sqrt{4n^4-n^3+2n}}{2n^2+n}\right]\left[\frac{2n+2}{2n+1}\right]^{2n} = 1\cdot e = e.$

---

3) $f(x)$ é contínua em x_0 se $\lim_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0$.

$$\Delta y = y(x_0+\Delta x) - y(x_0) =$$

$$= a^{(x_0+\Delta x)}\left[(x_0+\Delta x)^2+3(x_0+\Delta x)+1\right]+2-\left[a^{x_0}(x_0^2+3x_0+1)+2\right]$$

$$= a^{x_0}a^{\Delta x}\left[x_0^2+2x_0\Delta x+(\Delta x)^2+3x_0+3\Delta x+1\right]+2-a^{x_0}(x_0^2+3x_0+1)-2$$

$$= a^{x_0}a^{\Delta x}\left[x_0^2+3x_0+1\right]+a^{x_0}a^{\Delta x}\left[(\Delta x)^2+2x_0\Delta x+3\Delta x\right]-a^{x_0}\left[x_0^2+3x_0+1\right]$$

$$= a^{x_0}\left[x_0^2+3x_0+1\right]\left[a^{\Delta x}-1\right]+a^{x_0}a^{\Delta x}\left[(\Delta x)^2+\Delta x(2x_0+3)\right]$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y = \lim_{\Delta x\to 0}\left\{a^{x_0}\left[x_0^2+3x_0+1\right]\left[a^{\Delta x}-1\right]+a^{x_0}a^{\Delta x}\left[(\Delta x)^2+\Delta x(2x_0+3)\right]\right\}$$

$$= a^{x_0}\left[x_0^2+3x_0+1\right]\lim_{\Delta x\to 0}\left[a^{\Delta x}-1\right]+a^{x_0}\lim_{\Delta x\to 0}a^{\Delta x}\left[(\Delta x)^2+\Delta x(2x_0+3)\right]$$

$$= a^{x_0}\left[x_0^2+3x_0+1\right]\times 0 + a^{x_0}\cdot a^0\left[0+0\right] = 0.$$

Logo $\forall x_0 \in \mathbb{R}$ a função é contínua.

4) $y = \operatorname{sen}(2x)\, e^{3x} + x^{(x+1)^2}$ ②

$y_1 = \operatorname{sen}(2x)\, e^{3x}$ e $y_2 = x^{(x+1)^2}$, logo $y = y_1 + y_2$. e

$\frac{df}{dx} = \frac{dy_1}{dx} + \frac{dy_2}{dx}$; $dy = \frac{df}{dx} \cdot dx$.

$\frac{dy_1}{dx} = \frac{d}{dx}(\operatorname{sen}(2x)) \cdot e^{3x} + \operatorname{sen}(2x) \frac{d}{dx}(e^{3x})$

$= \frac{d}{du}(\operatorname{sen} u) \cdot \frac{d(2x)}{dx} e^{3x} + \operatorname{sen}(2x) \cdot \frac{d}{du}(e^{u}) \frac{d(3x)}{dx}$

$= \cos(2x) \cdot 2\, e^{3x} + \operatorname{sen}(2x)\, e^{3x} \cdot 3$

$= e^{3x}\left[2\cos(2x) + 3\operatorname{sen}(2x)\right]$

$\frac{dy_2}{dx} \Rightarrow \ln y_2 = \ln x^{(x+1)^2} = (x+1)^2 \ln x$.

$\frac{d}{dx}(\ln y_2) = \frac{d}{dx}\left[(x+1)^2 \ln x\right]$

$\frac{1}{y_2} \cdot \frac{dy_2}{dx} = \frac{d[(x+1)^2]}{dx} \cdot \ln x + (x+1)^2 \frac{d}{dx}(\ln x)$.

$\frac{dy_2}{dx} = y_2 \left\{ 2(x+1) \cdot 1 \ln x + (x+1)^2 \frac{1}{x} \right\}$

$= x^{(x+1)^2} \left\{ 2(x+1) \ln x + (x+1)^2 \frac{1}{x} \right\}$

$= (x+1)\, x^{(x+1)^2} \left\{ \ln x^2 + \frac{(x+1)}{x} \right\}$.

$dy = \left\{ e^{3x}\left[2\cos(2x) + 3\operatorname{sen}(2x)\right] + (x+1)\, x^{(x+1)^2} \left[\ln x^2 + \frac{x+1}{x}\right] \right\} dx$.

5) $y = e^3 + (x^2+2x-1)\, e^{(x^2+2x+3)}$ ~~em~~ $[-2{,}1 \,,\, 0{,}4]$

Extremos relativos.

Condição necessária (pontos críticos $y'=0$ ou $y' = \nexists$).

$$y' = \cancel{(e^3)'}^{\,0} + (x^2+2x-1)'\, e^{(x^2+2x+3)} + (x^2+2x-1)\left[e^{(x^2+2x+3)}\right]'$$

$$= (2x+2)\, e^{(x^2+2x+3)} + (x^2+2x-1)\, e^{(x^2+2x+3)} (2x+2)$$

$$= 2(x+1)\, e^{(x^2+2x+3)} \left[1 + x^2+2x-1\right]$$

$$= 2(x+1)\, x\, (x+2)\, e^{(x^2+2x+3)}$$

Como não existe nenhum x_0 tal que $y' = \nexists$ apenas temos $y'=0$ ou $(x+1)\,x\,(x+2) = 0$ logo os pontos críticos são: $x_1 = -2$, $x_2 = -1$ e $x_3 = 0$.

Condição suficiente:

para $x_1 = -2$ temos

se $x < -2$, $y' = \overset{+}{2}\overset{-}{(x+1)}\,\overset{-}{x}\,\overset{-}{(x+2)}\,\overset{+}{e^{(x^2+2x+3)}} < 0$

se $x > -2$, $y' = \overset{+}{2}\,\overset{-}{(x+1)}\,\overset{-}{x}\,\overset{+}{(x+2)}\,\overset{+}{e^{(x^2+2x+3)}} > 0$

Logo em $x_1 = -2$ $f(x)$ tem um mínimo relativo.

para $x_2 = -1$ temos

se $x < -1$, $y' = \overset{+}{2}\,\overset{-}{(x+1)}\,\overset{-}{x}\,\overset{+}{(x+2)}\,\overset{+}{e^{(x^2+2x+3)}} > 0$

se $x > -1$, $y' = \overset{+}{2}\,\overset{+}{(x+1)}\,\overset{-}{x}\,\overset{+}{(x+2)}\,\overset{+}{e^{(x^2+2x+3)}} < 0$

Logo em $x_2 = -1$, $f(x)$ tem um máximo relativo.

para $x_3 = 0$ temos

se $x < 0$, $y' = \overset{+}{2}\,\overset{+}{(x+1)}\,\overset{-}{x}\,\overset{+}{(x+2)}\,\overset{+}{e^{(x^2+2x+3)}} < 0$

se $x > 0$, $y' = \underset{+}{2}\,\underset{+}{(x+1)}\,\underset{+}{x}\,\underset{+}{(x+2)}\,\underset{+}{e^{(x^2+2x+3)}} > 0$

Logo em $x_3 = 0$ $f(x)$ tem um mínimo relativo

<u>Extremos absolutos</u>

$$y(x_1=-2) = e^3 + [(-2)^2 + 2(-2) - 1]\, e^{[(-2)^2+2(-2)+3]}$$

$$= e^3 - e^3 = 0.$$

$$y(x_2=-1) = e^3 + [(-1)^2 + 2(-1) - 1]\, e^{[(-1)^2+2(-1)+3]}$$

$$= e^3 - 2e^2 = e^3 - 2\, e^{(3-1)} = e^3[1 - 2e^{-1}]$$

$$y(x_3=0) = e^3 + [0^2 + 2\cdot 0 - 1]\, e^{[0^2+2\cdot 0+3]} = e^3 - e^3 = 0$$

$$y(x=-2{,}1) = e^3 + [(-2{,}1)^2 + 2(-2{,}1) - 1]\, e^{[(-2{,}1)^2+2\cdot(-2{,}1)+3]}$$

$$= e^3 + [2{,}1\underbrace{(2{,}1-2)}_{0{,}1=10^{-1}} - 1]\, e^{[2{,}1(2{,}1-2)+3]}$$

$$= e^3 + [\underbrace{2{,}1\cdot 10^{-1}}_{0{,}21} - 1]\, e^{[2{,}1\cdot 10^{-1}+3]} = e^3 - 0{,}79\, e^{0{,}21}\, e^3$$

$$= e^3[1 - 0{,}79\, e^{0{,}21}]$$

$$y(x=0{,}4) = e^3 + [(0{,}4)^2 + 2\cdot 0{,}4 - 1]\, e^{[(0{,}4)^2+2\cdot 0{,}4+3]}$$

$$= e^3 + [\underbrace{0{,}16 + 0{,}8 - 1}_{-0{,}04}]\, e^{[0{,}16+0{,}8+3]}$$

$$= e^3[1 - 0{,}04\, e^{0{,}96}]$$

Como $0 < e^3[1-2e^{-1}] < \cancel{e^3[1-0{,}79e^{0{,}21}]} < e^3[1-0{,}04e^{0{,}96}]$

temos o máximo absoluto em $x = 0{,}4$ e o mínimo absoluto em $x=-2$ e $x=0$. Em $x=-1$ $f(x)$ alcança seu máximo relativo e mínimos relativos em $x=-2$ e $x=0$.

$$0 < e^3[1-0{,}79\, e^{0{,}21}] < e^3[1-2e^{-1}] < e^3[1-0{,}04\, e^{0{,}96}]$$