UFF – Universidade Federal Fluminense
Escola de Engenharia Industrial e Metalúrgica de Volta Redonda
Disciplina: Cálculo I
Prof. Gustavo Benitez Alvarez
Nome do Aluno (letra forma): ______________________________
Assinatura do Aluno: ______________________________

Prova Escrita Nº 1 Turma V1 e V3 02/2008

Observações:

- **Desligue os aparelhos celulares;**
- **Não rasure esta folha, pois cálculos realizados nesta, não serão considerados. Use a folha de Respostas;**
- **Não existem dúvidas a serem esclarecidas. A interpretação de cada questão faz parte da Avaliação;**
- **Provas respondidas à lápis não terão direito a recorreção. Logo, faça a prova com <u>caneta azul</u> ou <u>preta</u>;**
- **Não é permitido compartilhar materiais didáticos;**
- **É permitido o uso de calculadoras científicas;**
- **Resolva todas as questões pois para a nota final serão consideradas as cinco questões com maior pontuação, acumulando então no máximo dez pontos.**
- ***Seja o mais explicito possível para responder as questões;***

Questão 1: (Valor 2,0) Determine o domínio de definição da função $y = \dfrac{\sqrt{(x^2-1)}}{sen(x)} + \dfrac{x^3-6x^2+11x-6}{x^2-5x+6}$.

Questão 2: (Valor 2,0) Determine, se possível, os seguintes limites:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{2}}\right]\left[\dfrac{\ln(1+3x)}{sen(2x)}\right]$, b) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left\{\left[\dfrac{2n^3-n+3}{n^3+2n^2+1}\right]+\left[\dfrac{2n+5}{2(n+1)}\right]^{(n+1)}\right\}$.

Questão 3: (Valor 2,0) Analise a continuidade da seguinte função no ponto $x=2$:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-6x^2+11x-6}{x^2-5x+6}, & \text{se } x\neq 2 \text{ e } x\in[\frac{3}{2},\frac{5}{2}] \\ 1, & \text{se } x=2\end{cases}.$$

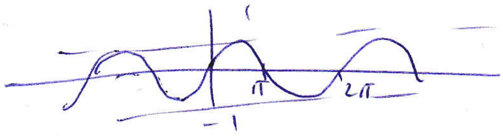
Questão 4: (Valor 2,0) Determine o diferencial de primeira ordem da função

$$f(x)=\frac{x^2 sen(x^2)+e^{\cos(x)}}{x^2+3}.$$

Questão 5: (Valor 2,0) Encontre os extremos relativos e absolutos da função $y=(x-1)^2(x-3)$ no intervalo $x\in[0,4]$.

P1 T V1 e V3 2/2008 (1)

Q1) $y = \underbrace{\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{\operatorname{sen} x}}_{f_1} + \underbrace{\dfrac{x^3-6x^2+11x-6}{x^2-5x+6}}_{f_2}$



$f_1 = \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{\operatorname{sen} x}$ $\quad \operatorname{sen} x \neq 0 \Rightarrow x \neq \pm n\pi,\ n = 0, 1, 2, \dots$

$x^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq 1 \Rightarrow \sqrt{x^2} \geq \sqrt{1} \Rightarrow |x| \geq 1$

ou ($x \geq 1$ ou $x \leq -1$). Logo $\operatorname{Dom} f_1 = \{x \in \mathbb{R} \,/\, |x| \geq 1 \text{ e } x \neq \pm n\pi,\ n = 0, 1, 2, \dots\}$.

$f_2 = \dfrac{x^3-6x^2+11x-6}{x^2-5x+6}$, $\quad x^2 - 5x + 6 \neq 0 \quad x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$x_1 = 2 \Rightarrow 4 - 10 + 6 = 0$ e $x_2 = 3 \Rightarrow 9 - 15 + 6 = 0$. Logo

$\operatorname{Dom} f_2 = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \neq 2 \text{ e } x \neq 3\}$. Portanto

$\operatorname{Dom} f = \{x \in \mathbb{R} \,/\, |x| \geq 1,\ x \neq 2,\ x \neq 3 \text{ e } x \neq \pm n\pi,\ n = 0, 1, 2, \dots\}$.

Q2) a) $\lim\limits_{x \to 1} \left[\dfrac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2}}{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{2}}\right]\left[\dfrac{\ln(1+3x)}{\operatorname{sen}(2x)}\right] = L.$

$L_1 = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2}}{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{2}}$ Indeterminado $\dfrac{0}{0}$ $\quad y^6 = x+1$ temos

$\lim\limits_{x \to 1} y = \lim\limits_{x \to 1} \sqrt[6]{x+1} = \sqrt[6]{2}$ Logo,

$L_1 = \lim\limits_{y \to \sqrt[6]{2}} \dfrac{y^3 - \sqrt{2}}{y^2 - \sqrt[3]{2}}$

$$\begin{array}{l|l}
y^3 - \sqrt{2} & y - \sqrt[6]{2} \\ \hline
-(y^3 - \sqrt[6]{2}\, y^2) & y^2 + \sqrt[6]{2}\, y + \sqrt[3]{2} \\ \cline{1-1}
\sqrt[6]{2}\, y^2 - \sqrt{2} & \\
-(\sqrt[6]{2}\, y^2 - \sqrt[3]{2}\, y) & \\ \cline{1-1}
\sqrt[3]{2}\, y - \sqrt{2} & \\
\sqrt[3]{2}\, y - \sqrt{2} & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

$y^3 - \sqrt{2} = (y - \sqrt[6]{2})(y^2 + \sqrt[6]{2}\, y + \sqrt[3]{2})$

$$
\begin{array}{l|l}
y^2 - \sqrt[3]{2} & y - \sqrt[6]{2} \\
\hline
-(y^2 - \sqrt[6]{2}y) & y + \sqrt[6]{2} \\
\sqrt[6]{2}y - \sqrt[3]{2} & \\
-(\sqrt[6]{2}y - \sqrt[3]{2}) & \\
0 &
\end{array}
$$

$$y^2 - \sqrt[3]{2} = (y - \sqrt[6]{2})(y + \sqrt[6]{2})$$

$$L_1 = \lim_{y \to \sqrt[6]{2}} \frac{\cancel{(y - \sqrt[6]{2})}(y^2 + \sqrt[6]{2}y + \sqrt[3]{2})}{\cancel{(y - \sqrt[6]{2})}(y + \sqrt[6]{2})} =$$

$$= \lim_{y \to \sqrt[6]{2}} \frac{y^2 + \sqrt[6]{2}y + \sqrt[3]{2}}{y + \sqrt[6]{2}} = \frac{\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2}}{2\sqrt[6]{2}}$$

$$= \frac{3}{2}\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[6]{2}} = \frac{3}{2}\sqrt[6]{2}.$$

$$L_2 = \lim_{x \to 1} \frac{\ln(1+3x)}{\operatorname{sen}(2x)} = \frac{\ln(4)}{\operatorname{sen}(2)}.$$ Logo.

$$L = L_1 \cdot L_2 = \frac{3}{2}\sqrt[6]{2} \cdot \frac{\ln(4)}{\operatorname{sen}(2)}.$$

b) $$\lim_{n \to \infty} \frac{2n^3 - n + 3}{n^3 + 2n^2 + 1} = \lim_{n \to \infty} \frac{n^3(2 - \frac{1}{n^2} + \frac{3}{n^3})}{n^3(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^3})} =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{(2 - \frac{1}{n^2} + \frac{3}{n^3})}{(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^3})} = \frac{2 - 0 + 0}{1 + 0 + 0} = 2.$$

$$\lim_{n \to \infty} \left[\frac{2n+5}{2(n+1)}\right]^{n+1} = \lim_{n \to \infty} \left[\frac{2(n+1) + 3}{2(n+1)}\right]^{n+1} = \lim_{n \to \infty} \left[1 + \frac{3}{2(n+1)}\right]^{n+1} =$$

$m = n+1 \Rightarrow m \to \infty$ quando $n \to \infty$ $\quad p = \frac{2m}{3}$

$$\lim_{m \to \infty} \left[1 + \frac{3}{2m}\right]^m = \lim_{p \to \infty} \left(1 + \frac{1}{p}\right)^{\frac{3p}{2}} = \lim_{p \to \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{p}\right)^p\right]^{\frac{3}{2}} = e^{\frac{3}{2}}.$$

Logo.

$$\lim_{n \to \infty} \left\{\left[\frac{2n^3 - n + 3}{n^3 + 2n^2 + 1}\right] + \left[\frac{2n+5}{2(n+1)}\right]^{n+1}\right\} = 2 + e^{\frac{3}{2}}.$$

Q3) i) $f(x=2) = 1$

ii) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{x^2 - 5x + 6} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\cancel{(x-2)}(x^2 - 4x + 3)}{\cancel{(x-2)}(x-3)} =$

$$
\begin{array}{l|l}
x^3 - 6x^2 + 11x - 6 & x - 2 \\ \hline
-(x^3 - 2x^2) & x^2 - 4x + 3 \\
\quad -4x^2 + 11x - 6 & \\
\quad -(-4x^2 + 8x) & \\
\qquad 3x - 6 = 3(x-2) & \\
\qquad -3(x-2) & \\
\qquad\quad 0 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|l}
x^2 - 5x + 6 & x - 2 \\ \hline
-(x^2 - 2x) & x - 3 \\
\quad -3x + 6 = -3(x-2) & \\
\quad -3(x-2) & \\
\qquad 0 &
\end{array}
$$

$= \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x - 3} = \dfrac{4 - 8 + 3}{2 - 3} = \dfrac{-1}{-1} = 1$

iii) $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(x=2) = 1$. Logo a função é contínua em $x=2$.

Q4) $f(x) = \dfrac{x^2 \operatorname{sen}(x^2) + e^{\cos(x)}}{x^2 + 3} = \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$. $\quad f_1(x) = x^2 \operatorname{sen}(x^2) + e^{\cos(x)}$

$f_2(x) = x^2 + 3$.

$$\frac{df_1}{dx} = \left[x^2 \operatorname{sen}(x^2)\right]' + \left[e^{\cos(x)}\right]' = (x^2)' \operatorname{sen}(x^2) + x^2 [\operatorname{sen}(x^2)]' + \left[e^{\cos(x)}\right]'$$

$$= 2x \operatorname{sen}(x^2) + x^2 \frac{d(\operatorname{sen} u)}{du} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{d(e^v)}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$$

$$= 2x \operatorname{sen}(x^2) + x^2 \cos(x^2) \cdot 2x + e^{\cos(x)} (-\operatorname{sen} x)$$

$$= 2x\left[\operatorname{sen}(x^2) + x^2 \cos(x^2)\right] - \operatorname{sen}(x) \cdot e^{\cos(x)}$$

$$\frac{df_2}{dx} = (x^2 + 3)' = 2x.$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{f_1' \cdot f_2 - f_1 f_2'}{f_2^2} = \frac{2x(x^2+3)\left[\operatorname{sen}(x^2) + x^2 \cos(x^2)\right] - (x^2+3) \operatorname{sen}(x) e^{\cos(x)}}{(x^2+3)^2}$$

$$- 2x\left(x^2 \operatorname{sen}(x^2) + e^{\cos(x)}\right)$$

$$df = \int \frac{(x^2+3)\left[2x\left(\operatorname{sen}(x^2) + x^2\cos(x^2)\right) - \operatorname{sen}(x)\, e^{\cos(x)}\right] - 2x\left[x^2 \operatorname{sen}(x^2) + e^{\cos(x)}\right]}{(x^2+3)^2}\, dx$$

Q5) $f(x) = (x-1)^2(x-3) = (x^2-2x+1)(x-3) = x^3 - 2x^2 + x - 3x^2 + 6x - 3$

$= x^3 - 5x^2 + 7x - 3$ em $[0, 4]$

Extremos relativos.

C.N. $y' = 0$ ou não existe (pontos críticos).

$y' = 3x^2 - 10x + 7 = 0$ $\qquad x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ $\qquad a = 3$, $b = -10$, $c = 7$

$$x_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 4\cdot 3 \cdot 7}}{2\cdot 3} = \frac{10 \pm \sqrt{16}}{6} = \frac{10 \pm 4}{6}$$

$x_1 = 1$ e $x_2 = \dfrac{7}{3}$

C.S. $y'' = (y')' = (3x^2 - 10x + 7)' = 6x - 10$

$y''(x_1 = 1) = 6\cdot 1 - 10 = -4 < 0$ máximo relativo

$y''\left(x_2 = \frac{7}{3}\right) = 6 \cdot \frac{7}{3} - 10 = 14 - 10 = 4 > 0$ mínimo relativo.

Extremos absolutos.

$f(x=0) = -3$ mínimo absoluto

$f(x=4) = (3)^2 \cdot 1 = 9$ máximo absoluto

$f(x=1) = 0$

$f\left(x = \frac{7}{3}\right) = -\dfrac{32}{27}$

Mínimo relativo alcançado em $x = \frac{7}{3}$, máximo relativo alcançado em $x = 1$. Mínimo absdluto alcançado em $x = 0$ e máximo absoluto em $x = 4$.